RIFLESSIONI

Di Paolo Ruffini

INTORNO AL METODO PROPOSTO DAL CONSOCIO *MALFATTI* PER LA SOLUZIONE DELLE EQUAZIONI DI 5° GRADO

Ricevute il dì 21 Settembre 1805.

L'immortale Consocio Lodovico Lagrange nella seconda delle sublimi Memorie (Reflex. sur la Résolut. des Equat.) esistenti negli Atti dell'Accademia di Berlino per gli anni 1770, 1771, analizzando (Sect. 3) i metodi generali, che fino a quell' epoca erano stati proposti, onde tentare la soluzione di tutte le Equazioni algebraiche, esamina da prima il metodo, che il Sig. Tschirnaus espose negli Atti di Lipsia per l'anno 1685, e l'altro poscia, che pubblicarono il Sig. Eulero nel Tomo 9° dei Nuovi Commentarj di Pietroburgo, ed il Sig. Bezout negli Atti dell' Accademia delle Scienze di Parigi per l' anno 1765. Ritrovato, che entrambi questi metodi applicati ad un' Equazione generale di 5° grado la trasformano in un'altra del grado 24°, il Sig. Lagrange col mezzo in seguito delle profonde sue osservazioni scuopre essere tal trasformata riducibile ad un'altra di grado 6° (n.° 74, Reflex. ec.), e di quest' ultima determina Egli attualmente il solo coefficiente del 2° termine.

Nell' anno medesimo, in cui il Sig. Lagrange presentò all' Accademia di Berlino la seconda delle citate Memorie, il Chiarissimo Sig. Malfatti pubblicò nel T°. 4° dell' Accademia di Siena il suo metodo generale, onde sciogliere le Equazioni. Questo nella prima supposizione fondamentale non differisce, per vero dire, dal metodo de' Sigg. Eulero, e Bezout; rapporto però all' Equazione di 5° grado lo supera di gran lunga nell' ulteriore svi-

 lup-

luppo, e nei calcoli ulteriori. Col mezzo di questi l'indicata Equazione di 5° grado riducesi attualmente ad una trasformata di grado 6° (n.° XIV Mem. Malfatti T. 4° Accademia di Siena), e l'illustre Autore ha così il vanto di avere, senza punto conoscere le corrispondenti osservazioni di Lagrange, ottenuta completamente una trasformazione, rapporto alla quale l'immortale Matematico di Turino non aveva infine determinato che il grado, ed un solo coefficiente.

Ora l' Egregio Socio Malfatti nel promuovere i suoi dubbj sopra la insolubilità della Equazione generale di 5° grado (Tom. XI. di questa Società), espone nuovamente tale suo metodo. Dopo adunque di avere risposto ai dubbj medesimi, sembrata è a me cosa conveniente l' istituire su di tal metodo applicato alla Equazione generale di grado 5° delle ricerche, come il Sig. Lagrange le ha istituite sopra i metodi de' Sigg. Tschirnaus, Eulero, e Bezout, e ciò principalmente, onde scuoprire *a priori*, il perchè la sovraesposta corrispondente trasformata risulti di 6° grado.

1. Denominate $x', x'', x''', x^{iv}, x^{v}$ le cinque radici della Equazione generica

(I) $$x^5 - 5ax^3 + 5bx^2 + 5cx + d = 0$$

del Sig. Malfatti (pag. 503 T.° XI. Soc. Ital.), poichè il primo membro di questa deve uguagliare il prodotto, che formasi dalla moltiplicazione fra loro delle quantità

$$\begin{array}{l} x + fm + f^2p + f^3q + f^4n, \\ x + f^2m + f^4p + fq + f^3n, \\ x + f^3m + fp + f^4q + f^2n, \\ x + f^4m + f^3p + f^2q + fn, \\ x + m + p + q + n, \end{array}$$

nelle quali la f esprime una delle radici immaginarie della unità, e le m, p, q, n sono quantità da determinarsi (pag. 503), avremo evidentemente

(II) $$\begin{array}{l} x' = -(fm + f^2p + f^3q + f^4n), \\ x'' = -(f^2m + f^4p + fq + f^3n), \\ x''' = -(f^3m + fp + f^4q + f^2n), \end{array}$$

x^{iv}

$$x^{iv} = -(f^4 m + f^3 p + f^2 q + f n);$$
$$x^{v} = -(m + p + q + n).$$

Sommo ora insieme queste Equazioni dopo avere moltiplicata la prima di esse per f^4, la seconda per f^3, la terza per f^2, e la quarta per f; poscia le sommo, dopo avere moltiplicata la prima per f^3, la seconda per f, la terza per f^4, e la quarta per f^2; le sommo in terzo luogo, avendole prima moltiplicate, la prima per f^2, la seconda per f^4, la terza per f, e la quarta per f^3; finalmente le sommo, avendo moltiplicata la prima per f, la seconda per f^2, per f^3 la terza, e per f^4 la quarta; e ciò fatto, avrannosi i risultati

$$\text{(III)}\quad \begin{aligned} m &= -(f^4x' + f^3x'' + f^2x''' + f x' + x^{v}) : 5, \\ p &= -(f^3x' + fx'' + f^4x''' + f^2x^{iv} + x^{v}) : 5, \\ q &= -(f^2x' + f^4x'' + fx''' + f^3x^{iv} + x^{v}) : 5, \\ n &= -(fx' + f^2x'' + f^3x''' + f^4x^{iv} + x^{v}) : 5. \end{aligned}$$

2. Osservando ora l'incognita m, veggo essere questa una funzione razionale delle x', x'', ec. x^{v}, la quale a cagione dei valori della f tra loro diversi, e della generalità della Equazione (I), cangia di valore, qualunque permutazione si faccia fra le stesse x', x'', ec. x^{v}. Dunque l'Equazione, da cui essa dipende, sarà del grado $1 . 2 . 3 . 4 . 5 = 120°$.

