SAGGIO

DI ALCUNI PROBLEMI NUMERICI

DI GIANFRANCESCO MALFATTI

Ricevuto il dì 1 Luglio 1805.

La famosa proprietà dell' Ipotenusa nel triangolo rettangolo, ritrovata, e con tanta eleganza dimostrata dal Filosofo di Samo, fece nascere nella sua Scuola la curiosità, trasferendo le linee al numero astratto, d'indagare in quai temi di numeri intieri o rotti, si verificasse che il quadrato di uno di quei numeri, fosse uguale alla somma dei quadrati degli altri due, e ne andarono formando di lunghe serie regolate da una certa legge, che non ne rendeva difficile il rintracciamento. Sorse ne' più bassi tempi il celebre Diofante Alessandrino, il quale (si suppone con una specie d' Algebra da lui occultata, e a noi affatto ignota) si accinse a risolvere de' Problemi numerici, di lor natura indeterminati, colla condizione dei numeri intieri escludendone i rotti, la quale introduce bensì nel Quesito una certa non intiera determinazione, ma serve a rendere più difficile la loro risoluzione. Nel progresso de' tempi, dopo il prezioso dono fatto dagl' Indiani agli Arabi, della eccellente Aritmetica che ora usiamo, e dopo che il Monaco Gerberto, che fu poi Papa col Nome di Silvestro II, ito ad attingere tal dottrina ai fonti dei dotti Arabi Spagnuoli, la diffuse, con una felice rivoluzione, alla maggior parte delle Provincie Europee, verso la fine del X Secolo della nostra Era, non mancarono di quando in quando Geometri di qualche nome, che si occuparono volentieri nella Scienza de' numeri, indagandone or l'una or l'altra proprietà sino ai loro tempi sconosciuta; e allorchè, vinta la barbarie de' Secoli precedenti, si ristabilirono le Scienze nelle nostre contrade, andarono pullulando, or nell'uno, or nell'altro paese, de' valent' uomini, che dilatarono, sempre più,

più, questo ramo di Scienza su i numeri, confrontando i prodotti, e quadrati, e cercando quai numeri interi soddisfacessero alle generali formole da loro immaginate. Tra gli altri si distinsero il Frenicle, il de Fermat, ed altri di nome celebre, nè sdegnò a' nostri giorni di occuparvisi seriamente il sommo Geometra Lagrange, che in Problemi di simil sorta ci ha fatto dono negli Atti di Berlino di una lunga, e profonda dissertazione.

Io entro presentemente in una simile indagine, coll'occasione di una domanda fattami da dotta Persona di Parma, la quale avendo trovato con generale formola il modo di esibire, e uno, e infiniti quadrati, ciascun de' quali fosse uguale alla somma di tre quadrati, chiedevami come, coll'altra generale formola si potesse sciogliere quest' altro Problema: dato qualunque numero, ritrovare gli infiniti quadrati, ciascuno de' quali moltiplicato per quel numero, venisse a formare un prodotto uguale alla somma di tre quadrati. Meditando, per soddisfare alla gentile inchiesta, sul preposto Quesito, a poco a poco mi riuscì di ritrovare un metodo che poteva generalizzare il Problema, senza restringerlo al numero di tre soli quadrati; e questo è ciò che intendo presentemente di esporre ne' paragrafi susseguenti.

Prima di tutto mi convien provare che tutti i numeri interi sono spezzabili o in due, o in tre, o in quattro quadrati, cosicchè se vogliamo anche computare il quadrato del zero, si potrà dire, compresi gl' istessi numeri che sono di lor natura quadrati, che non v'ha numero che non possa essere spezzato in quattro quadrati. Cominceremo l' Esame dai numeri dispari, i quali son tutti compresi dalla formola generale $2n-1$. Se in questa generale formola n è numero pari, non è possibile che i numeri in essa compresi possano spezzarsi in tre quadrati un de'quali sia dispari, e gli altri due pari, e così nemmeno in due quadrati l'un dispari, e l'altro pari. In questa ipotesi fatto $n=2m$, si cangerà la formola in quest' altra, 2^2m-1; e fatto $2p-1$ la radice del quadrato dispari, $2q$, $2r$, quelle dei quadrati pari, se fosse possibile che 2^2m-1 fosse uguale ai quadrati di quelle tre radici avrebbesi l' Equazione $2^2m-1=2^2p^2-2^2p+1+4q^2+4r^2$, ov-

ovvero $2^2m-2=2^2p^2-2^2p+4q^2+4r^2$, il che non può essere, perchè abbiam un sol termine moltiplicato per 2, mentre gli altri sono moltiplicati per il suo quadrato. Quindi affinchè possa ciò verificarsi fa d'uopo che sia n numero dispari, che esprimeremo con $2m-1$, e cangerassi allora la formola $2n-1$ in quest' altra 2^2m-3, la quale nella supposizione dei suddetti tre quadrati ci presenta l'Equazione $2^2m-3=2^2p^2-2^2p+1+4q^2+4r^2$, ossia $2^2m-2^2=2^2p^2-2^2p+2^2q^2+2^2r^2$, che non porta ad alcun assurdo. Stendiamo ora la serie de' numeri dalla anzidetta formola originati col dare al simbolo m i valori successivi dei numeri naturali. Fatto $m=1$, si ha $4-3=1$; se $m=2$, nasce $8-3=5$, e andando avanti risulta la serie aritmetica 1. 5. 9. 13. 17. 21. 25. 29. 33. ec. Poichè nella serie de' numeri pari, entra anche il zero, sarà facile coll' aggiunta anche del quadrato di questo zero, stabilire i tre quadrati, equivalenti a ciascun numero della serie, uno de' quali sia dispari e gli altri due pari. Per ognuno dei suddetti numeri, metto quì sotto la serie di tale spezzatura

1 . 1 . 1 . 9 . 9 . 1 . 9 . 9 . 25 . ec.
0 . 4 . 4 . 4 . 4 . 4 . 16 . 16 . 4 .
0 . 0 . 4 . 0 . 4 . 16 . 0 . 4 . 4 .

Si produca pur oltre la serie quanto piaccia e non si troverà numero in essa che non ammetta una simile spezzatura; anzi si dee riflettere che un qualche numero potendo essere in diverse maniere spezzato in tre quadrati, sempre un d'essi sarà dispari, e gli altri due pari. Non nasca dubbio, che la stessa formola 2^2m-3 accetti numeri che possano essere spezzati in tre quadrati dispari, perchè tale ipotesi ci conduce allo stesso assurdo, nelle conseguenze di un numero pari-dispari uguale ad un aggregato di numeri pari-pari. Imperciocchè supposte le radici de' quadrati dispari; $2p-1$, $2q-1$, $2r-1$, potrebb' essere $2^2m-3=2^2p^2-2^2p+1+2^2q^2-2^2q+1+2^2r^2-2^2r+1$, ovvero colla traslazione delle tre unità, $2^2m-6=2^2p^2-2^2p+2^2q^2-2^2q+2^2r^2-2^2r$; il che è impossibile, perchè 6 è l'unico numero pari-dispari che abbiamo in quest' Equazione.

