APPENDICE

Di Gianfrancesco Malfatti

AL PROBLEMA DELLE PRESSIONI

Ricevuta il dì 9 Maggio 1805.

Dai Canoni del mio Tentativo sulle pressioni stampato nella Parte seconda del Tomo ottavo delle Memorie della Società Italiana delle Scienze risulta, ove considerava le pressioni che soffrono gli appoggj posti agli angoli d' un triangolo, da un peso collocato in qualche punto della sua aja; quando riducevami alla ipotesi del trasporto degli appoggj, e del peso in un sol lato di questo triangolo, onde si avesse un vette rettilineo di tre fulcri col peso posto tra due nella stessa retta; che modificando le generali formole alla supposizione di tal cangiamento, restano distribuite le pressioni nate dal peso ai soli due appoggj che ad esso più si avvicinano, dall' una, e dall' altra parte, restando senza pressione alcuna il terzo appoggio più lontano. Ora avendo io trovato per quel che sembra, una maniera di dimostrare direttamente la verità di tal proposizione, conducendo all'assurdo la distribuzione delle pressioni in tal caso a tutti e tre gli appoggj, ho creduto bene di aggiungere a quel mio scritto questa breve Memoria, la quale quando io mal non mi apponga nel mio raziocinio, presentando un perfetto consenso del teorema presente col risultato pei Canoni di quella mia ipotesi, può servire a darle una maggior forza di probabilità e renderla ai Geometri più accettevole e grata.

Sia il piano orizzontale, e triangolare posto su i tre appoggj, A, B, E (intendendo già che il piano sia rigido senza massa e senza gravità); e il peso situato in P. Per trovar le pressioni che si diramano ai punti A,B,E, faccio uso del metodo dei momenti dai meccanici con tutta l'evidenza dimostrato; e a tal uopo prendendo do per primo asse di rotazione il lato BE dello stesso triangolo, su d' esso faccio cadere le normali AC, PD; e chiamate le incognite pressioni, di A, x; di B, y; e di E, z, e inoltre fatta AC$=q$, PD $=p$, ho a un tratto la prima equazione dei momenti; $qx=\mathrm{P}d$, chiamato il peso P. Il nuovo asse di rotazione, a cui riferiamo le pressioni, sia l' istessa linea PD protratta indefinitamente, alla quale dal punto A si guida la AF parallela al lato opposto BE: denominata pertanto la BC $=a$, la CD $=b$ e la DE $=c$, poichè AF $=$ DC, i momenti delle pressioni rispetto a questo nuovo asse ci somministrano la seconda equazione $bx+y.\overline{a+b}=cz$; e poichè la somma delle tre pressioni dev' essere uguale al peso P, avrem pronta la terza equazione, $x+y+z=\mathrm{P}$. Essendo $x=\frac{\mathrm{P}d}{q}$, sostituito tal valore nella seconda equazione e nella terza, colla opportuna disposizione dei termini nasce; $\overline{a+b}.y-cz=\frac{-\mathrm{P}bd}{q}$; e poi $y+z=\frac{\mathrm{P}.\overline{q-d}}{q}$. Si adoperi presentemente in queste due equazioni il noto metodo della eliminazione, e si ha $z=\frac{\mathrm{P}.\overline{aq-ad+bq}}{q.\overline{a+b+c}}$; $y=\frac{\mathrm{P}.\overline{cq-cd-bd}}{q.\overline{a+b+c}}$, e queste sono le tre pressioni di valor cognito sostenute dagli appoggj A, B, E.