Chiamata Z l'incognita di questa Equazione, poichè la m non è che uno dei valori della Z, sia $m = Z'$, ne verrà $Z' = -(f^4x' + f^3x'' + f^2x''' + fx^{iv} + x^{v}) : 5$ e quindi moltiplicando successivamente per f, f^2, f^3, f^4, avremo

$$\text{(IV)}\quad \begin{aligned} Z' &= -(f^4x' + f^3x'' + f^2x''' + fx^{iv} + x^{v}) : 5, \\ fZ' &= -(f^4x'' + f^3x''' + f^2x^{iv} + fx^{v} + x') : 5, \\ f^2Z' &= -(f^4x''' + f^3x^{iv} + f^2x^{v} + fx' + x'') : 5, \\ f^3Z' &= -(f^4x^{iv} + f^3x^{v} + f^2x' + fx'' + x''') : 5, \\ f^4Z' &= -(f^4x^{v} + f^3x' + f^2x'' + fx''' + x^{iv}) : 5. \end{aligned}$$

Ora la seconda di queste funzioni nasce dalla prima per quella permutazione semplice di 1° genere, sotto cui la x' cangiasi nella x'', la x'' nella x''', la x''' nella x^{iv}, la x^{iv} nella x^{v}, e la x^{v} nella x', e le altre funzioni terza, quarta, e quinta nascono successivamente dalla prossima precedente per la permutazione medesima ripetuta. Dunque le quantità $Z', fZ', f^2Z', f^3Z, f^4Z'$ non sono che tante radici della Equazione in Z, e però il suo primo membro sarà divisibile esattamente pel prodotto

$$(Z-Z')\,(Z-fZ')\;.\;.\;.\;(Z-f^4Z')=Z^5-Z'^5\,.$$

Chiamata Z'' un'altra qualunque delle radici della Equazione in Z diversa dalle (IV), e supposto per esempio $Z''=-(f^4x''+f^3x'+f^2x'''+fx^{\mathrm{iv}}+x^{\mathrm{v}}):5$, troveremo, come rapporto alla Z', che sono radici di tale Equazione ancora tutte le quantità Z'', fZ'', f^2Z'', f^3Z'', f^4Z'', e però che il suo primo membro è divisibile eziandio per $Z^5-Z''^5$. Lo stesso si dice di tutte le altre funzioni, che sono radici della Equazione medesima. Dunque il suo primo membro uguaglierà il prodotto

$$(Z^5-Z'^5)\,(Z^5-Z''^5)\,(Z^5-Z'''^5)\;.\;.\;.\;(Z^5-Z^{\mathrm{xxiv}5}),$$

e per conseguenza, supposto $Z^5=M$, essa si ridurrà alla Equazione del 24° grado

$$\text{(V)}\qquad M^{24}+pM^{23}+qM^{22}+\text{ec.}=0\,.$$

Questa Equazione (V) altro non è che la trasformata che ottiensi col metodo de' Sigg. Eulero, e Bezout, ed essa è, nella quale si contengono tutti i 24 valori della M, che sono indicati nel (n.° 278 della mia Teor. delle Equ.). Siccome poi dalle (III) abbiamo

$$\text{(VI)}\qquad\begin{aligned}
m&=-(f^4x'+f^3x''+f^2x'''+fx^{\mathrm{v}\prime}+x^{\prime\mathrm{v}}):5,\\
p&=-(f^4x'''+f^3x'+f^2x^{\mathrm{iv}}+fx''+x^{\mathrm{v}}):5,\\
q&=-(f^4x''+f^3x^{\mathrm{iv}}+f^2x'+fx'''+x^{\mathrm{v}}):5,\\
n&=-(f^4x^{\mathrm{iv}}+f^3x'''+f^2x''+fx'+x^{\mathrm{v}}):5,
\end{aligned}$$

queste p,q,n non saranno, che tante funzioni, le quali provengono dalla m per certe permutazioni fra le x', x'', ec. x^{v}. Dunque saranno esse pure tante radici della precedente Equazione in Z, e le m^5, p^5, q^5, n^5 tante radici della precedente (V).

3. Moltiplichiamo la prima delle quantità (VI) con la quarta, e la seconda con la terza; ritenuta la maniera di scrivere supposta nei (n. 34, 39. 46, Teor. delle Equ.) otterremo quindi

$$\begin{aligned}
mn=[\Sigma x^2&+(f+f^4)\,(x'x''+x''x'''+x'''x^{\mathrm{iv}}+x^{\mathrm{iv}}x^{\mathrm{v}}+x^{\mathrm{v}}x')\;+\\
&(f^2+f^3)\,(x'x'''+x'''x^{\mathrm{v}}+x^{\mathrm{v}}x''+x'x^{\mathrm{iv}}+x^{\mathrm{iv}}x')\,]:5^2\\
pq=[\Sigma x^2&+(f+f^4)\,(x'x'''+x'''x^{\mathrm{v}}+x^{\mathrm{v}}x''+x'x^{\mathrm{iv}}+x^{\mathrm{iv}}x')\;+\\
&(f^2+f^3)\,(x'x''+x''x'''+x'''x^{\mathrm{iv}}+x^{\mathrm{iv}}x^{\mathrm{v}}+x^{\mathrm{v}}x')\,]:5^2.
\end{aligned}$$

Facciasi

(VII)

(VII) $\begin{aligned} &x'x'' + x''x''' + x'''x^{\mathrm{iv}} + x^{\mathrm{iv}}x^{\mathrm{v}} + x^{\mathrm{v}}x' = \pi\,, \\ &x'x''' + x'''x^{\mathrm{v}} + x^{\mathrm{v}}x'' + x''x^{\mathrm{iv}} + x^{\mathrm{iv}}x' = \rho\,. \end{aligned}$

Essendo $f + f^2 + f^3 + f^4 + 1 = 0$, abbiamo $f^2 + f^3 = -1 - (f + f^4)$, e, per la mancanza del secondo termine nella (I) abbiamo $\Sigma x^2 = 10a$ (n.° 35 Teor.). Dunque sostituendo, i due precedenti risultati diverranno

$$mn = [\,10a - \rho + (+f + f^4)(\pi - \rho)\,] : 5^2$$
$$pq = [\,10a - \pi - (f^4)(\pi - \rho)\,] : 5^2.$$

