MEMORIA

Dell'Abate Pietro Franchini

OVE SI PROPONGONO DE' NUOVI METODI TENDENTI A PERFEZIONARE L'ANALISI ALGEBRICA

PRESENTATA DA SEBASTIANO CANTERZANI

il dì 5. Giugno 1805.

1.° Nella scienza dell' Analisi algebrica, sì valorosamente promossa a' dì nostri, per opera specialmente de' Geometri Italiani, parmi che non tanto si desideri l'ampliamento ulteriore delle dottrine, quanto il miglioramento de' metodi che ad esse conducono; perchè alcuni sono intrigati soverchiamente, o non abbastanza diretti e generali; altri dipendono da elementi eterogenei od intempestivi, come le costruzioni sintetiche, i teoremi geometrici non essenziali, e le nozioni artificialmente anticipate; e parecchi consistono in artifizj particolari ed isolati, in vece di derivare insieme da una o più formole generali. Quanto più eleganti, più amene, più facili, non diverrebbero le scienze esatte; se una pura e semplice analisi rapidamente svolgesse tutta la serie delle successive nozioni! Io andrò esponendo il risultato de' tentativi da me fatti per conseguire in molti casi il miglioramento divisato, e vi unirò alcune ricerche, atte a promuovere in qualche guisa la scienza stessa.

2.° Problema. Si dimanda di generalizzare colla massima semplicità il problema in cui si cerca = *la somma de' prodotti, che si ottengono con moltiplicare il riprodotto m.simo di ciascuna risolvente di una data equazione, per la somma de' riprodotti* *ti n.simi di tutte le altre risolventi della medesima* (1)

Soluzione. Posto

$$\left.\begin{aligned} & a^m(b^n + c^n + d^n \ldots + k^n) \\ + & b^m(a^n + c^n + d^n \ldots + k^n) \\ + & c^m(a^n + b^n + d^n \ldots + k^n) \\ & \text{ec.} \qquad \text{ec.} \end{aligned}\right\} = \int_{m,n}$$

dove a, b, c ec. k, sono le risolventi della proposta, risulta come si sa $\int_{m,n} = \int_m . \int_n - \int_{m+n}$

Facciasi

$$\left.\begin{aligned} & a^p(b^m c^n + b^n c^m + b^m d^n + b^n d^m \text{ ec.}) \\ + & b^p(a^m c^n + a^n c^m + a^m d^n + a^n d^m \text{ ec.}) \\ + & c^p(a^m b^n + a^n b^m + a^m d^n + a^n d^m \text{ ec.}) \\ & \text{ec.} \qquad \text{ec.} \end{aligned}\right\} = \int_{m,n,p}$$

e siccome

$$\int_m \int_n \int_p = \left.\begin{aligned} & a^{m+n}(b^p + c^p + d^p \ldots + k^p) \\ + & b^{m+n}(a^p + c^p + d^p \ldots + k^p) \\ & \text{ec.} \qquad \text{ec.} \\ + & k^{m+n}(a^p + b^p + c^p \ldots + k1^p) \end{aligned}\right\} \ldots \text{(}k1\text{ è la penultima risolvente)}$$

$$\left.\begin{aligned} + & a^{m+p}(b^n + c^n + d^n \ldots + k^n) \\ + & b^{m+p}(a^n + c^n + d^n \ldots + k^n) \\ & \text{ec.} \qquad \text{ec.} \\ + & k^{m+p}(a^n + b^n + c^n \ldots + k1^n) \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} + & a^{n+p}(b^m + c^m + d^m \ldots + k^m) \\ + & b^{n+p}(a^m + c^m + d^m \ldots + k^m) \\ & \text{ec.} \qquad \text{ec.} \\ + & k^{n+p}(a^m + b^m + c^m \ldots + k_1{}^m) \end{aligned}\right\}$$

(1) Chiamo *risolvente* la radice di un' equazione, e *riprodotto* la potenza di una quantità. Questi vocaboli sono più espressivi: il primo si distingue meglio dalla radice di una quantità, ed il secondo esclude un vocabolo semibarbaro. Il celebre *Lagrange* con cui tenni proposito sul bisogno di alcune variazioni nella nomenclatura dell' Algebra, approvò le due precedenti, ed alcune altre ch' esporrò in breve in un corso di Algebra.

$$\left.\begin{array}{l} + a^p(b^m c^n + b^n c^m + b^m d^n + b^n d^m \text{ ec.}) \\ + b^p(a^m c^n + a^n c^m + a^m d^n + a^n d^m \text{ ec}) \\ \quad \text{ec.} \qquad \text{ec.} \\ + k^p(a^m b^n + a^n b^m + a^m d^n + a^n d^m \text{ ec.}) \end{array}\right\}$$

$$+ (a^{m+n+p} + b^{m+n+p} + c^{m+n+p} \text{ ec.}) \}$$

avvertendo che le cinque precedenti classi di termini sono respettivamente uguali ad

$$\int_{m+n}\int_{p} - \int_{m+n+p}\ ;\ \int_{m+p}\int_{n} - s_{m+n+p}\ ;\ \int_{n+p}\int_{m} - \int_{m+n+p}\ ;\ \int_{m,n,p}\ ;\ \int_{m+n+p}$$

si dedurrà

$$\int_{m}\int_{n}\int_{p} = \int_{m+n}\int_{p} + s_{m+p}\int_{n} + \int_{n+p}\int_{m} + s_{n+p}\int_{m} - 2\int_{m+n+p} + \int_{m,n,p}$$

e però

$$\int_{m,n,p} = \int_{m}\int_{n}\int_{p} - \int_{m+n}\int_{p} - \int_{m+p}\int_{n} - \int_{n+p}\int_{m} + 2\int_{m+n+p}$$

Ma $\int_{m}\int_{n} = \int_{m,n} + \int_{m+n}$

$$\int_{n}\int_{m+p} = \int_{n,m+p} + \int_{m+n+p}$$

$$\int_{m}\int_{n+p} = \int_{m,n+p} + \int_{m+n+p}$$

dunque $\int_{m,n,p} = \int_{m,n}\int_{p} - \int_{m,n+p} - \int_{n,m+p}$

Nella stessa maniera si trova

$$\int_{m,n,p,q} = \left\{\begin{array}{l} \int_{m}\int_{n}\int_{p}\int_{q} - \int_{p+q}\int_{m}\int_{n} - \int_{n+q}\int_{m}\int_{p} - \int_{m+q}\int_{n}\int_{p} \\ +(\int_{p+q} - \int_{p}\int_{q})\int_{m+n} + (\int_{n+q} - \int_{n}\int_{q})\int_{m+p} + (\int_{m+q} - \int_{m}\int_{q})\int_{n+p} \\ +2\int_{n}\int_{m+p+q} + 2\int_{p}\int_{m+n+q} + 2\int_{m}\int_{n+p+q} \end{array}\right\} =$$

$$= \int_{q}\int_{m,n,p} - \int_{m,n,p+q} - \int_{m,p,n+q} - \int_{n,p,m+q}$$

In generale, senza ricorrere a delle nuove notazioni come altri ha fatto, si ha

$$\int_{m,n,p,q\cdots y,\varphi,\omega} = \left\{\begin{array}{l} \int_{\omega}\int_{m,n,p,q\cdots\varphi} - \int_{m,n,p\ldots\varphi+\omega} - \int_{m,n,p\ldots y+\omega} \cdots\cdots \\ - \int_{m,n,q\cdots y,\varphi,p+\omega} - \int_{m,p,q\cdots y,\varphi,n+\omega} - \int_{n,p,q\cdots y,m+\omega} \end{array}\right. \qquad 3.°$$

3.° Problema. Trasformare un' equazione in un' altra, le di cui risolventi sieno le somme a due per due di quelle della proposta. Soluzione.

Essendo $x^m - px^{m-1} + qx^{m-2}$ ec. $= 0$ l' equazione proposta, il grado della trasformata è $= \frac{m(m-1)}{2}$, e posto $\frac{m(m-1)}{2} = n$, essa può mettersi sotto la forma seguente:

$y^n - p' y^{n-1} + q' y^{n-2} - r' y^{n-3}$ ec. $= 0$. Facciasi

$$T_1 = a+b+a+c \text{ ec.} + b+c \text{ ec.}$$
$$T_2 = (a+b)^2 + (a+c)^2 \text{ec.} + (b+c)^2 \text{ec.}$$
$$T_3 = (a+b)^3 + (a+c)^3 \text{ec.} + (b+c)^3 \text{ec.}$$

ec. ec. ec.

e si avrà

$$T_1 = (m-1)p) = (m-1)s_1$$
$$T_2 = (m-1)(a^2+b^2 \text{ec.}) + 2(ab+ac \text{ ec.} + bc \text{ ec.}) = (m-1)s_2 + 2q$$
$$= (m-2)s_2 + \tfrac{2}{2} s_1^2$$
$$T_3 = (m-1)(a^3+b^3 \text{ ec.}) + 3(a^2b+a^2c \text{ ec.} + b^2c \text{ ec.} + ab^2 + ac^2 \text{ ec.} + bc^2 \text{ ec.})$$
$$= (m-1)(a^3+b^3 \text{ ec.}) + 3(a+b \text{ ec.})(a^2+b^2 \text{ ec.}) - 3(a^3+b^3 \text{ ec.})$$
$$= (m-4)s_3 + 3s_1 s_2$$
$$T_4 = (m-1)(a^4+b^4 \text{ ec.}) + 4(a^3b+a^3c \text{ ec.} + b^3c \text{ ec.} + ab^3 + ac^3 \text{ ec.} + bc^3 \text{ ec.})$$
$$+ 6(a^2b^2 + a^2c^2 \text{ ec.} + b^2c^2 \text{ ec.}) = (m-1)(a^4+b^4 \text{ ec}) + 4(a+b \text{ ec.})(a^3+b^3 \text{ ec.})$$
$$- 4(a^4+b^4 \text{ ec.}) + \tfrac{6}{2}(a^2+b^2 \text{ ec.})^2 - \tfrac{6}{2}(a^4+b^4 \text{ ec.}) = (m-1)s_4 + 4s_1 s_3$$
$$- 4s_4 + \tfrac{6}{2}(s_2^2 - s_4) = (m-8)s_4 + 4s_1 s_3 + \tfrac{6}{2} s_2^2$$
$$T_5 = (m-1)(a^5 + b^5 \text{ ec.}) + 5(a^4b + a^4c \text{ ec.} + b^4c \text{ ec.} + ab^4 \text{ ec.})$$
$$+ 10(a^3b^2 + a^3c^2 \text{ ec.} + b^3c^2 \text{ ec.} + a^2b^3 \text{ec.}) = (m-1)(a^5 + b^5 \text{ ec.})$$
$$+ 5(a+b \text{ ec.})(a^4+b^4 \text{ ec.}) - 5(a^5+b^5 \text{ ec.}) + 10(a^2+b^2 \text{ ec.})(a^3+b^3 \text{ ec})$$
$$- 10(a^5+b^5 \text{ ec.}) = (m-1)s_5 + 5s_1 s_4 - 5s_5 + 10s_2 s_3 - 10s_3$$
$$= (m-16)s_5 + 5s_1 s_4 + 10 s_2 s_3.$$
$$T_6 = (m-1)(a^6+b^6 \text{ec.}) + 6(a^5b+a^5c \text{ ec.} + 15(a^4b^2 \text{ ec.} + b^4c^2 \text{ ec.} + a^2b^4 \text{ ec})$$
$$+ 20(a^3b^3 \text{ ec.} + b^3c^3 \text{ ec.}) = (m-1)(a^6+b^6 \text{ ec.}) + 6(a+b \text{ ec.})(a^5+b^5 \text{ ec.})$$

$$-6(a^6+b^6\text{ec.})+15(a^2+b^2\text{ec.})(a^4+b^4\text{ec.})-15(a^6+b^6\text{ec.})$$
$$+\tfrac{20}{2}(a^3+b^3\text{ec.})^2-\tfrac{20}{2}(a^6+b^6\text{ec.})=(m-1)s_6+6s_1s_5-6s_6$$
$$+15s_2s_4-15s_6+\tfrac{20}{2}s_3^2-\tfrac{20}{2}s_6=(m-32)s_6+6s_1s_5$$
$$+15s_2s_4+\tfrac{20}{2}s_3^2.$$