Poi-

Poichè un numero dispari può anche ammettere la spezzatura in tre quadrati dispari, conviene dar la formola generale, che abbraccia tutti questi numeri. Questa formola è $2^3 n - 5$, dalla quale nasce col dare a n i valori di 1.2.3.4.5.6 ec. la seguente serie 3.11.19.27.35.43.51.59.67.75.83 ec. cui corrisponde la seguente de' tre quadrati dispari

1 . 9 . 9 . 25 . 25 . 25 . 25 . 25 . 49 . 25 . 49 . ec.
1 . 1 . 9 . 1 . 9 . 9 . 25 . 25 . 9 . 25 . 25 .
1 . 1 . 1 . 1 . 1 . 9 . 1 . 9 . 9 . 25 . 9 .

avvertendo quì pure che potendosi alcun di questi numeri spezzare in tre quadrati diversi dei notati, saran sempre dispari i tre nuovi quadrati.

Poichè la formola dei numeri che si spezzano in tre quadrati dispari è $2^3 n - 5$, se aggiungo a questa formola il quadrato 4 e conseguentemente faccio la medesima aggiunta a ciascuno terno dei quadrati suddetti, la formola si cangia in $2^3 n - 1$, la serie de' numeri compresi da questa formola, cominciando dal minimo è, 7 . 15 . 23 . 31 . 39 . 47 . 55 . 63 . 71 . 79 . 87 ec., e tutti questi numeri non possono essere spezzati che in quattro quadrati, tre dispari e un pari che è sempre il 4; ed ecco quì sottoposta la serie delle spezzature

1 . 9 . 9 . 25 . 25 . 25 . 25 . 25 . 49 . 25 . 49 . ec.
1 . 1 . 9 . 1 . 9 . 9 . 25 . 25 . 9 . 25 . 25 .
1 . 1 . 1 . 1 . 1 . 9 . 1 . 9 . 9 . 25 . 9 .
4 . 4 . 4 . 4 . 4 . 4 . 4 . 4 . 4 . 4 . 4 .

Mi piace ancora di dimostrare ciò che superiormente ho detto, non potersi spezzare in meno di quattro quadrati i numeri compresi dalla formola $2^3 n - 1$. Perchè essendo sempre $2^3 n - 1$ numero dispari è chiaro non poter essere i tre quadrati che o un dispari, e due pari, o tre dispari. Nel primo caso avendosi l'unità nell'ultimo termine del dispari, e riuscendo tutti gli altri termini dell' omogeneo di comparazione, moltiplicati per quattro, trasportata la suddetta unità nel primo membro, diventa esso $2^3 n - 2$ un numero pari-dispari, che non può mai essere uguale, a un aggregato di numeri pari-pari. Nel secondo caso, potrebbe valere questa Equazione $2^3n - 1 = 2^2p^2 - 2^2p + 1 + 2^2q^2 - 2^2q + 1 + 2^2r^2 - 2^2r + 1$, da che nascerebbe $2^3n - 2^2 = 2^2(p^2 - p + q^2 - q + r^2 - r)$, ossia dividendo l' Equazione per quattro; $2n - 1 = p^2 - p + q^2 - q + r^2 - r$. Ma $p^2 - p$ non può essere che un numero pari, e pari egualmente i numeri $q^2 - q$, $r^2 - r$, mentre $2n - 1$ è necessariamente un numero dispari. Dunque non può verificarsi che i numeri della formola $2^3n - 1$ siano spezzabili in tre soli quadrati.

Le tre serie competenti alle tre formole de' numeri dispari sopra esposti si dispongano nella maniera seguente

2.ª		3				11				19				27				35				43			... $2^3n - 5$
1.ª	1		5		9		13		17		21		25		29		33		37		41		45		... $2^2n - 3$
3.ª				7				15				23				31				39				47	... $2^3n - 1$

Nella disposizione figurata data a queste tre serie si cominci dal primo termine della prima, si salga al primo della seconda, si ritorni al secondo della prima, e si discenda sin al primo della terza, coll' istess' ordine prendendo il terzo della prima, il secondo della seconda, il quarto della prima; e il secondo della terza, e così di mano in mano andando avanti nei quattro numeri successivi delle tre serie, si viene a formare la serie; 1.3.5.7.9.11.13.15 ec., cioè la serie di tutti i numeri dispari, che si è fatto vedere essere o quadrati, o spezzabili in due, o in tre, o al più in quattro quadrati. Ciò però non esclude che alcuni di questi numeri dispari non si possano spezzare in cinque, in sei ec. quadrati, ma sempre, o quei cinque, o quei sei quadrati che formano un tal numero, potranno essere ridotti al più a quattro quadrati, formanti in somma lo stesso numero.

Dai numeri dispari facendo transito ai numeri pari-dispari; questi restan tutti compresi nella formola $2^2n - 2$; dalla qual risulta la serie; 2 . 6 . 10 . 14 . 18 . 22 . 26 ec., fuor di questi non ve n' ha alcuno, e son tutti spezzabili, compreso il zero in tre quadrati, due dispari, e un pari, non potendo essere uguali a tre quadrati pari, e molto meno, a un dispari, e due pari, o a tre dispari, come chiaramente si vede. Soggiungo ora la serie corrispondente pei termini della superiore a tali spezzature

0 . 4 . 0 . 4 . 16 . 4 . 16 . 4 . 16 . 4 . 16 . ec.
1 . 1 . 1 . 1 . 1 . 9 . 9 . 25 . 9 . 25 . 25 .
1 . 1 . 9 . 9 . 1 . 9 . 1 . 1 . 9 . 9 . 1 .

nella quale ripeteremo la consueta riflessione fatta altre volte, che molti numeri dell'anzidetta serie ammetteranno diverse spezzature, ma sempre colla legge di due quadrati dispari, e un pari, compreso qualche volta il zero.

Restano da considerarsi i numeri pari-pari, i quali divideremo in due classi. Nella prima porremo quelli che son divisibili sol per quattro, lasciando per quoziente un numero dispari, nella seconda, quei che possano essere divisi per 2^{2+m}, ove m sia qualunque numero intero. Quei della prima classe si vede evidentemente che possono essere spezzabili al più in quattro quadrati. Imperciocchè essendo un numero dispari il quoziente di tai numeri dopo la divisione per quattro, ed avendo noi fatto vedere che tutti i numeri dispari sono al più spezzabili in quattro quadrati, poichè il moltiplicator quattro di questi quadrati, è esso pure un quadrato, risulteran quadrati anche i prodotti del quattro, in ciascun dei suddetti quadrati, onde non potrà dubitarsi che non ammettano tai numeri, pari-pari, la accennata spezzatura, che sarà al più di quattro quadrati pari.