Si moltiplichino ora insieme questi due valori, otterremo quindi

$mnpq = [100a^2 - 10a(\pi + \rho) + \pi\rho - (f + f^2 + f^3 + f^4 + 2)(\pi - \rho)^2] : 5^4$; ma $\pi + \rho = -5a$, $f + f^2 + f^3 + f^4 + 1 = 0$; dunque sarà $mnpq = 150a^2 - (\pi^2 + \rho^2) + 3\pi\rho$; inoltre dalle funzioni (VII) deducesi

$$\pi^2 + \rho^2 = \Sigma\overline{xx}^2 + 4\Sigma xxxx + 2(x'x''^2x''' + x''x'''^2x^{\mathrm{iv}} + x'''x^{\mathrm{iv}2}x^{\mathrm{v}} + x^{\mathrm{iv}}x^{\mathrm{v}2}x' + x^{\mathrm{v}}x'^2x'' + x'x'''^2x^{\mathrm{v}} + x^{\mathrm{v}}x''^2x^{\mathrm{iv}} + x^{\mathrm{iv}}x'^2x''' + x'''x^{\mathrm{v}2}x'' + x''x^{\mathrm{iv}2}x'),$$
$$\pi\rho = \Sigma xxxx + x'^2x''x''' + x'x''x'''^2 + x'x'''^2x^{\mathrm{iv}} + x'^2x'''x^{\mathrm{v}} + x''x'''^2x^{\mathrm{v}} + x'''^2x^{\mathrm{iv}}x^{\mathrm{v}} + x'''x^{\mathrm{iv}}x^{\mathrm{v}2} + x'x'''x^{\mathrm{v}2} + \text{ec.}$$

onde, chiamata μ la somma di tutti i termini $x'x'^2x'' +$ ec., che si contengono in $\pi^2 + \rho^2$, chiamata ν la somma de' termini $x'^2x''x'''$ + ec. contenuti in $\pi\rho$, ed essendo pei (1° n.° 47, 35 Teor.)

$$\Sigma\overline{xx}^2 = \frac{\Sigma x^2 \times \Sigma x^2 - \Sigma x^4}{2},\ \Sigma x^2 = 10a,\ \Sigma^4 = 50a^2 - 20c,\ \Sigma xxxx = 5c,$$

per cui $\Sigma\overline{xx}^2 + 4\Sigma xxxx = \frac{\Sigma x^2 \times \Sigma x^2 - \Sigma x^4}{2} + 4\Sigma xxxx = 25a^2 + 30c$,

ottienesi infine $\pi^2 + \rho^2 = 25a^2 + 30c + 2\mu$, $\pi\rho = 5c + \nu$. Dunque con la sostituzione il precedente prodotto $mnpq$ diverrà $= (150a^2 - 25a^2 - 30c - 2\mu + 15c + 3\nu) : 5^4$, e però avremo $mnpq = (125a^2 - 15c + 3(\mu + \nu) - 5\mu) : 5^4$.

Ora abbiamo la somma $\mu + \nu = \Sigma x^2xx$, e pel (n.° 46, 1°, 2° n.° 41 Teor.) abbiamo $\Sigma x^2xx = \Sigma x^2\Sigma xx - \Sigma xx^3 = \Sigma x^2\Sigma xx - \Sigma x\Sigma x^3 + \Sigma x^4$. Dunque, essendo $\Sigma x = 0$, $\Sigma xx = -5a$, $\Sigma x^2 = 10a$, $\Sigma x^4 = 50a^2 - 20c$, ci verrà $\mu + \nu = -20c$, e però $mnpq$ $(125a^2 - 75c - 5\ \ ) : 5\ $, ossia

$$mnpq = [125a^2 - 75c - 5(x'x''^2x''' + x''x'''^2x^{\mathrm{iv}} + x'''x^{\mathrm{iv}2}x^{\mathrm{v}} + x^{\mathrm{iv}}x^{\mathrm{v}2}x' + x^{\mathrm{v}}x'^2x'' + x'x'''^2x^{\mathrm{v}} + x^{\mathrm{v}}x''^2x^{\mathrm{iv}} + x^{\mathrm{iv}}x'^2x''' + x'''x^{\mathrm{v}2}x'' + x''x^{\mathrm{iv}2}x')] : 5^4.$$

Ciò

Ciò posto, poichè nel (n.° X Mem. Malfatti Tom. 4° Accad. di Siena) dal Chiarissimo Autore si fa $mn = y$, $pq = u$, onde $mnpq = uy$, e poichè nel (n.° XIV della stessa Mem.) ponesi $z = 25uy - 5a^2 + \frac{5c}{5}$, dovrà essere

$$\text{(VIII)} \quad z = -[20c + 3(x'x''^2x''' + x''x'''^2x^{iv} + x'''x^{iv2}x^{v} + x^{iv}x^{v2}x' + x^{v}x'^2x'' + x'x'''^2x^{v} + x^{v}x''^2x^{iv} + x^{iv}x'^2x''' + x'''x^{v2}x'' + x''x^{iv2}x')] : 15;$$

e questa sarà la funzione delle x', x'', ec. x^{v}, a cui si uguaglia l' incognita z della trasformata, ossia risolvente di 6° grado del Sig. Malfatti. Nel (T.° XI Soc. Ital. delle Scienze) poi deducesi da Lui attualmente simile trasformata (pag. 602) in un caso particolare, nel caso cioè, in cui $x^5 + 5.2x^3 + 5^2 2^2 = 0$ è l' Equazione data (pag. 599), ed invece di $mn = y$ ponesi quivi $mn = g$ (pag. 593).

4. Essendo la data Equazione (I) generica, la z avrà esattamente tanti valori tra loro diversi, quanti sono i risultati tra loro diversi, che per tutte le permutazioni fra le x', x'', ec. x^{v}, ottengonsi nella precedente (VIII). Ora per determinare quanti siano questi risultati differenti fra loro, osservo, che tanto la π, come la ρ sono tali, che i loro valori (VII) mantengonsi gli stessi sotto la permutazione semplice di 1° genere, nella quale la x' cangiasi nella x'', la x'' nella x''', la x''' nella x^{iv}, la x^{iv} nella x^{v}, e la x^{v} nella x'. Dunque avendosi pel (n.° prec.) $uy = mnpq = 15ca^2 - (\pi^2 + \rho^2) + 3\pi\rho$, sotto simile permutazione non cambierà di valore neppure la uy, e però nemmeno la z.