In generale

$$T_{2\mu}=(m-2^{\mu 2-1})s_{2\mu}+2\mu s_1 s_{2\mu-1}+\frac{2\mu(2\mu-1)}{1.2}s_2s_{2\mu-2}\dots$$
$$+\frac{1}{2}\left[\frac{2\mu'2\mu-1)\dots(2\mu-r+1)}{1.2.3\dots r}\right]s_\mu.s_\mu$$

$$T_{2\mu+1}=(m-2^{2\mu})s_{2\mu+1}+(2\mu+1)s_1s_{2\mu}+\frac{(2\mu+1)2\mu}{1.2}s_2s_{2\mu-1}\dots$$
$$+\left[\frac{(2\mu+1)2\mu\dots(2\mu-r+2)}{1.2.3\dots r}\right]s_\mu.s_{\mu+1}.$$

Ma $T_1=p'$, $T_2=p'^2-2q'$, $T_3=p'^3-3p'q'+3r'$, ec.; dunque

$$p'=(m-1)s_1$$
$$q'=\frac{1}{2}\left[(m-1)^2s_1^2-[(m-2)s_2+s_1^2]\right]=\frac{1}{2}\left[m(m-2)s_1^2-(m-2)s_2\right]$$
$$r'=\frac{1}{2.3}\left[(m^3-3m^2+2)s_1^3-3(m^2-3m)s_1s_2+2(m-4)s_3\right]$$

ec. ec. ec.

L' esposta soluzione ha il pregio di condurre alla formola generale di T_m; di dare immediatamente p', q', ec. espressi per delle funzioni abbastanza comode, quali sono s_1, s_2 ec., e di essere analoga alla nota soluzione del problema in cui si cerca, di trasformare un' equazione in un' altra, le di cui risolventi sieno le differenze di quelle della proposta. (2)

4.°

(2) *Nota dell' Autore sopraggiunta*: Abbiamo recentemente riscontrato nella Nota III alla *Risoluzione delle Equazioni Numeriche* di Lagrange, un' elegantissima dimostrazione generale della formola di T_m, tanto nel caso delle differenze, che delle somme a due per due delle risolventi.

4.° Problema. Si dimanda $\text{sen.}(a \pm b)$ e $\cos.(a \pm b)$, espressi entrambi per li seni e coseni di a, b.

Soluzione. Qualunque debba essere l' espressione richiesta, è chiaro 1.° ch' ella debb' essere lineare; 2.° che non dee contenere alcun termine della forma $\frac{k}{\text{funz.}(\text{sen.}a\ \text{sen.}b \cos.a \cos.b\ \text{sen.}^2 a\ \text{ec.})}$, qualunque sia il numero de' fattori del denominatore, perchè in una delle ipotesi, $a=0$, $a=100.°$, $b=0$, $b=100.°$, il termine di cui si tratta diviene infinito. 3.° che ogni termine dell' espressione di $\text{sen.}(a \pm b)$ debb' essere affetto da funz. $\text{sen.}a$, o da funz. $\text{sen.}b$, o da funz. $(\text{sen.}a\ \text{sen.}b)$, perchè la supposizione di $a=0$, e $b=0$, fa svanire $\text{sen}\,(a \pm b)$. Ciò posto, l' unica forma che può darsi a $\text{sen.}(a+b)$ è

$$
\text{M)} \ldots \text{sen.}(a+b) = \begin{cases}
A\,\text{sen}\,a + B\,\text{sen.}b \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & (\alpha) \\
+\frac{1}{R}\left\{\begin{array}{l} C\,\text{sen.}^2 a + D\,\text{sen.}^2 b + E\,\text{sen.}a\,\text{sen.}b + F\,\text{sen.}a \cos.b \\ + G\,\text{sen.}b \cos.a + H\,\text{sen.}a \cos.a + I\,\text{sen.}b \cos.b \ldots \end{array}\right. & (\beta) \\
+\frac{1}{R^2}\left\{\begin{array}{l} P\,\text{sen.}^2 a \cos.b + Q\,\text{sen.}^2 b \cos.a + P'\,\text{sen.}a \cos.^2 b \\ + Q\,\text{sen.}b \cos.^2 a + P''\,\text{sen.}\,a\,\text{sen.}b \\ + Q'\,\text{sen.}^2 b\,\text{sen.}a + T\,\text{sen.}^3 a \ldots\ldots \end{array}\right. & (\gamma) \\
\text{ec.} \quad \text{ec.} \quad \text{ec.} \quad \text{ec.} &
\end{cases}
$$

dove R è il raggio $=1$.

Quando $b=0$ si ha $\text{sen.}(a+b)=\text{sen.}a$; e quando $a=0$, $\text{sen.}(a+b) = \text{sen.}b$. La prima ipotesi dà $C=0$, ed $H=0$; la seconda $D=0$, $I=0$; ed entrambe $P=0$, $Q=0$, $T=0$. Dunque l' espressione (M) dee ridursi a

$$
\text{(N)} \ldots \text{sen.}(a+b) = \begin{cases}
A\,\text{sen.}a + B\,\text{sen.}b \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & (\alpha) \\
+\frac{1}{R}\left\{ E\,\text{sen.}a\,\text{sen.}b + F\,\text{sen.}a \cos.b + G\,\text{sen}\,b \cos.a \ldots \right. & (\beta) \\
+\frac{1}{R^2}\left\{\begin{array}{l} P'\,\text{sen.}a \cos.^2 b + Q'\,\text{sen.}b \cos.^2 a + P''\,\text{sen.}^2 a\,\text{sen.}b \\ + Q\,\text{sen.}^2 b\,\text{sen.}a \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right. & (\gamma) \\
\text{ec.} \quad \text{ec.} \quad \text{ec.} &
\end{cases}
$$

Ma quando $a=100.°$ risulta $\text{sen.}(a+b)=\cos.b$, e l' espressione (N) diviene

$$\text{sen.}(a+b) = A + \left(B + \frac{E}{R} + \frac{P''}{R^2}\right)\text{sen.}b + F\cos.b + \frac{1}{R^2}\left(P'\cos.^2 b + Q''\,\text{sen.}^2 b\right) + \text{ec.}$$

dunque $A=0$, $B+E+P''=0$, $F=1$, $P'=0$, $Q''=0$ e però (P)

$$(\mathrm{P}) \ldots \text{sen.}(a+b) = \begin{cases} \text{B sen.}b + \frac{1}{\mathrm{R}}\left(\text{E sen.}a\ \text{sen.}b + \text{sen.}a\ \text{cos.}b + \text{G sen.}b\ \text{cos.}a\right) \\ \quad + \frac{1}{\mathrm{R}^2}\left(\text{Q}'\text{sen.}b\ \text{cos.}^2a + \text{P}''\text{sen.}^2a\ \text{cos.}b\right) \\ \quad + \ \text{ec.} \quad \text{ec.} \end{cases}$$

Quando $b=100.^\circ$ deesi avere $\text{sen.}(a+b)=\text{cos.}a$, e perchè l'espressione (P) si cangia in

$$\text{sen.}(a+b)=\mathrm{B}+\frac{1}{\mathrm{R}}\left(\text{E sen.}a+\text{G cos.}a\right)+\frac{1}{\mathrm{R}^2}\left(\text{Q}'\text{cos.}^2a+\text{P}''\text{sen.}^2a\right)+\text{ec.}$$

ne segue $\mathrm{B}=0$, $\mathrm{E}=0$, $\mathrm{G}=1$, $\mathrm{Q}'=0$, $\mathrm{P}''=0$.

Combinando i risultati delle ipotesi precedenti, siccome svaniscono tutti i termini della serie (γ) e delle susseguenti, si può concludere $\text{sen}\ (a+b)=\frac{1}{\mathrm{R}}\left(\text{sen.}a\ \text{cos.}b+\text{sen.}b\ \text{cos.}a\right) \ldots$ (A), quindi $\cos(a+b)[=\sqrt{(1-\text{sen.}^2(a+b))}]=\sqrt{[1-(\text{sen.}^2a\ \text{cos.}^2b-2\text{sen.}a\ \text{cos.}a \times \text{sen.}b\ \text{cos.}b+\text{sen.}^2b\ \text{cos.}^2a)]}$

e posto $1-\text{cos.}^2a$ per sen.^2a, $1-\text{sen.}^2a$ per cos.^2a,

$\cos(a+b)=\pm\frac{1}{\mathrm{R}}(\text{cos.}a\ \text{cos.}b-\text{sen.}a\ \text{sen}\ b) \ldots$ (B).

Siccome $\text{sen.}-b=-\text{sen.}b$ e $\text{cos.}-b=\text{cos.}b$, ponendo $-b$ per b in (A), (B) si ottiene

$\text{sen.}(a-b) = \text{sen.}a\ \text{cos.}b - \text{sen.}b\ \text{cos.}a$

$\cos(a-b) = \pm(\text{cos.}a\ \text{cos.}b+\text{sen.}a\ \text{sen.}b)$: dunque

$\text{sen.}(a\pm b) = \text{sen.}a\ \text{cos}\ b \pm \text{sen.}b\ \text{cos.}a$

$\text{cos.}(a\pm b) = \pm(\text{cos.}a\ \text{cos}\ b\mp\text{sen.}a\ \text{sen.}b)$

Noi non conosciamo veruna soluzione del problema precedente, che sia puramente algebrica, e non dipenda dalla risoluzione de' triangoli; risoluzione che assolutamente appartiene all' ultima parte della Trigonometria. La soluzione ch' è stata derivata dall' integrale dell' equazione $\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)}}+\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)}}=0$ non può essere di alcun uso.