Quest' istessi numeri, i quali dopo la divisione per quattro, lasciano un quoziente che è numero dispari, possono anche tutti essere spezzati in quattro quadrati dispari, non ammettendo alcun assurdo l' Equazione $2^3 n - 2^2 = 2^2 p^2 - 2^2 p + 1 + 2^2 q^2 - 2^2 q + 1 + 2^2 r^2 - 2^2 r + 1 + 2^2 t^2 - 2^2 t + 1$, nella quale come è chiaro il primo membro è la formola comprendente tutti i numeri pari-pari che nascono dal prodotto per quattro di tutti i numeri dispari. Nell'Equazione superiore trasportate le quattro unità del secondo al primo membro, risulta $2^3 n - 2^2 = 2^2 p^2 - 2^2 p + 2^2 q^2 - 2^2 q + 2^2 r^2 - 2^2 r + 2^2 t^2 - 2^2 t$ ovvero, $2n - 2^2 = p^2 - p + q^2 - q + r^2 - r + t^2 - t$. che non porta ad alcun assurdo, perchè i termini nel secondo membro forman tre coppie necessariamente pari. La serie de' numeri pari che appartengono alla formola $2^3 n - 2^2$ è la seguente; 4.12.20.28.36.44.52.60.68 ec., ec., e la serie della spezzatura secondo l'ordine de' suddetti numeri è questa

1 . 9 . 9 . 9 . 9 . 25 . 25 . 25 . 25 . 25 . ec.
1 . 1 . 9 . 9 . 9 . 9 . 9 . 25 . 25 . 25 .
1 . 1 . 1 . 9 . 9 . 9 . 9 . 1 . 9 . 9 .
1 . 1 . 1 . 1 . 9 . 1 . 9 . 1 . 1 . 9 .

La serie de' numeri della seconda classe, i quali restan tutti compresi nella formola $2^{2+m} \times \overline{2n-1}$ è quella di tutti gli altri numeri pari possibili. Ora la parte m dell' esponente $2+m$ è un numero dispari, o un pari: se pari 2^{2+m} è sicuramente un quadrato: se dispari, il doppio d' un quadrato. Quando m è pari, la formola $2n-1$ essendo un numero dispari, potrà ciascun di questi numeri essere spezzato al più in quattro quadrati, onde anche i numeri $2^{2+m}.\overline{2n-1}$ riceveranno tale spezzatura, che sarà determinata dalla appartenenza del numero dispari $2n-1$ all' una, o all'altra delle superiori formole da noi notate per i numeri dispari. Oltre questa può avere anche l' altra spettante al numero dispari moltiplicato per quattro. Perchè essendo $2^{2+m}.\overline{2n-1}$ uguale $2^m.4.\overline{2n-1}$, potendosi il numero $4.\overline{2n-1}$ spezzare in quattro quadrati dispari, poichè 2^m è quadrato, si avranno colla moltiplicazione, anche quattro nuovi quadrati pari nei quali potranno essere spezzati quei medesimi numeri.

Se poi m è numero dispari si potrà sempre cangiare $2^{2+m}.\overline{2-1}$ in quest' altra maniera $2^{2f}.2.\overline{2n-1}$. Ma $2.\overline{2n-1}$ rappresenta tutti i numeri pari-dispari, i quali si è veduto sopra, che sono spezzabili in tre quadrati. Quindi concluderemo che tutti i numeri che può dar la formola $2^{2+m}.\overline{2n-1}$ ove m sia dispari saranno spezzabili in tre quadrati.

I numeri della formola 2^3n-1, non essendo spezzabili che in quattro quadrati, se moltiplicheremo la formola per 2^{2+m}, onde nasca $2^{2+m}.(2^3n-1)$, se l'esponente m sarà dispari, equivalerà alla formola $2^{2f}.2.(2^3n-1)$, e siccome i numeri $2\,(2^3n-1)$ son pari-dispari e perciò spezzabili in tre quadrati, essendo pure 2^{2f}

qua-

quadrato, anche quelli della formola $2^{2+m}.(2^3n-1)$ potranno essere spezzati in tre quadrati. Ma se m è numero pari, il moltiplicatore 2^{2+m} è un quadrato e 2^3n-1 abbraccia i numeri che vogliono la spezzatura di quattro quadrati; a tale spezzatura saran pur soggetti, quei della formola $2^{2+m}.(2^3n-1)$. Altri quattro quadrati pure degl' istessi numeri si possono avere, cangiando prima la formola equivalentemente così $2^m.4.\overline{2^3n-1}$, ove i numeri $4.\overline{2^3n-1}$ divisi per quattro, lasciano un numero dispari di quoziente, e però divisibile, in quattro quadrati dispari, onde ciascun d' essi moltiplicato, per 2^m che è pur quadrato, ci risulteranno altri quadrati diversi dai precedenti. Con una sol formola perciò noi potremo raccogliere tutti quei numeri, i quali nè son quadrati, nè spezzabili, o in due, o in tre quadrati, e non ricevono che la spezzatura di quattro. Questa è la formola $2^{2m-2}.\overline{2^3n-1}$, nella quale se $m=1$ si ha la serie dei numeri dispari 7.15 23. ec., e se m è qualunque altro numero, i quattro quadrati che risultano, sono i quattro pari sopra mentovati. Tutti gli altri numeri che si sottraggono da quest' ultima formola, o son quadrati, o ammettono la spezzatura di due o di tre quadrati.

Suppongasi per esempio che un Generale avendo nella sua armata 41500 soldati, gli fosse opportuno, di dividerla in tre Battaglioni o falangi quadrate, e chiedesse ai suoi ingegneri le diverse maniere di ottenerle, per iscegliere quella che fosse più al caso per le sue viste Militari. L' ingegnere interrogato, prima di tutto divide quante volte può il numero per quattro, e per il presente trova che basta una sola divisione e ne trae il quoziente 10375. Avanti di rintracciare questi quadrati cerca se il quesito è possibile, e sottomette il quoziente alla formola che esige i quattro quadrati. Per tal modo instituisce l' Equazione $2^3n-1=10375$ ovvero $2^3n=10376$. Ma poichè 10376, è divisibile per otto, cade questo numero sotto la necessaria spezzatura dei quattro quadrati, e non può perciò il proposto numero de' soldati essere diviso in tre battaglioni quadrati.