5. Ogniqualvolta una data funzione $f(x')(x'')(x''')(x^{iv})(x^{v})$, che dirò t, conserva il valor suo per l' indicata permutazione, possiamo sempre con somma facilità determinare il grado della Equazione, da cui essa dipende, servendoci delle seguenti regole :

1.° Eseguiscasi nella supposta $t = f(x')(x'')(x''')(x^{iv})(x^{v})$ la permutazione reciproca tra le sole due x', x'', ed osservisi, se essa per questa permutazione, cambia, o no, di valore; se no, dirò tosto che la Equazione in t è di primo grado (n.° 12 Mem., 1° n.° 271 Teor.); e che è certamente di grado superiore, se per simile permutazione la funzione cambia di valore.

2.° Succedendo quest'ultimo caso, permuto nella t la x' nella x'', la x'' nella x''', e la x''' nella x'. Se sotto tale operazione la t conserva il proprio valore, dirò, che l' Equazione in t è di 2° grado, e che è di grado superiore, mentre lo cambia (n.° 10 Mem., 3° n.° 271 Teor.)

3.° In questo caso secondo cangio la x' nella x''', la x''' nella x^{v}, la x^{v} nella x'', e la x'' nella x', ed osservo, se il valore della funzione cangiasi, o no: se no, l' Equazione in t sarà di 6° grado; se sì, di grado superiore (2° n.° 40 Mem., 8° n.° 271 Teor.)

4.° In questo caso ultimo permuto simultaneamente la x' nella x^{v}, e la x^{v} nella x', la x'' nella x''', la x''' nella x''; e dirò, che l' Equazione in t è del duodecimo grado se la t per tale permutazione conservasi la stessa (2° n.° 40 Mem., 8° n.° 271 Teor.); che se non si conserva, dirò finalmente, che l' Equazione in t è del 24° grado (n.° 40 Mem., n.° 271 Teor.).

6. Comprendendosi in queste regole tutti i casi possibili, riguardanti il grado, a cui può ascendere l' Equazione avente l' incognita t precedentemente supposta (n.° 40 Mem., n.° 271 Teor.), ne viene, che per determinare il grado della Equazione in z, non si dovrà che applicare ad essa le regole medesime.

1.° Comincio perciò dal permutare nella (VIII) reciprocamente la x' nella x'', e veggo che il primo termine $x'x''^{2}x'''$ diviene $x''x'^{2}x'''$. Ora prima di procedere innanzi, rifletto, che se la nostra funzione per tale permutazione non cangiasse, questo termine $x''x'^{2}x'''$ dovrebbe contenersi fra i termini della (VIII); ma realmente veggo, che non vi si contiene. Dunque, senza procedere innanzi, concluderò subito, che la permutazione presente induce cambiamento nella (VIII), e però che l' Equazione in z è di un grado > 1.

2. Eseguisco quindi la seconda delle permutazioni precedenti, ed osservo, che per essa il primo termine $x'x''^{2}x'''$ diventa $x''x'''^{2}x'$; ma neppur questo $x''x'''^{2}x'$ contiensi nella (VIII). Dunque concluderò, come precedentemente, che l' Equazione in z supera eziandio il secondo grado.

3.° Faccio la permutazione del (3° n.° prec.), e per essa veg-

veggo, che il termine $x'x''^2x'''$ diviene $x'''x'^2x^{\mathrm{iv}}$; ma questo $x'''x'^2x^{\mathrm{iv}}$ contiensi nella (VIII). Dunque rapporto a tale permutazione non potrò concludere, come rapporto alle due precedenti, e però la eseguirò sopra tutti i termini; ma essa attualmente effettuata ci somministra dalla (VIII) il risultato

$$-[20c+3(x'''x'^2x^{\mathrm{iv}}+x'x^{\mathrm{iv}2}x''+x^{\mathrm{iv}}x''^2x^{\mathrm{v}}+x''x^{\mathrm{v}2}x'''+x^{\mathrm{v}}x'''^2x'+x'''x^{\mathrm{iv}2}x^{\mathrm{v}}+x^{\mathrm{v}}x'^2x''+x''x'''^2x^{\mathrm{iv}}+x^{\mathrm{iv}}x^{\mathrm{v}2}x'+x'x''^2x''')]:15$$

e questo è identico alla funzione (VIII). Dunque per la regola stabilita nel (3° n.° prec.) concluderò, che la Equazione in z è di 6° grado, come difatti ha determinato praticamente col mezzo di calcoli assai ingegnosi (T.° XI. Soc. Italiana delle Scienze) il Sig. Malfatti nel (n.° XIV della sua Mem. Accad. di Siena).

Nel (n.° 4) abbiam veduto il perchè la (VIII) conservi il proprio valore per la permutazione semplice di 1° genere fra tutte e cinque le radici, che abbiamo colà indicata; determineremo poi il perchè lo conservi eziandio per la permutazione semplice di 1.° genere fra le quattro $x', x'' x''', x^{\mathrm{iv}}$, che si è accennata nel (3.° n.° 5), osservando che le funzioni (VI) nascono l'una dall' altra per simile permutazione, e che quindi la $uy = mnpq$, da cui dipende la z (n.° 3), non può sotto di essa cangiar punto di valore.

7. Volendo determinare i sei risultati della funzione (VIII) uguali ai sei valori della z (n.° 3), chiamata v, e posta $= f(x')(x'')(x''')(x^{\mathrm{iv}})(x^{\mathrm{v}})$ la somma $x'x''^2x''' + x''x'''^2x^{\mathrm{iv}} +$ ec. contenuta nella (VIII) medesima, osservo che questa v deve cangiar di valore per la permutazione semplice di 1° genere fra le radici che occupano i primi tre luoghi, e per l'altra fra le radici de' primi due luoghi (1° 2° n.° 61). Dunque, eseguita sopra la v la prima di queste permutazioni, ed eseguita poscia sopra ciascuno dei tre risultati, che ne nascono, la permutazione seconda, otterremo sei risultati, i quali essendo, per quanto abbiamo ora detto, disuguali tra loro, altro non esprimeranno, che i sei valori tra loro diversi della v corrispondenti ai sei della z. Simili valori saranno i seguenti.