5.° Essendo a, b, c, tre angoli tali che sia $a+b+c=200.^\circ$, risulta: $\text{sen.}a\ \text{cos}\ c+\text{sen.}c\ \text{cos.}a[=\text{sen.}(a+c)]=\text{sen.}b$; quindi $\text{sen.}b-\text{cos.}a\ \text{sen.}c=\text{sen.}a\ \text{cos.}c$.

Si

Si ha pure $\cos.a\cos.c - \operatorname{sen}.a\operatorname{sen}.c\ [=\cos(a+c)] = -\cos.b$, e perciò $\cos.a\cos.c + \cos b = \operatorname{sen}.a\operatorname{sen}.c$.
Dividendo il primo de' risultati precedenti pel secondo ne proviene $\frac{\cos.a\cos.c+\cos.b}{\operatorname{sen}.b-\cos.a\operatorname{sen}.c} = \tan.c$.
Nell' ipotesi che sia $a+b+c=200.^\circ$ sussiste l' equazione

$\operatorname{sen}.^2 b - \operatorname{sen}.^2 c = \operatorname{sen}.(b+c)\operatorname{sen}.(b-c)$. Infatti ponendo a per $b+c$ l'equazione precedente diviene
$\operatorname{sen} b(\operatorname{sen}.b - \operatorname{sen}.a\cos.c) = \operatorname{sen}.c(\operatorname{sen}.c - \operatorname{sen}.a\cos.b)$;
ma $\operatorname{sen}.a\cos.c = \operatorname{sen}.b - \cos.a\operatorname{sen}.c$

$\operatorname{sen}.a\cos.b = \operatorname{sen}.c - \cos.a\operatorname{sen}.b$

dunque ec.
Sieno due angoli b, c, tali che $b+c < 200.^\circ$, e sieno x, y, i rispettivi complementi di b, c. Si avrà $x = 100.^\circ - b$, $y = 100.^\circ - c$, e però $y - x = b - c$; e se $b > 100^\circ$; $y + x = b - c$; dunque $b - c = y \mp x$. Si ha parimente $y + x = 200.^\circ - (b+c)$; quindi $y+x$ è il supplemento di $b+c$, ed $\frac{1}{2}(y+x)$ il complemento di $\frac{1}{2}(b+c)$; perciò $\operatorname{sen}.\frac{1}{2}(b+c) = \cos.\frac{1}{2}(y+x)$, e $\tan.\frac{1}{2}(b+c) = \cot.\frac{1}{2}(y+x)$. I risultati di questo paragrafo ci saranno utili.

Accenniamo di passaggio che dalle note formole di $\operatorname{sen}.na$, $\cos.na$, può dedursi la seguente formola generale

$$\operatorname{sen}.na\cos.na = n\operatorname{sen}.a - \frac{n}{2.3}(4n^2-1)\operatorname{sen}.^3 a + \frac{n}{2.3.4.5}(4n^2-1)(4n^2-9)\operatorname{sen}.^5 a - \frac{n}{2.3.4.5.6.7}(4n^2-1)(4n^2-9)(4n^2-25)\operatorname{sen}.^7 a \text{ ec.}$$

la di cui legge è manifesta; e che mediante l' equazioni

$$\operatorname{sen}.a = 2\operatorname{sen}.\tfrac{1}{2}a\cos.\tfrac{1}{2}a$$
$$\operatorname{sen}.2a = 2\operatorname{sen}.a\cos.a$$
$$\operatorname{sen}.3a = 2\operatorname{sen}.\tfrac{3}{2}a\cos.\tfrac{3}{2}a$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$\operatorname{sen}.na = 2\operatorname{sen}.\tfrac{n}{2}a\cos.\tfrac{n}{2}a$$

sen.

$$\text{sen.}a+\text{sen.}2a+\text{sen.}3a \text{ ec.} = \tfrac{1}{2}\cot.\tfrac{1}{2}a$$

si ottiene

$$\text{sen.}\tfrac{1}{2}a \cos.\tfrac{1}{2}a+\text{sen.}a \cos.a+\text{sen.}\tfrac{3}{2}a \cos.\tfrac{3}{2}a+\text{sen.}2a \cos.2a \text{ ec. ec.}$$

$$= \tfrac{1}{4}\cot.\tfrac{1}{2}a.$$

Passiamo adesso a mostrare che la risoluzione de' triangoli presa in tutta la sua estensione, può derivarsi per analisi dal risultato del seguente problema semplicissimo.

6. Problema. Si dimanda il rapporto che i seni degli angoli di un triangolo rettilineo hanno coi lati opposti.

Soluzione. Premessa la formazione analitica delle Tavole, si vede che il seno di un angolo vien espresso in parti del raggio, e che variando questi, non l'angolo, il seno dee comprendere lo stesso numero di parti del raggio. Sieno A, B, C, i lati di un triangolo, a, b, c gli angoli respettivamente opposti, e pongasi $a=100.^\circ$ [illegible]

A $(=\text{sen.}100.^\circ=r)$: B (=sen b nell'ipot. del rag. r) :: R : sen. b, nell' ipot. del raggio tabulare R; ovvero

A (ipoten.) : B (cateto) : : R : sen b.

Si concepisca un secondo triangolo rettangolo, avente il cateto B comune col triangolo precedente, ed il secondo cateto C' sul prolungamento del cateto C. Chiamando A' l'ipotenusa del secondo triangolo, e b' l'angolo compreso fra i lati A', C', si avrà

A' : B : : R : sen. b'; dunque Asen. b = A'sen b' . . . (D)

e perciò i *seni degli angoli stanno come i lati opposti*.

La formola (D) risolve un triangolo 1.° quando si hanno *due lati ed un angolo opposto ad uno di essi*; 2.° quando si ha *un lato e due angoli*.

7.° L'equazioni B sen. a = Asen. b, C sen. a = A sen. c danno

$$(B+C)\text{sen.}a = A\,(\text{sen.}b+\text{sen.}c)$$
$$(B-C)\text{sen.}a = A\,(\text{sen.}b-\text{sen.}c)$$

e quindi

$$\frac{B+C}{B-C} = \frac{\text{sen.}b+\text{sen.}c}{\text{sen.}b-\text{sen.}c} = \frac{\text{tang.}\frac{1}{2}(b+c)}{\text{tang.}\frac{1}{2}(b-c)} \ . \ . \ . \ (E)$$

for-

formola che risolve un triangolo quando si conoscono *due lati e l' angolo compreso*: essa però lo risolve anche in due altri casi che derivano dal precedente, cioè 1.° quando si hanno *due lati e la somma o la differenza degli angoli opposti*; 2.° quando si hanno *due angoli e la somma o la differenza de' lati opposti*.
Volendo immediatamente uno degli angoli b, c, dicasi

$$B : C : : \text{sen.}b : \text{sen.}\,[200.°-(a+b)]$$

cioè $B : C : : \text{sen.}b : \text{sen.}(a+b)$ e si avrà

$$\text{sen.}b = \frac{B\,\text{sen.}a}{\sqrt{(B^2+C^2-2B.C\cos.a)}}$$

Deducendo $\cos.b$, si trova $\tan.b = \frac{B\,\text{sen.}a}{\frac{C}{B}-B\cos.a} = \frac{\tan.a}{\frac{C}{B}\cdot\frac{1}{\cos.a}-1}$

formola in altra guisa ottenuta dal Chiarissimo Professor Cagnoli, e che dà un secondo angolo, se abbiasi *un angolo ed il rapporto de' lati che lo comprendono*. Può dunque costruirsi per mezzo di essa un triangolo simile al triangolo proposto.

Fatto $a=100.°$ essa dà inoltre $\tan.\,b=\frac{B}{C}$: sta dunque *un cateto all' altro come il raggio alla tangente dell' angolo opposto al secondo cateto*.

8.° Mettendo la precedente espressione di $\text{sen.}b$ nell' equazione $A\,\text{sen.}b = B\,\text{sen.}a$, si ottiene $A=\sqrt{(B^2+C^2-2B.C\cos.a)}$. Conoscendo A, C, b, si trova come sopra $\text{sen.}c = \frac{C\,\text{sen.}b}{\sqrt{(A^2+C^2-2A.C\cos.b)}}$, e posto questo valore nell' equazione $B\,\text{sen.}c = C\,\text{sen.}b$ risulta $B=\sqrt{(A^2+C^2-2A.C\cos.b)}$. Nello stesso modo si trova $C=\sqrt{(A^2+B^2-2A.B\cos.c)}$. Quadrando le respettive espressioni di A, B, C, si ha

$$\left.\begin{aligned} A^2 &= B^2+C^2-2B.C\cos.a \\ B^2 &= A^2+C^2-2A.C\cos.b \\ C^2 &= A^2+B^2-2A.B\cos.c \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (K)$$

formole che si ottengono anche mediante l' equazioni $A\,\text{sen.}b = B\text{sen.}a$, $A\,\text{sen.}[200.°-(a+b)] = C\,\text{sen.}a$, e che danno

 gli

gli angoli per mezzo de' lati. Esse divengono più comode se vi si sostituisca $1 - 2\text{sen.}^2\frac{1}{2}$ per cos., e deducasi sen. $\frac{1}{2}$. (1)

9.° Problema. Trovare i semmenti x, y, di un angolo a, fatti dalla perpendicolare da esso calata sul lato opposto e trovare i semmenti di questo lato.

Soluzione. Posto nella formola (E) num°. 7.°, $\tan.\frac{1}{2}(y \mp x)$ per $\tan.\frac{1}{2}(b-c)$ (n.° 5.°) e $\cot.\frac{1}{2}(y+x)$, $=\cot.\frac{1}{2}a$ per $\tan.\frac{1}{2}(b+c)$, risulta $\tan.\frac{1}{2}(y \mp x) = \frac{B-C}{B+C}\cot.\frac{1}{2}(y+x)$ $= \frac{\tan.\frac{1}{2}(b-c)}{\tan.\frac{1}{2}(b+c)}\cot.\frac{1}{2}(y+x)$; e perchè $x+y=a$, si hanno subito i semmenti x, y, per mezzo de' lati che comprendono l'angolo a, e per mezzo de' soli angoli. Sia C' il semmento del lato A dalla parte dell' angolo c, e B' l'altro semmento. Si ha $B^2 - B'^2 = C^2 - C'^2 \; (=\delta^2)$; quindi $B' - C' = \frac{(B+C)(B-C)}{B'+C'}$, e posto $\frac{A\,\text{sen.}b}{\text{sen.}a}$ per B, $\frac{A\text{sen.}c}{\text{sen.}a}$ per C, $B' - C' = \frac{A(\text{sen.}^2 b - \text{sen.}^2 c)}{\text{sen.}^2 a} = \frac{A\text{sen.}(b-c)}{\text{sen}\,a}$ (n.° 5.°), se la perpendicolare δ cade fuori del triangolo, è $A = B' - C'$ e però $B' + C' = \frac{(B+C)(B-C)}{B'-C'} = \frac{A\text{sen.}(b-c)}{\text{sen.}a}$; dunque $B' \pm C' = \frac{A\text{sen}\,(b-c)}{\text{sen.}a}$. Se $a = 100.°$ è sempre $A = B' + C'$, e si ha $B' - C' = A\text{sen.}(b-c)$; dun-

(*a*) Evvi chi ha ottenute le formole (K) coi lumi dell' applicazione dell' Algebra alla Geometria, supponendo note le coordinate de' vertici del triangolo, e perciò nota la risoluzione de' triangoli rettangoli, operazione molto prolissa e non adattabile alla Trigonometria: altri le ha trovate mediante la proprietà di un triangolo obbliquangolo ABC, che sia cioè $\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 \pm 2\overline{BC}.\overline{CD}$, operazione che richiede l' abbassamento di una perpendicolare CD, e che troppo dipende dalla Geometria: altri le ha rintracciate col soccorso di alcune preparazioni sintetiche, mediante la proprietà che hanno le seganti del circolo, condotte da uno stesso punto esterno. Niuno poi, per quanto io sappia, ha fatto delle formole (K) quell' uso amplissimo che delle medesime si può fare, come si vedrà in appresso.

dunque *sta l'ipotenusa al raggio, come la differenza de' semmenti al seno della differenza degli angoli acuti*.