Un altro Generale che ha 35000 uomini sotto il suo comando do fa la stessa interrogazione, per le tre falangi al suo ingegnere, e questi riflettendo, che tal numero di soldati diviso per otto lascia un quoziente dispari, equivalendo esso a 4.2.4375, poichè 4 è quadrato, e il numero 2.4375 è pari-dispari conosce subito essere possibili i tre richiesti Battaglioni quadrati, le fronti dei quali devono essere, due un numero pari dispari, e la terza un numero pari-pari. Si mette poi a cercare in quante maniere si possa spezzare il numero 2.4375, in tre quadrati; ed avendo sotto gli occhj la serie de' quadrati dei numeri naturali che si trovano registrati in più libri d' aritmetica, e d' algebra, va a cercare il massimo quadrato dispari, prossimamente minore a questo numero; sottrae da esso tal quadrato, e cerca se il residuo si possa spezzare in due, un dispari, ed un pari. Caso che no prende in mano l'altro quadrato dispari prossimamente minore del primo, ripete la stessa operazione, e la stessa indagine andando avanti sin che il residuo della sottrazione diventa maggiore della metà del numero 2.4375; e quando in tutti questi residui ritrovati si verifichi la condizione, che siano uguali alla somma di altri due quadrati, può notare tutte le diverse spezzature. Ma poichè i quadrati massimi potrebbero anche esser pari, assunto quel quadrato pari che è prossimamente minore del numero 2.4375, cerca il residuo ed esamina se questo sia divisibile in due quadrati dispari, che gli darebbero la prima combinazione. In caso contrario coi quadrati pari prossimamente minori l'uno all'altro, va tentando, e notando i felici esiti sin che arriva a un residuo maggiore della unità del numero di cui cerca la spezzatura in tre quadrati, e la sua indagine resta espleta. Nel caso nostro tra le spezzature opportune, troverebbe anche le seguenti, nelle quali non facciam che indicare il numero de' soldati che devono essere posti alla fronte di questi Battaglioni, cioè non notiamo che le radici di questi quadrati.

186	178	166	150	158	134	130	ec.
20	54	62	50	6	130	90	
2	20	60	100	100	12	100	

Esaurita questa Teoria dei numeri intieri, e fatto vedere non

non v' essere alcun numero, che non essendo di per se quadrato non possa spezzarsi o in due, o in tre, o in quattro quadrati, non sarà molto difficile la soluzione di questo problema.

Dato qualunque numero, ritrovare un quadrato, che moltiplicato per quel numero faccia un prodotto uguale a qual si voglia numero di quadrati. La soluzione di questo problema non è sempre possibile, e farem vedere quali sono le condizioni del dato numero, che ne rendono possibile la soluzione.

Alla soluzione di questo problema generale ci faranno strada i problemi subalterni, e più semplici, il primo de' quali è il seguente: dato un numero, trovare un quadrato, che moltiplicato per quel numero, formi un prodotto eguale a due quadrati. Cercheremo innanzi a tutto quale condizione è necessario che si verifichi in tal prodotto, affinchè rendasi possibile il problema. Suppongo, con tutta la generalità, espresse così le radici de' due ricercati quadrati; la prima, $mp + nq$; e la seconda $mq - np$; nelle quali dando gli opportuni valori, ai quattro simboli m, n, p, q, potrò sempre avere due qualunque numeri intieri, un maggiore, e l' altro minore, essendo anche intieri i simboli componenti le suddette formole. Considerate queste come radici dei due quadrati, uguali a un dato numero, la somma di questi due quadrati ci dà il risultato $\overline{m^2 + n^2} \,.\, \overline{p^2 + q^2}$, il quale mostra la forma che deve avere questo numero affinchè sia possibile la sua spezzatura in due quadrati. Deve perciò tal numero, essere divisibile in due fattori ciascun de' quali possa essere spezzato in due quadrati. Ma siccome anche il zero può entrare nel numero di questi quadrati, fatto per esempio $q = 0$, il risultato si cangia in $\overline{m^2 + n^2} \,.\, p^2$ che dà effettivamente due quadrati. Laonde per il primo problema proposto, di trovare, dato un numero, un quadrato che moltiplicato per il numero equivalga alla somma di due quadrati, potendo rappresentare con $p^2 + q^2$ il quadrato richiesto, e con $m^2 + n^2$ il dato numero, si rende necessario fuor del caso di $q = 0$, che il quadrato che si cerca possa essere spezzabile in due quadrati, e così fuor del caso di $n = 0$ è pur necessario che anche il numero proposto possa spezzarsi in due quadrati.

La conseguenza di questo discorso è che trovandosi nella serie dei quadrati alcuni di essi spezzabili in due quadrati, e molti altri non spezzabili che in tre, per esempio $p^2+q^2+r^2$, avremo bensì i due quadrati ricercati dal problema, sostituendo invece dei tre $p^2+q^2+r^2$ l' unico quadrato a cui essi sono uguali; ma non potremo aver nuove coppie di quadrati, ove si voglia fare entrare in essi i simboli p, q, r. Al contrario poi se il quadrato ricercato può essere spezzabile in altri due come p^2+q^2, non solo abbiamo i due quadrati dell' eguaglianza, quando si sostituisce in vece di p^2+q^2 il quadrato unico che loro è uguale, ma ci nascono altri quadrati, che traggono la loro origine da p e da q, che son le radici dei primi. Poichè m^2+n^2 vien da noi considerato come il dato numero, si fa evidente, che se questo non fosse spezzabile che in tre quadrati, e non in due, il problema sarebbe impossibile. Egli è dunque necessario per questo nostro problema che il dato numero o sia quadrato, o spezzabile in due quadrati. Sarà qulche volta facile il conoscere a un tratto che il dato numero è divisibile per 3, o per 7 o per 11, che si sa non esser numeri spezzabili in due quadrati, onde in tal caso se il numero è di molte figure, siam liberati dalla pena del fastidioso metodo di cercare i quadrati prossimi, e possiam decidere sul momento l' impossibilità del problema.