$v' =$

$$v'=f(x')(x'')(x''')(x^{\mathrm{iv}})(x^{\mathrm{v}})=x'x''^{2}x'''+x''x'''^{2}x^{\mathrm{iv}}+x'''x^{\mathrm{iv}2}x^{\mathrm{v}}+x^{\mathrm{iv}}x^{\mathrm{v}2}x'$$
$$x^{\mathrm{v}}x'^{2}x''+x'x'''^{2}x^{\mathrm{v}}+x^{\mathrm{v}}x''^{2}x^{\mathrm{iv}}+x^{\mathrm{iv}}x'^{2}x'''+x'''x^{\mathrm{v}2}x''+x''x^{\mathrm{iv}2}x',$$
$$v''=f(x'')(x''')(x')(x^{\mathrm{iv}})(x^{\mathrm{v}})=x''x'''^{2}x'+x'''x'^{2}x^{\mathrm{iv}}+x'x^{\mathrm{iv}2}x^{\mathrm{v}}+x^{\mathrm{iv}}x^{\mathrm{v}2}x''$$
$$+x^{\mathrm{v}}x''^{2}x'''+x''x'^{2}x^{\mathrm{v}}+x^{\mathrm{v}}x'''^{2}x^{\mathrm{iv}}+x^{\mathrm{iv}}x''^{2}x'+x'x^{\mathrm{v}2}x'''+x'''x^{\mathrm{iv}2}x'',$$
$$v'''=f(x''')(x')(x'')(x^{\mathrm{iv}})(x^{\mathrm{v}})=x'''x'^{2}x''+x'x''^{2}x^{\mathrm{iv}}+x''x^{\mathrm{iv}2}x^{\mathrm{v}}+x^{\mathrm{iv}}x^{\mathrm{v}2}x'''$$
$$\text{(IX)}\quad +x^{\mathrm{v}}x'''^{2}x'+x'''x''^{2}x^{\mathrm{v}}+x^{\mathrm{v}}x'^{2}x^{\mathrm{iv}}+x^{\mathrm{iv}}x'''^{2}x''+x''x^{\mathrm{v}2}x'+x'x^{\mathrm{iv}2}x''',$$
$$v^{\mathrm{iv}}=f(x'')(x')(x''')(x^{\mathrm{iv}})(x^{\mathrm{v}})=x''x'^{2}x'''+x'x'''^{2}x^{\mathrm{iv}}+x'''x^{\mathrm{iv}2}x^{\mathrm{v}}+x^{\mathrm{iv}}x^{\mathrm{v}2}x''$$
$$+x^{\mathrm{v}}x''^{2}x'+x'x'''^{2}x^{\mathrm{v}}+x^{\mathrm{v}}x'^{2}x^{\mathrm{iv}}+x^{\mathrm{iv}}x''^{2}x'''+x'''x^{\mathrm{v}2}x'+x'x^{\mathrm{iv}2}x'',$$
$$v^{\mathrm{v}}=f(x''')(x'')(x')(x^{\mathrm{iv}})(x^{\mathrm{v}})=x'''x''^{2}x'+x''x'^{2}x^{\mathrm{iv}}+x'x^{\mathrm{iv}2}x^{\mathrm{v}}+x^{\mathrm{iv}}x^{\mathrm{v}2}x'''$$
$$+x^{\mathrm{v}}x'''^{2}x''+x'''x'^{2}x^{\mathrm{v}}+x^{\mathrm{v}}x''^{2}x^{\mathrm{iv}}+x^{\mathrm{iv}}x'''^{2}x'+x'x^{\mathrm{v}2}x''+x''x^{\mathrm{iv}2}x''',$$
$$v^{\mathrm{vi}}=f(x')(x''')(x')(x^{\mathrm{iv}})(x^{\mathrm{v}})=x'x'''^{2}x''+x'''x''^{2}x^{\mathrm{iv}}+x''x^{\mathrm{iv}2}x^{\mathrm{v}}+x^{\mathrm{iv}}x^{\mathrm{v}2}x'$$
$$+x^{\mathrm{v}}x'^{2}x'''+x'x''^{2}x^{\mathrm{v}}+x^{\mathrm{v}}x'''^{2}x^{\mathrm{iv}}+{}^{\mathrm{iv}}x'^{2}x''+x''x^{\mathrm{v}2}x'''+x'''x^{\mathrm{iv}2}x'.$$

Ora dalla (VIII) abbiamo $z = -(20c + 3v) : 15$. Dunque essendo $z' = -(20c + 3v') : 15$, $z'' = -(20c + 3v'') : 15$, ec. $z^{\mathrm{vi}} = -(20c + 3v^{\mathrm{vi}}) : 15$, otterremo le sei funzioni, a cui si uguagliano le radici z', z'', ec. z^{vi}, ponendo invece delle v', v'', ec. v^{vi} le precedenti rispettive funzioni. Se con queste v', v'', ec. v^{vi} si formasse un' Equazione $v^6 + Mv^5 + Nv^4 + \text{ec.} = 0$, i coefficienti M, N, ec. essendo funzioni della forma $f(v', v'', \text{ec. } v^{\mathrm{vi}})$, sarebbero tutti pel (n.° 105 Teor.) determinabili razionalmente con i coefficienti della data (I).

Paragonando i precedenti risultati (IX) con quelli della (Tavola VI. Teor.), avremo $v' =$ ris.° 1°, $v'' = 3°$, $v''' = 4°$, $v^{\mathrm{iv}} = 2°$, $v^{\mathrm{v}} = 6$, $v^{\mathrm{vi}} = 5°$. Coll' eseguire poi su questi la permutazione semplice di 1° genere tra le radici dei primi quattro luoghi, che abbiamo accennata nel (3° n.° 5), e per cui la v' mantiene il proprio valore (3° n.° 6), pel (n.° 96 Teor.) otterremo, paragonando con i risultati della citata Tavola,

$v' =$ ris.° 1° = 9° = 24° = 17°, $v'' =$ 3° = 10° = 23° = 14°,
$v''' =$ 4° = 7° = 20° = 18°, $v^{\mathrm{iv}} =$ 2° = 11° = 22° = 15°,
$v^{\mathrm{v}} =$ 6° = 8° = 19° = 16°, $v^{\mathrm{vi}} =$ 5° = 12° = 21° = 13°,

e permutando finalmente in ciascuno di questi ultimi, giusta il (n.° 4) la radice, che occupa il primo luogo in quella del secondo, la radice del secondo in quella del terzo, e così di seguito; pei cit. (n.° 4), e (n.° 96 Teor.) otterremo i venti risultati delle file 1ª, 9ª, 24ª, 17ª nella Tavola tutti uguali fra loro; così uguali fra loro i venti risultati delle linee 3ª, 10ª, 23ª, 14ª; uguali tra loro gli esi stenti nelle linee 4ª, 7ª, 20ª, 18ª, e così in progresso.