10.° Facendo girare la retta δ intorno al vertice a, finchè giunga al punto di mezzo del lato A, risulta il semmento maggiore y, diviene $y-p=y'$, il minore x diviene $x+p=x'$ e si ha, chiamando δ' la retta in cui si cangia la δ,

$(\delta' : B' :: \text{sen}.b : \text{sen}.x'$; $\delta' : C' :: \text{sen}.c : \text{sen}.y') \ldots (Q)$;

ma $B'=C'$: dunque $\text{sen}.x' : \text{sen}.y' :: \text{sen}.b : \text{sen}.c :: B : C$ e però

$$B+C : B-C :: \text{sen}.y'+\text{sen}.x' : \text{sen}.y'-\text{sen}.x' :: \tan.\tfrac{1}{2}(y'+x') : \tan.\tfrac{1}{2}(y'-x')$$

quindi $\tan.\frac{1}{2}(y'-x') = \tan.\frac{1}{2}(y'+x')\frac{B-C}{B+C}$, formola che dà i semmenti x', y' per mezzo dell' angolo diviso a e de' lati che lo comprendono.

Si ha pure $\tan.\frac{1}{2}(y'-x') = \tan.\frac{1}{2}(y'+x')\dfrac{\tan.\frac{1}{2}(b-c)}{\tan.\frac{1}{2}(b+c)}$, laonde i semmenti si ottengono per mezzo de' soli angoli. Quest' ultima formola ci dà un teorema elegante ed è: che se dividesi un angolo a di un triangolo, con una retta tendente alla metà del lato opposto A, *sta la tangente della semisomma degli angoli* b, c, *adiacenti ad* A, *alla tangente della semidifferenza de' medesimi angoli, come la tangente della semisomma de' semmenti dell' angolo* a *sta alla tangente della semidifferenza degli stessi semmenti*.

11.° Facendo girare come sopra la retta δ finchè giunga a dividere in mezzo l'angolo a, risulta $x'=y'$ e le proporzioni (Q) danno

$B' : C' :: \text{sen}.b : \text{sen}.c$; quindi $B'-C' = \dfrac{A\tan.\frac{1}{2}(b-c)}{\tan.\frac{1}{2}(b+c)} = \dfrac{A(B-C)}{B+C}$.

La proporzione precedente dà pure $B'\text{sen}.c = C'\text{sen}.b$; ma $B'=A\mp C'$: dunque $C' = \frac{A\text{sen}.c}{\text{sen}.b\pm\text{sen}.c}$ e $B' = \frac{A\text{sen}.b}{\text{sen}.b\pm\text{sen}.c}$

Le proporzioni (Q) danno parimente

$\tan.\frac{1}{2}(y'-x') = \tan.\frac{1}{2}a\left(\frac{C'\text{sen}.b - B'\text{sen}.c}{C'\text{sen}.b + B'\text{sen}.c}\right)$, formola che somministra i semmenti y', x', qualunque sia il rapporto dato de' semmenti B', C'; e che somministra B', C', qualunque sia il rapporto dato de' semmenti x', y'. Ella serve dunque a generalizzare il problema del n.° 10.°.

12.° Sommando a due per due l' equazioni (K) (n.° 8.°) e togliendo i fattori comuni si ha

$$(h)\ \ldots \left\{\begin{array}{l} C - A.\cos.b - B\cos.a = 0 \\ A - C\cos.b - B\cos.c = 0 \\ B - C\cos.a - A\cos.c = 0 \end{array}\right.$$

equazioni importantissime nella soluzione de' problemi relativi alla risoluzione de' triangoli piani. Se $a = 100.°$ esse divengono

$$(i)\ \ldots \left\{\begin{array}{l} C - A\cos.b = 0 \\ A - C\cos.b - B\cos.c = 0 \\ B - A\cos.c = 0 \end{array}\right.$$

e riescono comodissime quando si tratta di triangoli rettangoli.

13.° La prima e la terza insegnano che l' *ipotenusa sta ad un cateto, come il raggio al seno dell' angolo opposto al cateto*. Posto sen.c per cos.b, e divisa la prima per la terza, si ha $\tan.c = \frac{C}{B}$, formola che riconduce al teorema posto sul fine del n.° 7.° Essa insegna 1.° a trovare la perpendicolare δ, quando si conosce il lato A su cui cade, e gli angoli ad esso adiacenti, b, c; 2.° a trovare il rapporto de' semmenti B', C' per mezzo de' soli angoli b, c. Si hanno infatti le proporzioni

$B' : \delta :: 1 : \tan.b$; $A - B'(= C') : \delta :: 1 : \tan.c$, da cui $\delta = \frac{A\tan.b.\tan.c}{\tan.b + \tan g.c}$ e $B' : C' :: \tan.c : \tan.b$. Se $a = 100.°$ si ha $\delta = \frac{A\tan.b}{\sec g.^2 b}$; poi $B' : C' :: 1 : \tan.^2 b$, e se $B' > C'$ risulta $1 > \tan.b$, $b < 50.°$ e $b < c$: sta dunque *il semmento maggiore al minore come il raggio al quadrato della tangente dell' angolo minore*.

14.°

14.° Le formole (i) porgono con semplicità la soluzione di molti problemi: tali sono i seguenti. I *Dato un angolo acuto e la superficie*. II *Dato un angolo acuto e la somma o la differenza di due lati*. III *Data l' ipotenusa, e la somma o la differenza de' cateti*. IV *Dato un cateto e la somma o la differenza dell' ipotenusa e del secondo cateto*. V *Dato il perimetro e due angoli*, risolvere in ciascuno di questi casi il triangolo. Noi però stimiamo bene di dedurne la soluzione da problemi più generali, a riserva del primo, la di cui deduzione sarebbe meno comoda.

15.° Problema. Risolvere un triangolo rettangolo, di cui sia dato un angolo acuto b, e la superficie s.

Soluzione. Essendo A l' ipotenusa risulta $BC = 2s$ e però $B = \frac{2s}{C}$. La terza equazione (i) diviene $\frac{2s}{C} - A \operatorname{sen}.b = 0$; ma la prima dà $C = A \cos.b$; dunque $2s - A^2 \operatorname{sen}.b \cos.b = 0$, e però $A = \sqrt{\frac{2s}{\operatorname{sen}.b \cos.b}} = 2\sqrt{\frac{Rs}{\operatorname{sen}.2b}}$.

16.° Problema. Dati due angoli a, b, ed $A \mp C = m$, risolvere il triangolo.

Soluzione. Dalle prime due dell' equazioni (h) si deduce $B = \frac{A \mp C - (C \mp A)\cos.b}{\cos.c \mp \cos.a}$. Dato

$A - C = m$ risulta $\quad B = \frac{m(1+\cos.b)}{\cos.c - \cos.a}$

e dato $A + C = m$ $\quad B = \frac{m(1-\cos.b)}{\cos.c + \cos.a}$.

La prima formola per essere $1 + \cos.b = \frac{\operatorname{sen}.b}{\tan.\frac{1}{2}b}$ e $c = 200.° - (a+b)$,

si cangia in
$$B = \frac{m}{\operatorname{sen}.a \tan.\frac{1}{2}b - \cos.a} \quad \ldots\ldots (l)$$

La seconda perchè $1 - \cos.b = \operatorname{sen}.b \tan.\frac{1}{2}b$ diviene
$$B = \frac{m \tan.\frac{1}{2}b}{\operatorname{sen}.a + \cos.a \tan.\frac{1}{2}b} \quad \ldots\ldots (m)$$

Se $a = 100.°$ le due formole precedenti danno

B =

$$\left.\begin{array}{l} B = \frac{m}{\tan.\frac{1}{2}b} = m \tan.\frac{1}{2}c \\ \\ B = m \tan.\frac{1}{2}b = \frac{m}{\tan.\frac{1}{2}c} \end{array}\right\} \ldots (n)$$

e se $b = 100.^\circ$ danno $B = \frac{m}{\text{sen}.a - \cos.a} = \frac{m}{\text{sen}.(c - 50.^\circ)\sqrt{2}} \ldots (p)$

$$B = \frac{m}{\text{sen}.a + \cos.a} = \frac{m}{\text{sen}.(c + 50.^\circ)\sqrt{2}} \ldots (q)$$

17.° Problema. Dato un angolo b, il lato opposto B ed $A \mp C = m$, risolvere il triangolo.

Soluzione. Siccome fra i dati del problema v' è un solo angolo b, giova impiegare per maggior semplicità la prima dell' equazioni (k). Posto per A, $m \pm C$ essa dà $C = \frac{1}{2}\left(\mp m \pm \sqrt{\frac{2B^2 - m^2(1+\cos.b)}{1-\cos.b}}\right)$, formola che altri ottenne colla combinazione di undici formole particolari, non tutte semplici.

Se $b = 100.^\circ$ si ha $C = \frac{\pm m \pm \sqrt{2B^2 - m^2}}{2}$, formola che scioglie il problema III del n.° 14. Se conoscesi $A + C = m$, convien prendere m positivo, ed in questo caso i dati del problema equivalgono al perimetro, l' angolo b, ed il lato B. Alla formola $C = \frac{1}{2}\left[m \pm \sqrt{\frac{2B^2 - m^2(1+\cos.b)}{1-\cos b}}\right]$ si riduce la risoluzione di un triangolo, di cui venga dato un angolo b, il perimetro m e la superficie n^2, perchè può trovarsene il lato B (Newton Arith. Univ. prob. VIII). Quest' ultimo problema può sciogliersi però anche più generalmente, nell' ipotesi cioè che si cerchi un lato qualunque. Infatti dall' equazioni (k) o (h) si possono eliminare due lati mediante l' equazioni $m = A + B + C$, $n^2 = \frac{A.C\,\text{sen}.b}{2}$. Il Sig. Cagnoli (Soc. Ital. t. VII.) ha sciolto il problema di Newton colla massima semplicità per mezzo di un artifizio ingegnoso.