Assumo ora un' ipotesi, che siano mobili il peso P e l' appoggio A, e diriggano il loro movimento per le perpendicolari, PD, AC, cominciando con velocità proporzionali agli spazj da scorrersi, cioè proporzionali alle stesse perpendicolari, e colla legge di resistenze che incontrano alle stesse velocità proporzionali. Ognun vede che con tali dati devono arrivare il peso P e l'appoggio A nello stesso tempo al lato BE, dove restano affatto estinte le loro velocità, e per tal modo viene a formarsi un vette rettilineo a tre fulcri, col peso posto tra i due C, E: dal punto A per il peso P si conduca la linea AP, che prolungata incontra il lato BE in Q, e dentro l'angolo AQB si guidi a piacere una retta che seghi le normali AC, PD ne' punti O, p. Egli è chiaro che le porzioni Pp, AO, sono proporzionali alle intere normali DP, CA; siccome il son pure le residue Dp, CO, laonde quando nel movimento fatto colla la prescritta legge l'appoggio A sarà arrivato in quel punto O, il peso P avrà scorso con moto isocrono lo spazio Pp, e in tal situazione che per cagione del movimento progressivo si può considerar come variabile, dobbiam cercare quali siano le pressioni diramate dal peso P nella situazione di p, all' appoggio A nella situazione O, e agli altri appoggj immobili B, E. Ciò si ottiene facilmente conducendo da O una parallela a BE, che incontra la retta DF nel punto S. Quì pure, chiamata $OC = t$; poichè sta $AC : PD :: OC : pD$, sarà $q : d :: t : pD = \frac{dt}{q}$; onde presi per assi di rotazione gli stessi che prima, e le nuove pressioni in O, B, E chiamate x', y', z'; per la legge dei momenti, sarà $x't = \frac{Pdt}{q}$, ossia $x' = \frac{Pd}{q}$, e però la pressione in O è la stessa che la pressione in A. Rivolgendoci ora ai momenti riferiti al secondo asse di rotazione FD, avremo x' nella distanza OS, ossia $x'b + y'.\overline{a+b} = z'c$; ma $x'b = xb$, sarà pertanto $xb + y'.\overline{a+b} = z'c$, e poichè deve essere ancora $x' + y' + z' = p$, sarà anche $x + y' + z' = P$; e per mezzo delle due equazioni ritrovati i valori di y' e di z' si troveranno essi identici coi valori di y e di z. Il perchè in qualunque punto si trovino contemporaneamente, l'appoggio mobile A e il peso P, quando essi si muovono colla prescritta legge, le pressioni distribuite dal peso P al fulcro mobile, e ai fulcri immobili, resteranno sempre invariate, e conseguentemente anche quando saranno arrivati, A in C, P in D, non devono aver sofferto alcuna alterazione, ed ivi sta tutto in quiete.

Questa conseguenza a cui ci riduce il raziocinio ed il calcolo si dimostra facilmente assurda. Imperciocchè se noi supponiamo che l'appoggio mobile A sia collocato a maggior distanza dalla BE in H di quella che aveva in A, e si concepisca muoversi verso C con una velocità proporzionale alla distanza HC, nel mentre che P, che non ha cangiata la prima sua situazione, si muove con velocità proporzionale alla sua distanza PQ, egli è certo che incontrando ambi-

ambidue la stessa legge di resistenza, che abbiam posta nel primo caso, arriveranno contemporaneamente a poggiarsi sulla retta BE; e siccome il valore delle prime pressioni in H, B, E riman sempre il medesimo per tutte le situazioni analoghe dei punti mobili H, P, tal sarà pure quando pervenuti alla quiete si troveran posti sullo stesso vette BE e negli stessi primi punti C, D. Se per tanto si chiama $HC = r$, e x la pressione in H, per la legge dei momenti avremo $rx = Pd$ e quindi $x = \frac{Pd}{r}$: le altre pressioni poi in B e in E non varieranno dalle trovate nella prima ipotesi, che per il cangiamento che in esse induce la introduzione del simbolo r invece del simbolo q, e poichè la pressione in $C = \frac{Pd}{r}$ diventa minore della pressione $\frac{Pd}{q}$, essendo r maggiore di q, ecco che adattato il raziocinio superiore, avremo nel caso di un vette retto dove tutto è in quiete, e dove sono sempre mantenute le medesime distanze degli appoggj fra loro, e di ciascun degli appoggj dal punto dove è collocato il peso, ora pressioni maggiori ed ora pressioni minori, le quali varieranno anche all' infinito se si suppongono variati i punti dai quali l' appoggio mobile comincia il suo moto. A questo patentissimo assurdo noi arriviamo, se non si stabilisce una legge di natura la quale riduca tutto al ragionevole, e al vero, senza dar di cozzo in simili assurdità.