In conseguenza di simili osservazioni vedesi quali siano i risultati, che, provenendo sotto le varie permutazioni fra le x', x'', ec. x^{v} dalla v, uguagliansi fra di loro, e quali siano tra lor disuguali: dunque dalle osservazioni medesime conosceremo ancora quali tra i risultati provenienti dalla z siano uguali tra loro, e quali no. Da tutto insieme poi apparisce perchè la precedente Equaz. in v, e però l'altra in z del Sig. Malfatti risulti del grado 6°, mentre la trasformata de' Sigg. Eulero, e Bezout diventava del 24°.

La funzione, a cui si uguaglia l' incognita della Equazione di 6° grado, che viene indicata dal Sig. Lagrange è la seguente.

$$(\mathrm{X})\quad \begin{aligned} &2\,[x'^{3}(x''x^{v} + x'''x^{iv}) + x''^{3}(x'x''' + x^{iv}x^{v}) + x'''^{3}(x''x^{iv} + x'x^{v}) + \\ &\quad x^{iv3}(x'''x^{v} + x'x'') + x^{v3}(x'x^{iv} + x''x''')\,] + \\ &3\,[x'(x''^{2}x^{v2} + x'''^{2}x^{iv2}) + x''(x'^{2}x'''^{2} + x^{iv2}x^{v2}) + x'''(x''^{2}x^{iv2} + x'^{2}x^{v2}) \\ &\quad + x^{iv}(x'''^{2}x^{v2} + x'^{2}x''^{2}) + x^{v}(x'^{2}x^{iv2} + x''^{2}x'''^{2})\,] \end{aligned}$$

(n. 74 Sect. 3.ª Réflex. ec. Accad. de Berlin pour l'an. 1771); ma paragonando questa con la precedente funzione (VIII), esse truovansi tra lor differenti: dunque dalla risolvente attualmente determinata dal Sig. Malfatti (n.° XIV Mem. Malf. Tom. 4° Accad. di Siena) diversa sarebbe quella, che, compiendo il calcolo (n.° 74 Sect. 3ª Réflex.), avrebbe potuto determinare il Sig. Lagrange. La somiglianza però delle funzioni indicate (n.° 3 Teor) farà sì pel (n.° 100 Sect. 4ª Réflex. ec. n.° 144 Teor. delle Equaz.), che da ciascuna delle radici della Equazione Malfatti può col mezzo di una semplice Equazione lineare determinarsi ciascuna delle radici nella Equazione Lagrange, e viceversa. Siccome poi possiamo sempre formare infinite funzioni simili alla (VIII), ed alla (X); quindi ne viene, che la data Equazione di 5° grado potrà sempre trasformarsi in infinite alt e tutte di grado 6°. Ciascheduna però di queste Equazioni, siccome quella de' Si g. Lagrange, e Malfatti, sarà inutile alla risoluzione della proposta, mentre

tre sia essa generale. Che se, essendo l' Equazione data particolare, una qualunque di queste trasformate, in conseguenza del particolare valore, o rapporto fra le x', x'', ec. x^{v} contenga un divisor razionale, pel citato (n.° 100 Réflex. ec. n.° 144 Teor. delle Equaz.) dovrà contenere un fattor razionale dello stesso grado eziandio ciascheduna delle altre; e però contenendolo ancora la risolvente del Sig. Malfatti, questa sola, essendo già determinata, potrà servirci, ogniqualvolta data una Equazione di 5° grado particolare, voglia scuoprirsi, se una sua risolvente di 6° contenga un fattor razionale, onde poi ricavarne la soluzione.

Ho detto, onde ricavarne la soluzione; perchè potremo sempre ottener questa, mentre in una qualsivoglia delle esposte risolventi venga a conoscersi una radice. Chiamata difatti z' tale radice, cerco da essa il valore della m^5, essendo la m quella stessa, che abbiamo supposta nel (n.° 1). Poichè le z', m^5 sono, per quanto si è detto precedentemente, due funzioni delle x', x'', ec. x^{v} tali, che per la permutazione, che abbiamo accennata nel (3° n. 5), la prima di esse si conserva dello stesso valore, e la seconda si cambia, e tali, che per quelle fra tutte le altre permutazioni, sotto cui la z' mantiene, o cangia il valor proprio, lo mantiene corrispondentemente, o cangia eziandio la m^5; ne segue, che effettuando l' indicata ricerca, caderemo per questa m^5 in un' Equazione di 4° grado, della quale è facile a vedersi dai valori (VI), e dalla permutazione del cit.° (3° n.° 5), che saranno radici le quantità m^5, p^5, q^5, n^5. Supposti pertanto ottenuti attualmente i valori di queste quattro quantità, ne estraggo le radici quinte, le sostituisco rispettivamente nelle Equazioni (II), e si otterranno così i cinque richiesti valori della x.