Ciò premesso il problema de' due quadrati, chiamato K il numero dato, si presenta algebraicamente con questa forma, $Kn^2=p^2+q^2$, nella quale sono incogniti i simboli, n, p, q; e perchè K deve ammettere la sua spezzatura in due quadrati, chiameremo questi due quadrati noti, a^2, b^2, e sarà cangiata la formola in quest' altra $a^2n^2+b^2n^2=p^2+q^2$ che disporremo pure in quest' altro modo, $a^2n^2-q^2=p^2-b^2n^2$. L' artifizio semplice di cui mi valgo, per la soluzione di questo problema, insieme con altri che verranno consecutivamente, consiste nel ridurre a rettangoli i binomj che sono in ambi i membri, introducendo de' nuovi simboli arbitrarj per la riduzione di tali membri ad eguali rettangoli. Esprimiamo pertanto il primo membro

a^2n^2

$a^2n^2 - q^2$ in quest' altra maniera equivalente $\left(\frac{an-q}{g}\right)\overline{gan + gq}$; ed espresso similmente l' altro membro con $\left(\frac{p-bn}{f}\right)\overline{fp-fbn}$, si ha l' Equazione $\left(\frac{an-q}{g}\right).\overline{gan + gq} = \left(\frac{p-bn}{f}\right)\overline{fp-fbn}$, nella quale considerate come basi dei due rettangoli le espressioni $\frac{an-q}{g}$, $\frac{p-bn}{f}$ e come lati le rimanenti, si devono instituire due altre equazioni, la prima che nasce dal fare uguali le basi, la seconda dal fare i lati uguali. Col mezzo della prima troviamo $p = \frac{fan+gbn-fq}{g}$, che fa essere il lato $fp + fbn = \frac{b^2an-2fgbn-f^2q}{g}$ e facendo questo lato uguale a quello del rettangolo, nel secondo membro ci si presenta l' equazione $\frac{f^2an+2fgbn-f^2q}{g} = gan + gq$ ossia $f^2an + 2fgbn - f^2q = g^2an + g^2q$ che portando i termini del q da una parte e quelli dell' n dall' altra diventa $(f^2a + 2fgb - g^2a)n = (g^2 + b^2)q$. Essendo questa equazione di per se indeterminata, per ragion delle due variabili n, q, sarebbe in arbitrio del geometra, il dare a uno di questi simboli quel valore che più piacesse, rimanendo anche arbitrarj gli altri simboli f, g. Con ciò avrebbersi, generalmente parlando, dei quadrati frazionarj, che scioglierebbero il problema; ma siccome noi ci proponiamo dei numeri interi, li avremo sempre se faremo q uguale al coefficiente di n, e n uguale al coefficiente di q, purchè ad a, f, g, non si dian che valori di numeri interi. Per tal modo ci risulta $n = f^2 + g^2$, $q = f^2a + 2fgb - g^2a = (f^2 - g^2)a + 2fgb$, e sostituendo questi valori nel valore di p nasce $p = (g^2 - f^2)b + 2fga$. Rifletteremo qui, che il primo membro dell' equazione $Kn^2 = p^2 + q^2$, dopo il trovato valore di n, diventando equivalentemente $(a^2 + b^2) . (f^2 + g^2)^2$, abbiamo infinite coppie di quadrati, se diamo ai simboli f, g, qualunque valore di numero intero, e oltre questi anche gli altri infiniti

 qua-

quadrati, che vengono formati, colle radici espresse dai valori di p, q sopra trovati; e oltrecciò, dal calcolo che abbiamo fatto risulta, che per avere questi ultimi infiniti quadrati, la radice n del primo vuol essere posta eguale alla somma di due quadrati. Noterem finalmente che se il dato numero K non riceve altra spezzatura che quella di tre quadrati come se fosse $a^2+b^2+c^2$, il Problema riesce impossibile, e che è necessario o che K sia per se quadrato, o almeno spezzabile in due quadrati: e nella supposizione che K sia quadrato, come a^2, potremo nelle nostre formole far $b=0$, ed esse si cangieranno nelle seguenti $n=f^2+g^2$, $p=2fga$, $q=(f^2-g^2)a$, dove fatto anche $a=1$ risultano le stesse formole che si trovano in quasi tutti i libri elementari di algebra, sulla proprietà che devono avere tre numeri, affinchè il quadrato d' un d' essi uguagli quello degli altri due, proprietà, che nella linea, appartiene al triangolo rettangolo.

L' ordine naturale nella serie de' problemi simili al precedente, ci porta alla proposizione di quest' altro; Dato un numero, trovare un quadrato, che moltiplicato per quel numero sia uguale a tre quadrati; il qual problema algebraicamente presentato, somministra l' Equazione $Kn^2=p^2+q^2+r^2$; essendo K il dato numero. Ora o esso numero K è pari-pari, o pari-dispari, o dispari. Se è pari-pari, qualunque sia il quadrato moltiplicatore, non potrà il prodotto essere uguale, che a tre quadrati pari; in conseguenza, potran sempre dividersi i termini dell' Equazione per quattro, e questa divisione andrà tante volte replicata, quante volte i quozienti di K diviso per 4,16,64, ec. sian pari-pari; finalmente ci ridurremo per necessità, o a un ultimo quoziente pari-dispari, o a un ultimo quoziente dispari. Così il quadrato moltiplicator di K, non può essere che un numero pari-pari, o un dispari; e nel caso del pari-pari, torna in campo lo stesso discorso, che non può essere il mentovato prodotto, se non che uguale a tre quadrati pari. Dal che risulta, che il nostro problema si riduce a uno di questi due; dato un numero K pari-dispari, trovare un quadrato dispari che moltiplicato per esso numero, dia un prodotto uguale a tre quadrati; o sia a

quest'

quest' altro ; dato un numero dispari, trovare un quadrato dispari, che moltiplicato per tal numero dia un prodotto uguale a tre quadrati . Considero quest' ultimo caso, e mi accingo a dimostrare che se il dato numero K non è spezzabile nè in due , nè in tre quadrati , ma soltanto in quattro , il problema è impossibile . Abbiamo sopra fatto vedere che fuor dei numeri compresi sotto la formola 2^3n-1 , i quali soli non son spezzabili nè in due , nè in tre quadrati, tutti gli altri dispari lo sono ; ecco pertanto , la dimostrazione della impossibilità del problema, nel caso che K sia un di quei numeri , compresi dalla formola 2^3n-1. La espressione algebraica del problema è $Kn^2=p^2+q^2+r^2$; e poiche , sì K che n essendo numeri dispari, i quadrati p^2, q^2, r^2 non possono essere, che o tre dispari , o un dispari, e due pari fatto generalmente $K=2^3s-1$, $n=2m-1$, $p=2t-1$, $q=2u-1$, $r=2y-1$, l'Equazione diviene $2^5m^2s-2^5ms+2^3s-2^2m^2+2^2m-1 =2^2t^2-2^2t+1+2^2u^2-2^2u+1+2^2y^2-2^2y+1$; e portate le tre unità di questo nell' altro membro nasce $2^5m^2s-2^5ms+2^3s-2^2m^2+2^2m-4=4t^2-4t+4u^2-4u+4y^2-4y$, e divisa l' Equazione per quattro, $2^3m^2s-2^3ms+2.s-m^2+m-1=t^2-t+u^2-u+y^2-y$; ma il primo membro è necessariamente un numero dispari , perchè i tre termini primi son moltiplicati per 2, i due avanti l'ultimo sono necessariamente un numero pari , anche quando m si supponga dispari . e l' ultimo cioè l' unità è un dispari , mentre nell' altro membro ogni coppia t^2-t, u^2-u , y^2-y non può essere che un numero pari . Dunque è impossibile , che il suddetto sia uguale a tre quadrati dispari . Non può nemmen essere uguale a un quadrato dispari , e due pari ; imperciocchè , fatto $p=2t-1$ per il dispari , e $q=2u$, $r=2y$ per i due pari , l' Equazione diventa $2^5m^2s-2^5ms+2^3s-2^2m^2+2^2m-1=4t^2-4t+1+4u^2+4y^2$, e trasferita l' unità di quest' ultimo membro nel primo , abbiamo $2^5m^2s-2^5ms+2^3s-2^2m^2+2^2m-2=4t^2-4t+4u^2+4y^2$, ove si vede che il primo membro è necessariamente un numero pari-dispari mentre l' altro è un numero pari-pari ; e con ciò resta univer-

sal-

salmente dimostrata la impossibilità del problema, quando K sia un numero compreso dalla formola 2^3n-1.