18.° Problema. È dato un angolo b, un lato adiacente A e $B = C = m$. Soluzione.

Po-

Posto $m \pm C$ per B nelle formole (h) esse divengono

$$C - A\cos.b - (m \pm C)\cos.a = 0$$
$$A - C\cos.b - (m \pm C)\cos.c = 0$$
$$m \pm C - C\cos.a - A\,.\,\cos.c = 0$$

Eliminato cos.c dall' ultime due, si ottiene

$$A^2 - A.C\cos.b = (m \pm C)^2 - (m \pm C)C\cos.a\text{; quindi}$$
$$\cos.a = \frac{-A^2 + A.C\cos.b + (m \pm C)^2}{(m \pm C)C}$$

la prima equazione (h) diviene

$$C^2 - 2A.C\cos.b + A^2 - (m \pm C)^2 = 0\text{, cioè}$$
$$A^2 - 2A.C\cos.b - m^2 \mp 2m\,C = 0\text{; onde}$$
$$C = \frac{A^2 - m^2}{2(A\cos.b \pm m)}$$

formola altrimenti ottenuta dal Sig. Cagnoli (*Memoria citata*). Essa diviene $C = \frac{A^2 - m^2}{\pm 2m}$ se $b = 100.°$, e risolve il probl. IV del §. 14.

19.° Problema. Risolvere un triangolo di cui sono dati gli angoli ed il perimetro m.

Soluzione. Essendo $C = m - A - B$, l' equazioni (h) divengono

$$m - A - B - A\cos.b - B\cos.a = 0$$
$$A - (m - A - B)\cos.b - B\cos c = 0$$
$$B - (m - A - B)\cos.a - A\cos.c = 0$$

Dalla terza $B = \frac{A\cos.c + (m - A)\cos.a}{1 + \cos.a}$, onde la prima si cangia in

$$m - A - \left(\frac{A\cos.C + (m - A)\cos.a}{1 + \cos.a}\right) - A\cos.b - \left(\frac{A\cos.c + (m - A)\cos.a}{1 + \cos.a}\right)\cos.a = 0$$

Quindi $A = \frac{m\,\mathrm{sen}^2.a}{1 + \cos.c + \cos.b(1 + \cos.a) + \cos.a(\cos.c - \cos.a)} =$

$$\frac{m\,\mathrm{sen}.^2a}{1 - \cos.^2a + (\cos.a\,\cos.b + \cos.c) + (\cos.a\,\cos.\ +\ \mathrm{os}.b)} = \frac{m\,\mathrm{sen}.a}{\mathrm{sen}.a + \mathrm{sen}.b + \mathrm{sen}.c}.$$

Questa formola si ottien subito con un facile artifizio componendo cioè le ragioni, A : sen a : : B : sen b : : C : sen c, ma la nostra soluzione è più analitica, il nostro metodo uniforme.

Se $a = 100.°$ risulta l' ipotenusa $A = \frac{m}{1 + \text{sen.} b + \text{cot.} b}$, formola che scioglie il problema V del n.° 14.

20.° Problema. Sono dati b, B ed $\frac{A}{C} = m$.

Soluzione. Posto mC per A la prima dell' equazioni (k) dà $C = \frac{B}{\sqrt{(1 + m^2 - 2m \cos. b)}}$ e se $b = 100.°$, $C = \frac{B}{\sqrt{(1+m^2)}}$. Avendo B, a ed $\frac{A}{C} = m$, la seconda equazione (k) dà $C = -\frac{B}{m^2 - 1}\left[\cos. a \mp \sqrt{m^2 - \text{sen.}^2 a}\right]$, e se $a = 100.°$, $C = \pm \frac{B}{\sqrt{(m^2 - 1)}}$.

21.° Problema. Sono dati B, b ed A.C$=m$.

Soluzione. La prima equazione (k) dà

$$C = \sqrt{\left[m \cos. b + \frac{B^2}{2} \pm \sqrt{\left(-m^2 \text{sen.}^2 b + m \cos. b \,.\, B^2 + \frac{B^4}{4}\right)}\right]}$$

e se $b = 100.°$, $C = \frac{\sqrt{(B^2 \pm \sqrt{B^4 - 4m^2})}}{2}$.

Con diverso metodo il Sig. Cagnoli ha trovato

$$C = \tfrac{1}{2}\sqrt{(B^2 + 4m \cos.^2 \tfrac{1}{2} b)} + \tfrac{1}{2}\sqrt{(B^2 - 4m \,\text{sen.}^2 \tfrac{1}{2} b)}.$$

22.° Problema. Dati A, B, ed $a \mp b = m$, trovar gli angoli.

Soluzione. Posto $a = m \pm b$ nell'equazioni (h), si ha eliminando $\cos. c$ dall' ultime due, $A^2 - A.C \cos. b = B^2 - B.C\cos.(m \pm b)$; ma la prima dà $C = A \cos. b + B \cos.(m \pm b)$; dunque $A.\,\text{sen.} b = B\,\text{sen.}(m \pm b)$ e però $\text{sen.} b = \frac{B\,\text{sen.} m}{\sqrt{(A^2 \mp 2A.B \cos. m + B^2)}}$. Sovente riesce più comodo servirsi della formala (D) n.° 6.° in vece dell' equazioni (k), (h).

23.° Problema. È data la perpendicolare δ, la differenza μ de' semmenti della base, e la somma o la differenza m de' lati, dal cui angolo scende la perpendicolare.

Soluzione. Sia B il lato minore, il semmento minore B', e l' angolo acuto adiacente al secondo semmento $C' (= B' + \mu)$.

Sic-

Siccome (n°. 6.°) $\quad B : \delta :: 1 : \text{sen}.b = \frac{\delta}{\sqrt{(\delta^2 + B'^2)}}$

$$m \pm B : \delta :: 1 : \text{sen}.c = \frac{\delta}{\sqrt{(\delta^2 + (B' + \mu)^2)}}$$

ne segue $\sqrt{(\delta^2 + B'^2)} = \sqrt{(\delta^2 + (B' + \mu)^2)} - m$, e però $B' = -\frac{1}{2}\left(\mu \pm m \sqrt{\left(\frac{4\delta^2 + \mu^2 - m^2}{\mu^2 - m^2}\right)}\right)$. Dunque la base $= 2B' + \mu = m \sqrt{\left(\frac{4\delta^2 + \mu^2 - m^2}{\mu^2 - m^2}\right)}$. Se $\mu = m$ ella diviene infinita, e però la differenza de' semmenti non può esser eguale alla differenza de' lati. Date tre delle quantità δ, μ, m, x, può dunque aversi la quarta.

24.° Problema. Sono dati A, b e la superficie s. Soluzione. Si ha $\delta = \frac{2s}{A}$, poi $C : \frac{2s}{A} :: 1 : \text{sen}.b$, e però $C = \frac{2s}{A\,\text{sen}.b}$.

25.° Eliminando A, B, C, per mezzo dell' equazioni (h). siccome son esse prive di un termine cognito, si trova zero per risultato: l' analisi dunque dimostra che il problema in cui si cercano i lati per mezzo degli angoli è di sua natura indeterminato. Facendo $\frac{A}{C} = m$, $\frac{B}{C} = n$, l' equazioni (h) divengono

$$1 - m\cos.b - n\cos.a = 0$$
$$m - \cos.b - n\cos c = 0$$
$$n - \cos.a - m\cos.c = 0$$

e danno i rapporti de' lati. Resta un' equazione di condizione, cioè $1 - \cos.^2 a - \cos.^2 b - \cos.^2 c - 2\cos.a\cos.b\cos.c = 0$, che equivale a $-\cos[200.° - (b + c)] = \cos.a$. ed esprime che $a + b + c = 200.°$ In generale, mediante le formole (k) o (h) si può risolvere un triangolo, qualora sieno date tre equazioni atte a determinare tre elementi fra' quali un lato, ancorchè tali equazioni non contengano gli elementi stessi ma delle funzioni che da essi dipendano, come la superficie del triangolo, le perpendicolari calate dai vertici su i lati opposti, le rette che dai vertici vanno alla metà de' lati opposti, ec. Infatti, essendo α, β,

γ, queste rette, A, B, C, i rispettivi lati che dalle medesime s' incontrano, si hanno l' equazioni

$$4\alpha^2 = 2B^2 + 2C^2 - A^2$$
$$4\beta^2 = 2C^2 + 2A^2 - B^2$$
$$4\gamma^2 = 2A^2 + 2B^2 - C^2$$

In ogni caso la difficoltà si riduce a trovar delle formole semplici e comode nella pratica (*).

26. Problema. Dato un angolo a di un triangolo bac, la cui base A ($= bc$) sia orizzontale, ed i lati B, C, obliqui all'orizzonte, e dati gli angoli di depressione α, β, che i lati B, C fanno colla verticale D calata dal vertice a, determinare l' angolo x, uguale alla projezione dell' angolo a sul piano orizzontale che passa per A.

Soluzione. Chiamando B', C', i lati che nel triangolo projettato comprendono l'angolo x si ha (n.° 8.°).

$$A^2 = B^2 + C^2 - 2B.C\cos.a = B'^2 + C'^2 - 2B'.C'\cos.x$$

I lati B', C', essendo corde di circoli massimi della sfera terrestre, gli angoli che nella loro intersezione fanno colla verticale D, superano 100.° della metà dell'arco sotteso dal rispettivo lato B', C'. Trascurati questi archi, che in pratica sono estremamente piccoli, risulta $B^2 - B'^2 = D^2$, $C^2 - C'^2 = D^2$; quindi $\cos.x = \frac{B.C\cos.a - D^2}{B'.C'}$; ma $B = \frac{B'}{\text{sen}.\alpha}$, $C = \frac{C'}{\text{sen}.\beta}$, $D = B'\cot.\alpha = C'\cot.\beta$; dunque mettendo $B'.C'\cot.\alpha\cot.\beta$ in luogo di D^2, si ha $\cos.x = \frac{\cos.a - \cos.\alpha\cos.\beta}{\text{sen}.\alpha\,\text{sen}.\beta}$ ...(s) ovvero $\cos.x = \frac{\cos.a - \text{sen.compl}.\alpha\,\text{sen.compl}.\beta}{\cos.\text{compl}.\alpha\cos.\text{compl}.\beta}$ $= \cot.\alpha\cot.\beta\left(\frac{\cos.a}{\text{sen.compl}.\alpha\,\text{sen.compl}.\beta} - 1\right)$ formola più comoda.

27. Iscrivendo in un circolo ciascuno de'due triangoli precedenti, siccome $B > B'$, e $C > C'$, il circolo circoscritto al triangolo projettato è maggiore, perciò l'arco che misura $\frac{a}{2}$ è minore dell' arco

(*) Alcuni dettagli sono diretti a completare il presente articolo trigonometrico, ed a renderlo adottabile, con qualche modificazione, in un corso analitico di Trigonometria rettilinea.

arco che misura $\frac{x}{2}$; dunque $a < x$. Se un lato dell' angolo a suppongasi orizzontale, uno degli angoli α, β, per esempio α, è $= 100.^\circ$, quindi $\cos.x = \frac{R.\cos.a}{\text{sen}\beta}$, ma $R > \text{sen}.\beta$; dunque $x > a$. Se $a = 100.^\circ$ nell' ipotesi precedente, risulta $\cos.x = 0 = \cos.a$ e però $x = a$; ma se $a = 100.^\circ$ senza che niuno de' lati B, C sia orizzontale, si fa $\cos.x = -\cot.\alpha \cot.\beta$, onde $x > 100.^\circ$ lo che corrisponde a ciò che si è provato qui sopra.