Nella Equazione $x^5 + 5.2x^3 + 5^2.2^2 = 0$ del Sig. Malfatti (pag. 599 T.° XI. Soc. Ital. delle Scienze) alcune circostanze particolari facilitano assai di più il calcolo. Difatti contenendosi dalla sua risolvente esposta nella (pag. 602) il fattor razionale $z + 5.2^2$, questo ci somministra $z' = -5\,2^2$, e però uy, ossia ug (n.° 3) $= 0$; ma $ug = mnpq$. Dunque dovendo nel presente caso una delle quantità m, n, p, q essere $= 0$; e semplificandosi

 quin-

quindi assaissimo tanto le Equazioni supposte nella (pag. 593), come la Equazione in r esistente nella (pag. 602), non saremo più, per la determinazione delle m^5, n^5, p^5, q^5, necessitati di cadere nella sovraesposta Equazione di 4° grado. Dal paragone difatti della $x^5+5.2x^3+5^2.2^2=0$ con la Equazione generale (I) avendosi $a=-2$, $b=0$, $c=0$, $d=5^2.2^2$, ed a cagione di $ug=0$ avendosi dalla Equazione in r (pag. 602) $r=\pm 4$, pongasi in primo luogo $m=0$, $r=-4$, le Equazioni della (pag. 593) diverranno perciò $u=-2$, $t=4$, $pq=-2$, $n^2p=-4$, $nq^2=4$, e ottenendosi quindi con la semplice eliminazione
$n^5=2^4$, $p^5=-2^2$, $q^5=2^3$, onde

$$m=0,\ p=-\sqrt[5]{2^2},\ q=\sqrt[5]{2^3},\ n=\sqrt[5]{2^4};$$

le Equazioni (II) con la sostituzione di questi valori diventeranno

$$(\text{XI})\quad\begin{aligned}
x' &= -\left(-f^2\sqrt[5]{2^2}+f^3\sqrt[5]{2^3}+f^4\sqrt[5]{2^4}\right),\\
x'' &= -\left(-f^4\sqrt[5]{2^2}+f\sqrt[5]{2^3}+f^3\sqrt[5]{2^4}\right),\\
x''' &= -\left(-f\sqrt[5]{2^2}+f^4\sqrt[5]{2^3}+f^2\sqrt[5]{2^4}\right),\\
x^{\text{IV}} &= -\left(-f^3\sqrt[5]{2^2}+f^2\sqrt[5]{2^3}+f\sqrt[5]{2^4}\right),\\
x^{\text{V}} &= -\left(-\sqrt[5]{2^2}+\sqrt[5]{2^3}+\sqrt[5]{2^4}\right);
\end{aligned}$$

e queste saranno le cinque radici della proposta Equazione particolare.

Ritenuto $r=-4$, sia $n=0$: in questa ipotesi otterremo col medesimo calcolo

$$m=\sqrt[5]{2^4},\ p=\sqrt[5]{2^3},\ q=-\sqrt[5]{2^2},\ n=0.$$

Che se, posto $r=4$, facciasi $p=0$, oppure $q=0$; nel primo di questi casi ci risulterà

$$m=\sqrt[5]{2^3},\ p=0,\ q=\sqrt[5]{2^4},\ n=-\sqrt[5]{2^2},$$

e nel secondo

$m=-$

$$m = -\sqrt[5]{2^2},\ p = \sqrt[5]{2^4},\ q = 0,\ n = \sqrt[5]{2^3}.$$

Ora sostituendo nelle (II) i valori delle m, n, p, q, che sonosi ottenuti in ciascuno degli esposti casi, sempre ne risultano i valori (XI). Dunque la soluzione dell'Equazione data si ha egualmente, qualunque delle m, n, p, q uguagliasi allo zero, mentre però, allorquando ponesi m, od $n = 0$, facciasi $r = -4$, e quando ponesi p, ovvero $q = 0$, si faccia $r = 4$.

Onde determinare la ragione di questo fenomeno, chiamo, per brevità di scrivere, P' il primo dei valori (XI), P'' il secondo, ec., ed osservò, che ad eccezione della x^{v}, la qual sola rappresenta un' espressione delle m, n, p, q mancante della f, cioè la $m + p + q + n$ (n.° 1), le altre lettere x', x'', x''', x'^{v} per la forma de' valori (II) sono tutte tali, che da ciascuna delle medesime ciascheduna può esprimersi delle radici P', P'', P''', P'^{v}. Dunque, ritenute le supposizioni del (n.° 1), se vogliamo, che la x' rappresenti la prima radice P', allora avremo $m = 0$; ma se si vuole, che questa prima radice venga rappresentata dalla x'', o dalla x''', o dalla x'^{v}; in tali casi, mancando in essa P' il termine, nel quale la supposta f è alla potenza prima, dovrà come apparisce dalle (II), essere rispettivamente $q = 0$, ovvero $p = 0$, ovvero $n = 0$; e per conseguenza ciascuna di queste supposizioni dovrà poterci somministrare la soluzion della data.

Passando alla considerazione della r, comincio dall' osservare, che ponendo nella (VI) i valori P', P'', P''', P'^{v}, P^{v} delle radici, esse (VI) divengono

$$\text{(XII)}\quad \begin{aligned} m &= -(f^4P' + f^3P'' + f^2P''' + fP'^{v} + P^{v}) : 5, \\ p &= -(f^4P''' + f^3P' + f^2P'^{v} + fP'' + P^{v}) : 5, \\ q &= -(f^4P'' + f^3P'^{v} + f^2P' + fP''' + P^{v}) : 5, \\ n &= -(f^4P'^{v} + f^3P''' + f^2P'' + fP' + P^{v}) : 5; \end{aligned}$$

ma per la forma delle (II)

quando $m = 0$, esser deve $P' = x', P'' = x'', P''' = x''', P'^{v} = x'^{v}, P^{v} = x^{v}$,
quando $n = 0$, esser deve $P' = x'^{v}, P'' = x''', P''' = x'', P'^{v} = x', P^{v} = x^{v}$,
quando $p = 0$, esser deve $P' = x''', P'' = x', P''' = x'^{v}, P'^{v} = x'', P^{v} = x^{v}$,
e quando $q = 0$, esser deve $P' = x'', P'' = x'^{v}, P''' = x', P'^{v} = x''', P^{v} = x^{v}$,