O io vado errato, o questa legge da sostituirsi è assai semplice e chiara. Essa consiste, a parer mio, nel principio: che collocato un peso sopra un piano orizzontale sostenuto da più appoggj, cerchi la natura di diramare ad essi le sue pressioni per linea retta e che, quando non incontri in tali rette modo di fermare la sua pressione, perchè cerca essa di fare il più presto che sia possibile il suo equilibrio, effettivamente le tramandi con certe determinate modificazioni che emanano dalle rispettive situazioni che hanno fra loro gli appoggj e il peso, agli stessi appoggj; laddove quando nella diramazione delle sue pressioni per linea retta incontra più presto un punto ove stabilir l' equilibrio, senza dilungarsi a un appoggio più lontano nella stessa retta, ivi ferma la sua azione e lascia

scia l' appoggio più remoto senza pressione alcuna. Da questo principio deriva per conseguenza legittima la verità dei generali valori delle tre pressioni, finchè il fulcro mobile formerà cogli altri immobili un triangolo, perchè le linee rette, per le quali s' incanalano queste pressioni, non presentano ragione alcuna onde abbiano a restarsene per via. Ma quando tutto è situato in una retta medesima, il peso P nel suo appulso con essa tenta di distribuire, come faceva prima per linea retta, le sue pressioni agli appoggj, ma perchè incontra nella stessa retta l' appoggio più vicino C dell' appoggio B, ivi deposita tutta quella pressione che distribuiva all' uno e all' altro, con quel cangiamento però che salvi la legge del vette semplice da un posto tra due appoggj. Supposta pertanto tale economia osservata dalla natura nella distribuzione delle pressioni al caso che tutto ridotto al vette retto, il momento che apparteneva all'appoggio B, quando non era impedito alla pressione di giungervi per linea retta, siccome essa cessa nel punto B e si ferma in C, non è più $y.\overline{a+b}$ ma yb, essendo b la distanza di C dall' asse di rotazione FD. Quindi nei valori delle pressioni x, y, z cancellata la a che in esse introducevasi per la ragion del momento $y.\overline{a+b}$ divenuto ora yb, ci nascono le tre pressioni modificate come segue; $x=\frac{Pd}{q}$; $y=\frac{P.\overline{cq-cd-bd}}{q.\overline{b+c}}$, $z=\frac{Pbq}{q.\overline{b+c}}$. Si consolidi ora la pressione x colla pressione y, il che succede quando il punto A è arrivato a C, ed ha presentato nella retta del vette un appoggio alla diramazione per la retta BC delle pressioni. Per tal modo la pressione totale in C diventa $\frac{Pcq}{q.\overline{b+c}}$; ed abbiamo $x+y:z$ ossia la pressione totale in C, alla pressione in F come $\frac{Pcq}{q.\overline{b+c}} : \frac{Pbq}{q.\overline{b+c}} :: c:b$. Questa è la legge del vette semplice che resta egregiamente salvata quando si adotta la legge da me stabilita, che la natura cerchi di distribuire le pressioni agli appoggj in linea retta che per via non trovi appoggio che le vieti di scorrere sino agli altri più lontani, potendo essa equilibrar le sue pressiosioni negli appoggj più vicini. In queste ultime espressioni resta totalmente eliminato il simbolo q; il che vuol dire che da qualunque punto A o più alto o più basso s' intenda cominciare il movimento del fulcro mobile A, nel momento dell' arrivo al punto C le pressioni risultanti in C e in E saranno sempre indipendenti dall' altezza q e veramente determinate dalle sole distanze CD, DE. Essendo da ultimo chiaro, che ciò che si è detto pel vette rettilineo di tre appoggj, si può applicare ugualmente a un vette rettilineo di quattro, cinque, e in generale di qualunque numero di appoggj, concluderemo che in tali casi sol quei due che sono dall'una e dall' altra parte i più vicini al peso, sosterran le pressioni che da esso si distribuiscono, e gli altri non sentiranno pressione alcuna.

Ho supposto turbato il movimento di P e di A da una resistenza che gli faccia nel medesimo tempo arrivare ai punti C,D senza velocità alcuna, per conformarmi all' idea che un si fa del vette retto caricato d'un peso, e corredato di più appoggj, dove non considera nessun moto preesistente, e nessuna estinzione del medesimo. Ma se anche si ammetta la ipotesi del moto equabile in A e in P colle velocità proporzionali alle rispettive distanze, col nostro principio si troverà salvata la legge del vette, ancorchè nell' appulso vivano le stesse velocità.

Soc. Ital. T. XII. p. 105.