28. Sieno $a'b'$, $a'c'$, $b'c'$, tre archi descritti col centro in a (n.° 26), e con un raggio $= 1$, sulle rispettive facce della piramide triangolare, i cui arresti sono i lati B, C, D. Essendo $a'b'$ la misura dell' angolo a, $a'c'$ la misura dell'angolo α, e $b'c'$ la misura dell' angolo β, se pongasi $a'b' = C$, $a'c' = B$, $b'c' = A$, a motivo che l' angolo x è uguale all' angolo sferico $b'c'a'$ che chiameremo c', la formola (f) diviene $\cos.c' = \frac{\cos.C - \cos.A \cos.B}{\text{sen}.A\ \text{sen}.B}$ e dà

Nello stesso modo si ottiene
$$\left.\begin{array}{l}\cos.C = \cos.A \cos.B + \cos.c'\ \text{sen}.A\ \text{sen}.B \\ \cos.B = \cos.A \cos.C + \cos.b'\ \text{sen}.B\ \text{sen}.C \\ \cos.A = \cos.B \cos.C + \cos.a'\ \text{sen}.B\ \text{sen}.C\end{array}\right\}\ldots(u)$$
formole da cui tutta e facilmente deriva la risoluzione de' triangoli sferici, com' è stato dimostrato dall' Eulero (Pietrob. 1779). La formola (f) può riguardarsi come un anello intermedio che unisce la Trigonometria rettilinea colla sferica.

29. Condotti dal centro a della sfera, cui spettano i lati del triangolo sferico $a'b'c'$, i raggi aa', ab', ac', se per un punto c' di un arresto ac' della piramide $a'b'c'a$ si fa passare un piano normale, l' angolo c'' della sezione triangolare rettilinea equivale all' angolo diedro delle facce $a'ac'$, $b'ac'$ e però all' angolo c'; ciascuno degli altri due angoli b'', a'' della medesima sezione è minore del rispettivo angolo diedro e però del rispettivo angolo sferico b', a'; dunque $a' + b' + c' > 200.^\circ$ Così non evvi bisogno di ricorrere al triangolo supplementario supponendo un vertice, per esempio b', polo di $a'c'$, e però a', c' retti; se diminuiscesi b' oltre ogni limite risulta $a' + b' + c' = 200.^\circ$ più un infinitesimo

di grado: tal è dunque il minimo limite della somma degli angoli di un triangolo sferico.

Con questo ci sembra di aver liberate ambedue le Trigonometrie da ogni deviazione sintetica, e di aver soddisfatto alle più delicate ricerche della Trigonometria rettilinea, con quella prontezza e facilità che propria è sol dell' Analisi.

30. Riassumendo la considerazione de' triangoli piani, ci proponiamo d' investigarne le variazioni per mezzo delle solite formole (h).

Un triangolo può variare in tre modi I. rimanendo costanti due elementi. II. rimanendo costante un elemento. III. variando tutti gli elementi. Nella prima ipotesi conviene considerar tre casi e sono, 1.° che resti invariato un angolo a ed un lato adiacente C; 2.° un angolo a ed il lato opposto A; 3.° che restino invariati B, C. Se restano invariati due angoli e però anche il terzo, il triangolo variato è simile al proposto, e le variazioni de' lati proporzionali ai lati stessi. In ogni caso il problema si riduce a trovare l'espressione più semplice de' rapporti delle variazioni ignote, o queste sieno finite o differenziali, variazioni che non debbon esser mai più di tre. Premettiamo le formole ch' esprimono le variazioni finite di sen., cos., tan., cot., seg., coseg. In virtù delle notissime formole $1-\cos.x = 2\text{sen.}^2\frac{1}{2}x$, $2\text{sen.}\frac{1}{2}x \times \cos.\frac{1}{2}x = \text{sen.}x$ si ha $\delta.\text{sen.}x = \text{sen.}(x+\delta x) - \text{sen.}x = \text{sen.}x\,(\cos.\delta x - 1) + \cos.x\,\text{sen.}\delta x = -2.\text{sen.}^2\frac{1}{2}\delta x\,\text{sen.}x + \cos.x\,\text{sen.}\delta x = 2\text{sen.}\frac{1}{2}\delta x\cos.(x+\frac{1}{2}\delta x)$. Si ha parimente $\delta\cos.x = \cos.(x+\delta x) - \cos x = \cos.x(\cos\delta x - 1) - \text{sen.}x\,\text{sen.}\delta x = -2\text{sen.}^2\frac{1}{2}\delta x\cos.x - \text{sen.}x\,\text{sen.}\delta x = -2\,\text{sen.}\frac{1}{2}\delta.x\,\text{sen.}(x+\delta x)$. Così $\delta.\text{tan.}x = \delta\,\frac{\text{sen}\,x}{\cos.x} = \frac{\cos.x\delta.\,\text{sen.}x - \text{sen.}x\,\delta\cos.x}{\cos.x\,(\cos.x+\delta\cos.x)} = \frac{\text{sen.}\,\delta x}{\cos.x.\,\cos.(x+\delta x)}$ $\delta.\text{cot.}x = -\frac{\text{sen.}\delta x}{\text{sen.}x\,\text{sen.}(x+\delta x)}$; $\delta.\text{seg.}x = \delta.\frac{1}{\cos.x} = -\frac{\delta\cos.x}{\cos.x\cos.(x+\delta x)}$

$=$

$$= \frac{2\text{sen.}\frac{1}{2}\delta x \,\text{sen.}(x+\frac{1}{2}\delta x)}{\cos.x \cos.(x+\delta x)} \;;\; \delta.\text{coseg.}x = \delta.\frac{1}{\text{sen.}x} = -\frac{\delta\,\text{sen.}x}{\text{sen.}x\,\text{sen.}(x+\delta x)}$$

$$= -\frac{2\text{sen}\,\frac{1}{2}\delta x \cos.(x+\frac{1}{2}\delta x)}{\text{sen.}x\,\text{sen.}(x+\delta x)} \;.$$

31. Facendoci a considerare le variazioni differenziali, siccome nel caso 1.° gli elementi variabili sono A, B, b, e si ha $dc = -db$, l' equazioni (h) prendono la forma seguente

$$\left.\begin{aligned} \cos.a\, d\text{B} &= \text{A}\, db\, \text{sen.}b - \cos.b\, d\text{A} \\ d\text{A} &= \cos.c\, d\text{B} + \text{B}db\, \text{sen.}c - \text{C}db\,\text{sen.}b \\ d\text{B} &= \cos.c\, d\text{A} + \text{A}db\, \text{sen.}c \end{aligned}\right\} \ldots (x)$$

Posto $\frac{\text{B sen.}c}{\text{sen.}b}$ per C la seconda somministra $d\text{A} = \cos.c\, d\text{B} \ldots (1)$

La terza diviene $d\text{B} = d\text{B}\cos.^2c + \text{A}db\,\text{sen.}c$ e dà $d\text{B} = \frac{\text{A}db}{\text{sen.}c} \ldots (2)$

Eliminando $d\text{B}$ colle due formole precedenti si ha $d\text{A} = \frac{\text{A}db}{\tan.c} \ldots (3)$

Impiegando le tre equazioni (x) senza prevalersi dell' equazione B sen.c = C sen.b, il calcolo riesce meno semplice .

Se $a = 100°$ le formole precedenti divengono

$$d\text{B} = \frac{\text{A}db}{\cos.b} \ldots (\text{I}),\; d\text{A} = \frac{\text{A}db}{\cos.b} \ldots (\text{II}),\; d\text{A} = \frac{\text{A}db}{\cot.b} \ldots\ldots\ldots (\text{III})$$

e siccome A : B : : 1 : cos.c, la (I) dà $\frac{d\text{B}}{db} = \frac{\text{B}}{\text{sen.}c\,\cos.c} = \frac{2\text{B}}{\text{sen.}2c}$, onde $\frac{d\text{B}}{db}$ è minimo quando sen.$2c$ è massimo, cioè quando $c = 50°$. Per misurare un' altezza B, giova dunque situare il grafometro ad una distanza C, eguale presso a poco a B. Si vedrà che il risultato è lo stesso qualora gli errori dB, db sieno finiti.

32. Nel 2.° caso si ha come nel 1.° $dc = -db$, gli elementi variabili sono B, C, b, e l' equazioni (h) divengono

$$\begin{aligned} &d\text{C} + \text{A}db\,\text{sen}\,b - \cos.a d\text{B} = 0 \\ &\text{C}db\,\text{sen.}b + \cos.b d\text{C} + \text{B}db\,\text{sen.}c + \cos.\,c d\text{B} = 0 \\ &d\text{B} - \cos.a\; d\text{C} - \text{A}db\,\text{sen.}c = 0 \end{aligned}$$

Dalla terza $\text{A} = \frac{d\text{B} - \cos.a\; d.\text{C}}{db\,\text{sen.}c}$: la prima si cangia in $d\text{C}$ (sen.c —

cos.a

cos.a sen.b) $= d$B (cos.a sen.c − sen.b), onde dC $= -\frac{d\text{B}\cos.c}{\cos.b}$ . . . (4)

Pongasi nella prima presa nella natural sua forma, la precedente espressione di dC, e si avrà $d\text{B} = \frac{\text{A}db\cos.b}{\text{sen}.a}$ . . . . (5); e perchè

$\frac{\text{A}}{\text{sen}.a} = \frac{\text{B}}{\text{sen}.b} = \frac{\text{C}}{\text{sen}.c}$, $d\text{B} = \frac{\text{B}db}{\text{tang}.b}$ . . . . (6), $d\text{B} = \frac{\text{C}db\cos.b}{\text{sen}.c}$ . . . . (7)

Mettendo nella prima l' espressione di dB dedotta dalla (4) si ha

$d\text{C} = -\frac{\text{A}db\cos.c}{\text{sen}.a}$ . . . (8) e quindi $d\text{C} = -\frac{\text{B}db\cos.c}{\text{sen}.b}$ . . . . (9), e

$d\text{C} = -\frac{\text{C}db\cos.c}{\text{tang}.c}$ . . . . (10)

Se $a = 100°$ si ha

$d\text{C} = -d\text{B}\,\text{tan}.b = -db\cot.c$ ...(IV), $d\text{B} = \frac{\text{A}d.\text{sen}.b}{1} = -\frac{\text{A}d.\cos.c}{1}$ . . . (V)

$d\text{B} = \frac{\text{B}db}{\text{tan}.b} = -\frac{\text{B}dc}{\cot.c}$ . . . . . . (VI), $d\text{B} = \text{C}db$ . . . . (VII)

$d\text{C} = \frac{\text{A}d.\text{sen}.c}{1} = \frac{\text{A}d\cos.b}{1}$ . . : . . (VIII), $d\text{C} = -\text{B}db$ . . . . . (IX)

$d\text{C} = -\text{C}db\cot.b = \frac{\text{C}dc}{\text{tan}.c}$ . . . (X).