Il caso del dato numero K pari-dispari, vien compreso nel problema di un numero K spezzabile, o in due, o in tre quadrati, perchè tutti i numeri pari-dispari, ammettono questa spezzatura, come abbiamo altrove veduto.

Dopo aver dimostrato essere impossibile la soluzione del problema espresso colla formola $Kn^2=p^2+q^2+r^2$, ove K non possa essere spezzato che in quattro quadrati, come avviene a tutti i numeri compresi nella formola $2^{2v-2}(2^3n-1)$, porremo in generale la seguente formola che il rende possibile, $(a^2+b^2+c^2)n^2=p^2+q^2+r^2$. Lasciando la differenza di due quadrati nel primo membro, e collocate le altre differenze di altri due quadrati nel secondo, seguendo un ordine simile per le traslazioni di tai quadrati, a quello da noi praticato nel precedente problema, daremo alla formola questo nuovo aspetto; $a^2n^2-r^2=q^2-b^2n^2+p^2-c^2n^2$, o ridotte queste differenze a rettangoli $(an-r)(an+r)=(q-bn)(q+bn)+(p-cn)(p+cn)$; i quai rettangoli, all' introduzione dei simboli arbitrarj, equivalgono ai seguenti; $\frac{(an-r)}{h}(han+hr)=\frac{(g-bn)}{f}(fq+fbn)+\frac{(p-cn)}{g}(gp+gcn)$. Quì pure, come nell' altro problema, prese per basi le parti frazionarie di questi rettangoli, le faremo tra loro uguali, confrontando l' una e l' altra base del secondo membro, coll' unica base del primo. Con ciò, principiando il confronto colla prima base del secondo membro, abbiam l' Equazione $\frac{g-bn}{f}=\frac{an-r}{h}$, onde nasce $g=\frac{fan+hbn+fr}{h}$; e colla sostituzione del valore di g nell' espressione del lato corrispondente alla base assunta nel secondo membro, ci risulta $fg+fbn=\frac{f^2an-f^2r+2fhbn}{h}$ (1°). Il confronto della rimanente base colla prima, ci dà quest' altra Equazione, $\frac{p-cn}{g}=\frac{an-r}{h}$, onde si trae $p=\frac{gan+hcn-gr}{h}$, e coll' uso di tal valore nella formola $gp+gcn$, ci nasce il lato del secondo

ret-

rettangolo uguale $\frac{g^2an-g^2r+2ghcn}{h}$ (2°). Ora perchè valga l'Equazione che fa essere un rettangolo uguale alla somma di due, poichè in tutti essi le basi sono uguali, fa d' uopo che la somma dei lati dei due rettangoli del secondo membro, sia uguale all' unico lato, del rettangolo del primo; unite pertanto le due espressioni (1°), (2°), risulta la nuova equazione $f^2an-f^2r+2fhbn+g^2an-g^2r+2ghcn=h^2an+h^2r$ ovvero $(f^2+g^2-h^2)an+2fhbn+2ghcn=(b^2+g^2+h^2)r$. Non cercando noi per il nostro problema che i numeri interi, faremo uguale a n, il coefficiente di r, ed uguale a r il coefficiente di n; e con ciò avremo $n=b^2+g^2+h^2$; $r=(f^2+g^2+h^2)a+2fhb+2ghc$; e finalmente colle sostituzioni di tai valori in quelli di q, e di p sarà $q=(-f^2+g^2+h^2)b+2fha-2fgc$; $p=(f^2-g^2+h^2)c+2gha-2fgb$. Se K non fosse spezzabile che in due quadrati, basta far zero un dei tre simboli, a, b, c, e abbiamo i valori modificati a questa ipotesi. Se il numero dato K oltre essere spezzabile o in due o in tre quadrati è anch' esso quadrato, si potranno annullar due quadrati della generale espressione, come b^2, c^2, e le formole soffriranno quel cangiamento che spetta a tale ipotesi. Finalmente, se si vuol sciolto il problema, trovare un quadrato uguale a tre quadrati; fatto b, c uguale a zero, e $a=1$, avremo $n=f^2+g^2+h^2$; $p=2gh$. $q=2fh$ $r=f^2+g^2-h^2$, e dati ai simboli f, g, h, tutti i valori interi possibili, dei numeri naturali, avremo infiniti quadrati n^2 che saranno uguali a tre quadrati.

La soluzione di questo problema, dandoci $n=f^2+g^2+h^2$, inchiude la condizione, che la radice n del quadrato cercato debba essere uguale a tre numeri quadrati; il che potrebbe far credere, che fosse impossibile la sua soluzione in tutti quei quadrati n^2 che hanno per radice un numero non spezzabile che in quattro quadrati, mentre qualunque sia il quadrato n^2, nato da tali numeri, sempre il problema è solubile. Imperciocchè tutti i numeri non spezzabili che in quattro quadrati restando compresi nella formola $2^{2f-2}(2^3n-1)$, ommettendo il quadrato moltiplicatore