Dun-

Dunque col porre nelle (XII) invece della P', P'', ec. le corrispondenti lettere x', x'', ec. le (XII) medesime quando $m=0$, divenendo

$$m=-(f^4x'+f^3x''+f^2x'''+fx^{\mathrm{iv}}+x^{\mathrm{v}}):5,$$
$$p=-(f^4x'''+f^3x'+f^2x^{\mathrm{iv}}+fx''+x^{\mathrm{v}}):5,$$
$$q=-(f^4x''+f^3x^{\mathrm{iv}}+f^2x'+fx'''+x^{\mathrm{v}}):5,$$
$$n=-(f^4x^{\mathrm{iv}}+f^3x'''+f^2x''+fx'+x^{\mathrm{v}}):5,$$

quando $n=0$, divenendo

$$m=-(f^4x^{\mathrm{iv}}+f^3x'''+f^2x''+fx'+x^{\mathrm{v}}):5,$$
$$p=-(f^4x''+f^3x^{\mathrm{iv}}+f^2x'+fx'''+x^{\mathrm{v}}):5,$$
$$q=-(f^4x'''+f^3x'+f^2x^{\mathrm{iv}}+fx''+x^{\mathrm{v}}):5,$$
$$n=-(f^4x'+f^3x''+f^2x'''+fx^{\mathrm{iv}}+x^{\mathrm{v}}):5,$$

quando $p=0$, divenendo

$$m=-(f^4x'''+f^3x'+f^2x^{\mathrm{iv}}+fx''+x^{\mathrm{v}}):5,$$
$$p=-(f^4x^{\mathrm{iv}}+f^3x'''+f^2x''+fx'+x^{\mathrm{v}}):5,$$
$$q=-(f^4x'+f^3x''+f^2x'''+fx^{\mathrm{iv}}+x^{\mathrm{v}}):5,$$
$$n=-(f^4x''+f^3x^{\mathrm{iv}}+f^2x'+fx'''+x^{\mathrm{v}}):5,$$

e quando $q=0$, divenendo

$$m=-(f^4x''+f^3x^{\mathrm{iv}}+f^2x'+fx'''+x^{\mathrm{v}}):5,$$
$$p=-(f^4x'+f^3x''+f^4x'''+fx^{\mathrm{iv}}+x^{\mathrm{v}}):5,$$
$$q=-(f^4x^{\mathrm{iv}}+f\,x'''+f^2x''+fx'+x^{\mathrm{v}}):5,$$
$$n=-(f^4x'''+f^3x'+f^2x^{\mathrm{iv}}+fx''+x^{\mathrm{v}}):5;$$

ne segue, che il passare dalla supposizione di $m=0$ all' altra di $n=0$, e da quella di $p=0$ all' altra di $q=0$ equivale all' eseguirsi nelle funzioni corrispondenti quella permutazione semplice di 2.° genere fra le $x', x'', x''', x^{\mathrm{iv}}$, per cui dalle m, p produconsi rispettivamente le n, q, ed il passare dalla ipotesi di $m=0$ all' altra di p, ovvero di $q=0$, e da quella di $n=0$ all' altra di q, o di $p=0$ equivale all' effettuarsi quella permutazione semplice di genere 1.° per cui dalla m producesi rispettivamente la p, oppure la q, e dalla n la q, ovvero la p.

Ciò posto, essendo evidentemente ancora la r una funzione delle x', x'', ec. x^{v}, eseguisco su di lei quella permutazione sempliplice di 1.° genere, per cui dalla m producesi la p, e ripetendo questa quanto si può, chiamo r', r'', r''', r^{IV} i risultati che ne vengono: poichè abbiamo $r = m^2 q + n^2 p$, (pag. 593), sarà $r' = m^2 q + n^2 p$, $r'' = p^2 m + q^2 n$, $r''' = n^2 p + m^2 q$, $r^{IV} = q^2 n + p^2 m$, ma coll' eseguire su della r la permutazione, per cui dalla m risulta la q, ottengonsi gli stessi quattro risultati. Dunque essendo $r' = r'''$, $r'' = r^{IV}$; per queste due permutazioni la r non acquista che due soli valori differenti tra loro, cioè i due r', r''; ora con la permutazione, per cui dalla m producesi la n, e dalla p la q, dalla quantità $r' = m^2 q + n^2 p$ si ottiene $n^2 p + m^2 q$, e dalla $r'' = p^2 m + q^2 n$ si ricava $q^2 n + p^2 m$. Dunque altro questi non essendo, che i risultati medesimi, da cui provengono; ne segue, che per tutte le permutazioni fra le x', x'', ec. x^{V}, per cui le precedenti m, n. p, q cambiansi fra di loro; la r non acquista che i due valori fra loro diversi r', r''. Dunque da tuttociò, che abbiam detto finora, raccogliendosi, che tanto r', come r'' non cambiano di valore, mentre dalla ipotesi di $m = 0$ si passa alla ipotesi di $n = 0$, e da quella di $p = 0$ all' altra di $q = 0$, e che il valore r' cambiasi nell' altro r'', mentre dalla supposizione di $m = 0$ all' altra si passa di p, ovvero di $q = 0$, e dalla supposizione di $n = 0$ all' altra si passa di q, ovvero di $p = 0$; concluderemo 1.° che, essendo r' il valore della r, il quale corrispondentemente al caso di $m = 0$ serve alla determinazione delle x', x'', ec. x^{V}, lo stesso r' servirà alla determinazione medesima anche nel caso, in cui dalla $m = 0$ passiamo alla $n = 0$; 2.° che quando dalla $m = 0$ passiamo alla p, od alla $q = 0$ per la indicata determinazione dovrà servire non più il valore r', ma l' altro r''; 3.° che finalmente lo stesso r'' dovrà servire, mentre dalla $m = 0$ si passa alla $q = 0$.

Tali sono le ragioni di quanto è accaduto nella soluzione della $x^5 . 5 . 2x + 5^2 . 2^2 = 0$. Se la data Equazione particolare sia differente da questa, ma però sia tale, che possa scuoprirsi il valore della m, qualunque esso siasi, è facile il vedere, che hanno sempre luogo la stessa precedente analisi, e le medesime conclusioni.

Se-

Se l' equazione in r della (pag. 602) è attualmente di 3.° grado, ciò è, perchè contiene una radice estranea introdottasi per cagione del calcolo, come diffatti apparisce rapporto al valore zero della r, mentre $ug=o$, giacchè questo valore non serve punto allo scioglimento della data. I due valori finalmente della r altro non sono, che i due r, t della (pag. 593).

SAG-