33. Nel 3.° caso gli elementi variabili sono A, a, b, e si ha $\pm d.a = \mp db - dc$. Eliminato B mediante l' equazione B sen.c = C sen b, l' equazioni (h) prendono la forma seguente

$$-\cos.b\,d\text{A} + \text{A}db\,\text{sen}.b + \text{C}\frac{\text{sen}.b}{\text{sen}.c}\text{sen}.a\,(\mp db - dc) = 0$$

$$d\text{A} + \text{C}\,\text{sen}.b\,(db + dc) = 0.$$

$$\text{C}\,\text{sen}.a\,(\mp db - dc) - \cos c\,d\text{A} + \text{A}dc\,\text{sen}.c = 0$$

Dalla seconda $\text{C} = -\frac{d\text{A}}{\text{sen}.b(db+dc)}$; quindi la prima e la terza, posto sen.$(b+c)$ per sen.a divengono $\text{A}db + d\text{A}\cot.c = 0$, $\text{A}dc + d\text{A}\cot.b = 0$

perciò $d\text{A} = -\frac{\text{A}db}{\cot.c}$ . . . . (11), $d\text{A} = -\frac{\text{A}dc}{\cot.b}$ . . . . (12)

e da queste $db = dc\,\frac{\cot.c}{\cot.b} = dc\,\frac{\text{tan}.b}{\text{tan}.c}$ . . . . (13), formola che dà

$db =$

$db = dc$ quando $B = C$; se inoltre abbiasi $a = 100°$ risulta $dA = -Adb$, $dA = -Adc$. Per ottenere le altre formole colla massima semplicità si differenzino l'equazioni $B \,\text{sen}.\, a = A \,\text{sen}.\, b$, $C \text{sen}. a = A \text{sen}. c$; nel differenziale della prima, cioè $B.\, da.\, \cos. a = dA \,\text{sen}. b + Adb \cos. b$, si ponga l'espressione di dA dedotta dalla (10) e si avrà $db = -\frac{B \cos. cda}{A}$ . . . . . (14); nel differenziale della seconda, $Cda \cos. a = dA \,\text{sen}. c + Adc \cos. c$, si ponga l'espressione di dA presa dalla (11), e si avrà $dc = -\frac{C \cos. bda}{A}$ . . . . (15). Dalle due precedenti deriva poi $db = \frac{B \cos. cdc}{\text{Cos}. b}$ . . . . . (16). Eliminando A mediante le formole (10), (14) si ottiene $dA = B \,\text{sen}.\, cda$ . . . (17) e perchè $B \,\text{sen}.\, c = C \,\text{sen}. b$, si ha $dA = C \,\text{sen}.\, bda$ . . . (18)

34. Le formole differenziali sopra esposte si potrebber'ottenere differenziando delle formole trigonometriche particolari, ma questo metodo avrebbe a parer nostro de' difetti notabili: 1.° perchè bisognerebbe aver presenti tutte le formole particolari: 2.° perchè converrebbe sceglier quella che dà un risultato più semplice: 3.° perchè questo metodo sarebbe soggetto a tentativo. Per esempio nel 1.° caso in cui gli elementi costanti sono C, a, se si vuole il rapporto di dB a db, conviene aver pronte tutte le formole che contengono B, b, le quali sono moltissime; escluse le più composte, ne rimangono parecchie fra cui non è sempre facile il decidere qual sia più opportuna.

35. Passando a considerare le variazioni finite, sieno costanti due elementi, e l'equazioni (h) nel 1.° caso diverranno

$$\left.\begin{array}{l} \cos. a\delta B + A\delta\cos. b + \delta A(\cos. b + \delta\cos. b) = 0 \\ \delta A - \delta B(\cos. c + \delta\cos c) - B\delta\cos c - C\delta\cos. b = 0 \\ \delta B - \delta A(\cos. c + \delta\cos. c)\, \delta A \cos. c = 0 \end{array}\right\} \;\ldots\ldots (y)$$

Dalla terza $\delta A = \frac{\delta B - A\delta\cos. c}{\cos. c + \delta\cos. c}$; quindi dalla prima

$$\delta B = \frac{A(\cos. b\delta\cos. c - \cos.\delta \cos b)}{\cos. a(\cos. c + \delta\cos. c) + \cos. b + \delta\cos. b}$$ e però (n.° 30)

$\delta B =$

$$\delta B = \frac{A \text{ sen } \delta b}{\text{sen.}(c - \delta c)} = - \frac{A \text{ sen } \delta c}{\text{sen.}(c - \delta c)} \;.\;.\;.\;.\;.\; (a)$$

e perchè $A : A + \delta A :: \text{sen.} c : \text{sen.}(c - \delta c)$

$$\delta B = (A + \delta A) \frac{\text{sen.} \delta b}{\text{sen.} c} \;.\;.\;.\;.\;.\; (b)$$

Posto nella prima delle (χ) δB preso dalla terza si ha

$$\delta A \cos a [\cos. c + \delta \cos. c) + A \cos. a \delta \cos. c = -(A \delta \cos. a + \delta A (\cos. b + \delta \cos b)]$$

onde $\delta A = - \frac{A(\cos. a) \cos. c + \delta \cos. b)}{\cos. a (\cos. c + \delta \cos. c) + \cos. b + \delta \cos. b} =$ (n.° cit.)

$$= - \frac{A(\text{sen.}(c - \delta b) - \text{sen.} c)}{\text{sen.}(c - \delta b)} = - \frac{A(\text{sen.}(c + \delta c) - \text{sen.} c)}{\text{sen.}(c - \delta c)} = - \frac{A \delta \text{ sen.} c}{\text{sen.}(c - \delta c)}$$

Dunque $\delta A = - \frac{2A \text{ sen.} \frac{1}{2} \delta c \cos. (c + \frac{1}{2} \delta c)}{\text{sen.}(c - \delta c)} \;.\;.\;.\;.\;.\; (c)$

Eliminando A per mezzo di (a), (c) si ottiene . . . .

$\frac{\delta A \text{ sen } (c - \delta c)}{2 \text{ sen.} \frac{1}{2} c \delta \cos. (c + \frac{1}{2} \delta c)} = \frac{\delta B \text{ sen.} (c - \delta c)}{\text{sen.} \delta b}$, e perchè $\text{sen.} \delta b = - \text{sen.} \delta c$,

è $\frac{2 \text{ sen.} \frac{1}{2} \delta c}{- \text{sen.} \delta c} = \frac{1}{\cos. \frac{1}{2} \delta c}$, $\delta A = \frac{\delta B \cos. (c + \frac{1}{2} \delta c)}{\cos. \frac{1}{2} \delta c} \;.\;.\;.\;.\; (d)$.

La formola (c) da noi ottenuta, è più comoda di quest' altra

$\delta A = - \frac{2A \tan. \frac{1}{2} \delta c}{\tan. (c + \frac{1}{2} \delta c) \tan. \frac{1}{2} \delta c}$, trovata mediante una combinazione non facile a prevedersi di parecchie formole complicate. Le formole (a), (b), (c). (d), riproducono le formole (1), (2). (3) purchè si pongano i differenziali per le differenze e però δc per sen δc, sen. c per sen $(c \pm \delta c)$, 1 per cos. δc, ec. ec.

36. Applicando lo stesso metodo al 2.° e 3.° caso si trova

$$\delta C = - \frac{2C \text{ sen.} \frac{1}{2} \delta b \cos. (c - \frac{1}{2} \delta b)}{\text{sen.} c}$$

$$\delta B = - \frac{2B \text{ sen.} \frac{1}{2} \delta b \cos. (b - \frac{1}{2} \delta b)}{\text{sen.} b}$$

δC

$$\delta C = -\frac{\delta B \cos.(c + \frac{1}{2}\delta b)}{\cos.(b - \frac{1}{2}\delta b)}$$

$$\tan.\frac{1}{2}\delta b = \frac{\tan.\frac{1}{2}\delta c \tan.(b + \frac{1}{2}\delta b)}{\tan.(c - \frac{1}{2}\delta b)} = -\frac{\delta A \cot.(c - \frac{1}{2}\delta b)}{2A - \delta A} = -\frac{\delta A \cot.(b + \frac{1}{2}\delta b)}{2A - \delta A}$$

$$\text{sen.}\frac{1}{2}\delta b = -\frac{2B \,\text{sen.}\frac{1}{2}\delta a \cos.(c - \frac{1}{2}\delta b)}{\delta A - 2A} = \frac{2C \,\text{sen.}\frac{1}{2}\delta a \cos.(b + \frac{1}{2}\delta b)}{2A - \delta A}$$

$$\delta A = \frac{2B \,\text{sen.}\frac{1}{2}\delta a \,\text{sen.}(c - \frac{1}{2}\delta b)}{\cos.\frac{1}{2}\delta b} = \frac{2C \,\text{sen.}\frac{1}{2}\delta a \,\text{sen.}(a + \frac{1}{2}\delta b)}{\cos.\frac{1}{2}\delta b}.$$

Se un elemento solo o se niuno è costante, purchè si abbiano le variazioni di due elementi nel primo caso, e di tre nel secondo, si ottengono con egual facilità i rapporti delle variazioni non conosciute.

37. Problema. Si dimanda l'angolo BCA (Fig. I.), il cui vertice è nel centro C della base *muro* di un campanile la di cui croce fu osservata dal punto A, per lo che si ebbe l' angolo ridotto BAC.

Soluz. Si scelga un punto e sulla retta AC, dal quale si possano traguardare le stazioni A, B. Misurata Ae si hanno tutti gli elementi del triangolo BAe in cui si suppone dato AB. Per mezzo di Be e degli angoli CeB, eBC si calcoli eC $= \delta$Ae, e posto AB$=$C, B$e =$ A, si avrà $-\,\text{sen.}\delta c = \frac{\delta B \,\text{sen.}(c - \delta c)}{A} = -\,\text{sen}\,\delta\, BeA$; quindi ACB $=$ AeB $- \delta$AeB.

Questo ci sembra un metodo più esatto e più semplice di quelli che sino ad ora sonosi adoperati.

Molti sono i problemi spettanti alla Geometria Descrittiva, le di cui soluzioni non sono abbastanza semplici, o abbastanza generali. Sia pertanto.