2^{2f-2}, e considerando solo i dispari espressi da 2^3n-1, prendiamo il doppio di questi numeri, che ci viene somministrato dalla formola 2^4n-2, la quale come si è notato superiormente, non contiene che numeri spezzabili in tre quadrati, due dispari, e un pari. Ora se daremo ai tre simboli arbitrarj f, g, h del nostro problema dei tre quadrati i valori di due quadrati dispari e un pari, spezzeremo il quadrato del doppio del numero che non può essere spezzato che in quattro quadrati in tre soli quadrati, e tutti pari. Dunque divisi per quattro tutti questi quadrati, avremo anche i tre quadrati uguali al quadrato, la cui radice non si spezza che in quattro quadrati. Per esempio nella formola generale dei tre quadrati, fatto $f=3$, $g=2$, $h=1$, diventa $n=14$, che è il doppio del numero 7 non spezzabile che in quattro quadrati. Sostituiti questi valori nelle nostre formole, abbiamo $n=14$, $p=6c+4a-12b$; $q=-4b+6a-12c$; $r=12a+6b+4c$; e prese le metà di tutte queste radici avremo $n=7$, $p=3c+2a-6b$; $q=-2b+3a-6c$; $r=6a+3b+2c$; e conseguentemente sarà $(a^2+b^2+c^2)49$ uguale ai tre quadrati che nascono dai valori di p, q, r; e lo stesso avverrà se faremo in generale due dei nume- f, g, h dispari, e l' altro pari; prendendo questi numeri dispari nelle radici di quei quadrati nei quali si spezzano i numeri della formola 2^4n-2, e lo stesso dicendo della radice corrispondente del quadrato pari. Tre classi pertanto di quadrati abbiamo che ci danno sciolto il problema dei tre quadrati. La prima rende possibile la soluzione qualunque sia il quadrato n^2, perchè $a^2n^2+b^2n^2+c^2n^2$ costituiscono tre quadrati, e per questa non può essere zero alcun dei simboli a, b, c; la seconda ci vien data dalle nostre formole, per tutti quei quadrati n^2 la cui radice n è spezzabile in tre quadrati potendo essere uguale a zero, o uno, o anche due dei simboli a, b, c. La terza classe poi, pur data dalle nostre formole, è quella di quei tre quadrati pari che risultano uguali $(a^2+b^2+c^2)n^2$; i quali divisi per quattro fanno essere la radice n spezzabile solamente in quattro quadrati.

Poichè si è stabilito che qualunque numero intiero è spezzazabile al più in quattro quadrati, qualunque sia il numero dato K non vi sarà alcun caso in cui si renda impossibile la soluzione di questo problema: Dato un numero K, trovare un quadrato che moltiplicato per quel numero, faccia un prodotto uguale a quattro quadrati. L' espressione analitica generale di questo problema è la seguente; $(a^2+b^2+c^2+d^2)\,n^2 = p^2+q^2+r^2+t^2$, nella quale, o uno, o due, o tre di quei quattro quadrati dati, posson essere uguali a zero. Richiamando alla mente, lo stesso artifizio da noi adoperato ne' superiori problemi, trasformeremo, colla introduzione dei simboli arbitrarj, la nostra Equazione così; $\frac{(an-t)}{i}(ian+it) = \frac{(r-bn)}{f}(fr+fbn) + \frac{(q-cn)}{g}(gq+gcn) + \frac{(p-dn)}{h}(hp-hdn)$. Le parti frazionarie di questi prodotti siano le basi uguali dei quattro rettangoli, e le parti intere i loro lati. Ciascuna base del secondo membro si faccia uguale alla base del primo, e ci nascono le Equazioni $r = \frac{fan-ft+ibn}{i}$, $q = \frac{gan-gt+icn}{i}$; $p = \frac{han-ht+idn}{i}$; di quì nasce il lato appartenente al primo rettangolo del secondo membro uguale a $\frac{f^2an-f^2t+2fibn}{i}$; il lato appartenente a quello che gli tien dietro uguale $\frac{g^2an-g^2t+2gicn}{i}$; e il terzo lato del terzo rettangolo uguale $\frac{h^2an-h^2t+2hidn}{i}$. E dovendo essere la somma di questi tre lati, uguale al lato del rettangolo del primo membro $ian+it$, abbiamo l' Equazione $(f^2+g^2+h^2-i^2)an+2in(fb+gc+hd) = (f^2+g^2+h^2+i^2)t$. Quindi fatto il coefficiente di t uguale ad n, e il coefficiente di n uguale a t, abbiamo $n = b^2+g^2+h^2+i^2$; $t = (f^2+g^2+h^2-i^2)a+2i(fb+gc-hd)$; e colla sostituzione di tai valori in quello, dei rimanenti simboli r, q, p, si ottiene $r = (g^2+h^2+i^2-f^2)b+2f(ia-gc-hd)$; $q = (f^2+h^2+i^2-g^2)c+2g(ia-fb-hd)$; $p = (f^2+g^2+i^2-h^2)d+2h(ia-fb-gc)$.

Se il numero dato K è solo spezzabile in tre quadrati, basterà annullare uno dei simboli a, b, c, d, nelle nostre formole; due se K non è spezzabile che in due quadrati, e finalmente tre se esso è un quadrato. Supposti pertanto b, c, d, uguali a zero, e $a=1$, resta sciolto il problema di trovare un quadrato uguale a quattro quadrati; e diventa $n=f^2+g^2+h^2+i^2$; $p=2hi$; $q=2gi$; $r=2fi$; $t=f^2+g^2+h^2-i^2$.

Venendo in questo problema il simbolo n, espresso con quattro quadrati, non si dee credere, che i quadrati i quali hanno la radice componibile, o con due, o con tre soli quadrati, non possano mai rappresentare il nostro simbolo n, e rendano, in conseguenza, quei numeri fuori delle nostre formole, perchè tra i valori arbitrarj che dar si potranno ai quattro simboli f, g, h, i, vi saran sempre quelli che costituiscono il doppio del valore di n, che supponesi non spezzabile in quattro quadrati. In tal maniera, con tale determinazione di valori si avranno quattro quadrati pari uguali al quadrato del doppio di quella radice, e conseguentemente divisi tutti questi quadrati per quattro, si avranno anche i quattro quadrati che corrispondono a quello di n non spezzabile, che in due, o in tre quadrati, e qualche volta quando il permettano i valori, e il numero de' noti simboli a, b, c, d, coll' annullamento di alcuno dei simboli arbitrarj f, g, h, i, si potranno presentare i quattro quadrati, non ostante che la radice n non accetti la spezzatura di quattro quadrati.

Posto che le nostre formole per i quattro quadrati sono state disposte in modo, da rendere con poca riflessione conoscibile la legge, che dee valere per gli ulteriori problemi, simili ai precedenti nei quali si domandassero prodotti di quadrati in dato numero uguali a cinque, sei, o qualunque numero di quadrati credo opportuno di notar quì le superiori formole per i due e i tre quadrati, con un ordine analogo a quello, che per i quattro abbiam sopra osservato.

Per il problema dei due quadrati espresso coll' equazione; $(a^2+b^2)n^2=p^2+q^2$, si è trovato; $n=f^2+g^2$; $q=(f^2-g^2)a+2fgb$; $p=(g^2-f^2)b+2fga$.

Or-

Ordinate in simil maniera le formole del problema dei tre quadrati, abbiamo $n = f^2 + g^2 + h^2$; $r = (f^2 + g^2 - h^2)a + 2h(fb + gc)$; $q = (g^2 + h^2 - f^2)b + 2f(ha - gc)$; $p = (f^2 + h^2 - g^2)c + 2g(ha - fb)$.

Se si considera l' andamento delle formole, per i nostri tre problemi si vede che il valore di n è sempre uguale alla somma del numero de' quadrati proposti dal problema. Rapporto agli altri simboli convien distinguere, dagli altri, quello che unicamente si trasporta dal secondo membro al primo dell' Equazione, che per noi è sempre l'ultimo nell' ordine alfabetico n, p, q, r, t ec. Il valore di quest' ultimo trasportato ha per primo termine il numero stesso dei quadrati che ha n; ma rendendosi negativo il quadrato del simbolo arbitrario, che compete alla base del rettangolo unico che è nel primo membro dell' Equazione, e questo aggregato di quadrati resta moltiplicato in a; onde per il problema dei due quadrati, essendo q l' ultimo simbolo cui compete il simbolo arbitrario g, sarà il primo termine del valore di q, $(f^2 - g^2)a$. Per il problema dei tre quadrati, l' ultimo simbolo in ordine essendo r, cui compete l' arbitrario h, sarà il primo termine del valore di r uguale $(f^2 + g^2 - h^2)a$; e per l'altro dei quattro quadrati dove t è l'ultimo termine cui spetta l'arbitrario simbolo i, sarà questo primo termine del valore di t uguale, $(f^2 + g^2 + h^2 - i^2)a$. Il secondo termine poi del valore dell' unico trasportato nel primo membro è sempre uguale al doppio del suo simbolo arbitrario, corrispondente, moltiplicato nella somma dei prodotti del penultimo nel suo simbolo, dell' antipenultimo nel suo fino al totale esaurimento dei simboli che sono nel secondo membro. Il perchè nel problema dei due quadrati, il secondo termine del valore di q sarà $2g \cdot fb$. In quello dei tre quadrati, il secondo termine del valore di r sarà $2h(fb + gc)$; e in quello dei quattro quadrati, il secondo termine del valore di t sarà $2i(fb + gc + hd)$.

Passando ora al valore di quei simboli, che non sono stati trasportati nel primo membro, cominciando dal penultimo. il suo valore sarà sempre composto di due termini, il primo de' quali sarà l' aggregato dei quadrati ai quali è uguale n, colla differen-

 za,

za, che sia negativo, il quadrato del simbolo competente, a questo penultimo termine, che è sempre f^2 moltiplicandosi poi questo aggregato in b; il secondo termine poi di questo simbolo penultimo, sarà il prodotto di $2f$, nella differenza del prodotto di a nel suo simbolo competente, e la somma dei prodotti di b, c, ec. nei loro simboli corrispondenti, escluso sempre il prodotto fb. Così il valore dell' antipenultimo, cui compete c e il simbolo g, avrà per primo termine l' aggregato dei quadrati suddetti, dove sarà g^2 negativo, colla moltiplicazione di questo aggregato per c; e per secondo termine $2g$ moltiplicato nella differenza del prodotto di a nell' ultimo simbolo ad esso competente, e della somma degli altri prodotti consimili escluso il prodotto ge. Si osservi poi la stessa legge nei seguenti valori delle radici dei quadrati cercati, e sarà data per ciascun d'essi la conveniente espressione.

Non sarà pertanto difficile, al caso che si proponga, dato un numero, trovare un quadrato che moltiplicato per quel numero sia uguale a cinque quadrati, perchè la legge sopra mentovata, non ci abbandona qualunque sia il numero dei quadrati cercati.

Risolvendo con tutta la generalità questo problema, e fatto K uguale a cinque quadrati dati, avremo la seguente Equazione $(a^2+b^2+c^2+d^2+e^2)n^2=p^2+q^2+r^2+t^2+u^2$, e i simboli arbitrarj essendo f, g, h, i, l, assegneremo quest' ultimo simbolo l, all' ultimo simbolo u, che resta trasportato nel primo membro, mantenendo, gl' istessi simboli f, g, h, i, agli altri, b, c, d, e competenti, come porta l' ordine osservato, nei precedenti problemi. Per tal modo, l' analogia, che ci somministrano le espressioni dei problemi superiori, ci serve di guida, per presentare con giustezza i valori de' simboli per questo nuovo problema de' cinque quadrati. Sarà dunque

$$n=f^2+g^2+h^2+i^2+l^2;\ u=(f^2+g^2+h^2+i^2-l^2)a+2l(fb+gc+hd+ie);$$
$$t=(g^2+h^2+i^2+l^2-f^2)b+2f(la-gc-hd-ie);$$
$$r=(f^2+h^2+i^2+l^2-g^2)c+2g(la-fb-hd-ie);$$
$$q=(f^2+g^2+i^2+l^2-h^2)d+2h(la-fb-gc-ie);$$
$$p=(f^2+g^2+h^2+l^2-i^2)e+2i(la-fb-gc-hd).$$

Que-

Questo problema dei cinque quadrati ci somministra maggior numero di soluzioni dei precedenti, p rchè, sebbene qualunqu e numero può spezzarsi, compresi i zero, in quattro quadrati, non tutti si spezzano in quattro quadrati effettivi e non molti di quelli, che si possono spezzare in quattro, non ammettono la spezzatura in cinque quadrati. La prima classe pertanto delle soluzioni, ci vien data da quei numeri K che sono uguali a cinque quadrati, e qualunque sia il quadrato n^2 resta sciolto il problema. La seconda classe di soluzioni, si ha dalle nostre formole quando il numero K sia uguale a cinque quadrati, e poichè, molti numeri spezzabili in cinque quadrati possono ricevere anche la spezzatura in quattro; coll' annullamento di uno di quei cinque quadrati, e colla equivalenza del numero dei quattro a quello dei cinque, si otterrà una nuova classe di soluzioni, e così se il valore dei cinque fosse uguale al valore di tre o di due, per tutti questi casi, le formole assumendo quelle modificazioni che loro competono, in grazia di tali ipotesi, ci daranno altre serie di soluzione.

Il valore di n ci viene presentato dalle nostre formole, con cinque quadrati; ma siccome, non v' è numero che non possa essere presentato con numero di quadrati minore, così non potrà nascer dubbio, sulla verità delle formole, e sulla possibilità del problema dei cinque quadrati, quando a f, g, h i ec. si diano quei valori arbitrarj che più piace, e che non diminuiscono il numero dei quadrati ricercati.

Essendo lucida la legge colla quale procedono le nostre formole sarà in mano di qualunque algebrista, l' assegnare quelle che appartengono ai problemi dei sei, sette, ec. quadrati; onde potrem concludere, che da noi sia stato sciolto il problema generale, posto sino al principio; Dato un numero, trovare un quadrato, che moltiplicato per quel numero, sia uguale alla somma di qualsivoglia numero di quadrati.

OS-