38. Problema. Determinare in un modo semplice la posizione di un globo aereostatico, cioè la sua distanza dal piano stesso. Soluzione. Si scelgano tre punti M', M'', M''' (F.ª II.) situati in un piano orizzontale, distanti fra loro più che si può, e tali che

la perpendicolare calata dal globo M cada dentro al triangolo M' M'' M'''. Due osservatori de' quali uno sia per esempio in M', l'altro in M'', prendano nel medesimo istante convenuto, i rispettivi angoli M M' M'' M M'' M'; poscia l' osservatore in M'', lasciato fermo il traguardo diretto ad M, misuri l' angolo MM'' M'''. Misurata quella delle distanze M' M'', M' M''', M'' M''', che riesce più comoda; e gli angoli adiacenti ad essa nel triangolo M'M''M''', si calcolino le altre due. Nel triangolo M' MM'' ove si sanno due angoli ed un lato, si calcoli MM'', l'apotema MP ed il semmento M''P; quindi nel triangolo M' MM'' dove si hanno tutti i lati si calcoli M' M'' M'''. Così nell'angolo triedro, avente il vertice in M'' si conoscono gli angoli piani, e può determinarsi l' angolo diedro MPN. Nel triangolo NMP si calcoli MN e si avrà l'altezza richiesta; si calcoli PN, e siccome il punto P è già noto, si avrà il punto N, cioè la projezione cercata.

Per quanto ci sembra, l'esposto problema non si è sciolto sino ad ora che per mezzo di tre osservatori, i quali misurino gli angoli fatti colla verticale dagli arresti MM', MM'', MM''', e per mezzo delle curve a doppia curvatura che risultano dalle intersezioni di tre coni, curve che si costruiscono solo per punti, e che conducono ad un' equazione di 8.° grado riducibile al 4.°

La soluzione precedente dimostra *che una piramide triangolare è determinata quando si hanno i lati della base, e tre degli angoli che gli arresti del vertice fanno coi lati della base, purchè due di tali angoli sieno adiacenti ad uno stesso lato della base*.

39. Problema. Determinare la posizione di un punto M dello spazio, di cui si conoscano le distanze da tre punti M', M'', M''', dati di posizione. Questo problema che si riduce a determinare il vertice di una piramide triangolare, della quale sien dati tutti gli arresti, si può sciogliere in due maniere.

Soluzione I. Trovati come sopra i punti P, P', e gli apotemi MP, MP', si conducano due piani, de' quali uno per MP, l' altro per MP'. Costruita la loro intersezione, si descriva in uno di essi per esempio nel piano PMN, un circolo col raggio MP e col centro in P; ed il punto dove questo incontra l'intersezione precedentedente sarà il punto richiesto. Non v' è dunque bisogno di ricorrere alle intersezioni di tre sfere, ed il problema si riconduce a quest' altro: *costruire un punto* M *dello spazio, di cui si hanno le distanze da i lati di un triangolo dato di grandezza e di posizione*.

Soluzione 2.ª Pongasi $MM' = a$, $MM'' = b$, $MM''' = c$, e le coordinate rispettive de' punti M', M'', M''', M, sieno x', y', z'; x'', y'', z''; x''', y''', z'''; x, y, z. Avremo

$$a^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2$$
$$b^2 = (x - x'')^2 + (y - y'')^2 + (z - z'')^2$$
$$c^2 = (x - x''')^2 + (y - y''')^2 + (z - z''')^2$$

Facciasi passare il piano delle x, y pel più basso de' punti dati, e sia per esempio M': sarà $z' = 0$, e posto

$$2x' = d,\ 2y' = d',\ x'^2 + y'^2 = d''$$
$$2x'' = e,\ 2y'' = e',\ 2z'' = e'',\ x''^2 + y''^2 + z''^2 = e'''$$
$$2x''' = f,\ 2y''' = f',\ 2z''' = f'',\ x'''^2 + y'''^2 + z'''^2 = f'''$$

si avranno le tre seguenti

$$\left.\begin{array}{l} a^2 = x^2 + y^2 + z^2 - dx - d'y + d'' \\ b^2 = x^2 + y^2 + z^2 - ex - e'y - e''z + e''' \\ c^2 = x^2 + y^2 + z^2 - fx - f'y - f''z + f''' \end{array}\right\} \ldots\ldots (1)$$

si elimini $x^2 + y^2 + z^2$ per mezzo della prima, e pongasi $b^2 - a^2 + d'' - e''' = A$, $c^2 - a^2 + d'' - f''' = B$, $d - e = \alpha$, $d' - e' = \alpha'$, $d - f = \beta$, $d' - f' = \beta'$ e si otterrà

$$\left.\begin{array}{l} \alpha x + \alpha' y - e''z = A \\ \beta x + \beta' y - f''z = B \end{array}\right] \ldots\ldots (2)$$

Dalla prima $x = \frac{A - \alpha' + e''z}{\alpha}$, e dalla seconda che diviene

$$\beta A + (\alpha\beta' - \alpha'\beta)y + (\beta e'' - \alpha f'')z = \alpha B,$$

$y = \frac{\alpha B - \beta A + (\alpha f'' - \beta e'')z}{\alpha\beta' - \alpha'\beta}$; quindi $x = \frac{(\beta' e'' - \alpha' f'')z + \beta' A - \alpha' B}{\alpha\beta' - \alpha'\beta}$. Pongasi $\frac{\alpha B - \beta A}{\alpha\beta' - \alpha'\beta} = B'$, $\frac{\alpha f'' - \beta e''}{\alpha\beta' - \alpha'\beta} = A'$; $\beta' A - \alpha' B = B''$, $\beta' e'' - \alpha' f'' = A''$ e si ritrarrà $x = A''z + B''$, $y = A'z + B'$. Sostituiti questi valori nella prima dell' equazioni (1) e fatto $A''^2 + A'^2 + 1 = C$, $2A''B'' + 2A'B' - dA'' - d'A' = D$, $B''^2 + B'^2 - dB'' - d'B' + d'' - a^2$

 =

$=\mathrm{E}$, si ottiene $\mathrm{C}z^2+\mathrm{D}z+\mathrm{E}=0$ onde $z=-\frac{\mathrm{D}\pm\sqrt{\mathrm{D}^2-4\mathrm{EC}}}{2\mathrm{C}}=\mathrm{F}$, $y'=\mathrm{A'F}+\mathrm{B'}$, $x=\mathrm{A''F}+\mathrm{B''}$.

Se i punti M', M'', M''' sono nel piano delle x,y, si ha $z'=0$, $z''=0$, $z'''=0$, quindi $e'=0$, $f''=0$, perciò $\alpha''=0$, $\beta''=0$, e finalmente $\mathrm{A'}=0$, $\mathrm{A''}=0$, laonde $\mathrm{C}=1$, $\mathrm{D}=0$, $z=\pm\sqrt{\mathrm{E}}$, $y=\mathrm{B'}$, $x=\mathrm{B''}$.

L' ingegnosissima soluzione di Lagrange è molto laboriosa ed astrusa, perchè non vi si fa passare alcun piano coordinato per uno de' punti M', M'', M'''; e perchè x, y, z vi si esprimono per a, b, c, e per i lati del triangolo M' M'' M'''.

40. Problema. Per un punto dato in un piano far passare una retta che faccia un dato angolo con una retta data nel piano stesso.

Soluzione. Sia $y=ax+b$ l'equazione della retta data, α la tangente dell' angolo, x', y' le coordinate del punto, ed $y-y'=a'(x-x')$ sarà l' equazione della retta richiesta; ma la tangente dell' angolo che fanno tra loro le rette $y=ax+b$, $y=a'x+(y'-a'x')$ è $\frac{a'-a}{1+aa'}$, dunque $\frac{a'-a}{1+aa'}=\alpha$ e però $a'=\frac{\alpha+a}{1-a\alpha}$; dunque $y-y'=\frac{\alpha+a}{1-a\alpha}(x-x')$ è l' equazione desiderata.

Se la retta debba condursi perpendicolarmente alla retta data, si ha $\alpha=\infty$ e però $y-y'=-\frac{1}{a}(x-x')$, e posto $y'+\frac{x'}{a}=b'$, $y=-\frac{1}{a}x+b'$. Al problema precedente può ricondursi quest' altro.

41. Problema. Per un punto dato nello spazio far passare una retta, che formi un angolo assegnato con una retta, data pure nello spazio.

Soluzione I.^{a} La retta cercata dovendo essere nel piano che passa pel punto dato e per la retta data, se x', y', z' sieno le coordinate del punto, ed $\mathrm{A}x+\mathrm{B}y+\mathrm{C}z+\mathrm{D}=0$ l' equazione del piano, si ha l'equazione $\mathrm{A}x'+\mathrm{B}y'+\mathrm{C}z'+\mathrm{D}=0$. Si determinino due punti della retta data per mezzo delle sue equa-

equazioni $x=a'z+\alpha'$, $y=b'z+\beta'$, e ne sieno x'', y'', z'', x''', y''', z''' le coordinate. Avendosi l'equazioni, $Ax'+By'+Cz'+D=0$, $Ax''+By''+Cz''+D''=0$, $Ax'''+By'''+Cz'''+D=0$ il piano espresso dall'equazione $Ax+By+Cz+D=0$, è determinato. Il punto e la retta si rapportino a due assi rettangolari presi nel piano stesso, ed il problema sarà ricondotto al precedente.

Soluzione 2.ª Essendo $x=az$, $y=bz$, l'equazioni della retta dimandata, siccome questa dee incontrare la retta data, si ha $(a-a')=\beta'(b-b')\alpha'$ e quindi $b=\frac{(a-a')\beta'+b'\alpha'}{\alpha'}$. Ora l'equazione del problema, chiamando γ il coseno dell'angolo assegnato, è $\frac{1+aa'+bb'}{\sqrt{(1+a^2+b^2)}\sqrt{(1+a'^2+b'^2)}}=\gamma$; dunque posta l'espressione di b si ha

$$\frac{\alpha'(1+aa'+b'^2)+\alpha'\beta'b'(a-a')}{\sqrt{(\alpha'(1+a^2+b^2)+\beta'^2(a^2+a'^2+2aa')+2\alpha')\beta'b'(a-a'))}\sqrt{(1+a'^2+b'^2)}}=\gamma$$

equazione di 2.° grado per rapporto ad a, e che somministra due valori per b, e due rette per la soluzione del problema.

Se la retta cercata debb'essere perpendicolare, si ha $\gamma=0$, ed $1+aa'+bb'=0$; ma $b=\frac{(a-a')\beta'+b'\alpha'}{\alpha'}$; dunque $1+aa'+\frac{\beta'b'(a-a')+b'^2\alpha'}{\alpha'}=0$; perciò $a=\frac{b'(a'\beta'-\alpha'b')-\alpha'}{a'\alpha'+b'\beta'}$, e $b=\frac{\alpha'\alpha'(b'\alpha'-a\beta')-\alpha'\beta'}{\alpha(a'\alpha'+b'\beta')}$

L'equazioni delle due rette dànno per le coordinate dell'incontro, $z=\frac{\alpha'}{a-a'}$, $y=\frac{b\alpha'}{a-a'}$, $x=\frac{a\alpha'}{a-a'}$ e poi $\frac{b\alpha'}{a-a'}=\frac{b'\alpha'}{a-a'}+\beta''$ cioè $(b-b')\alpha'=(a-a')\beta'$, che è la nota condizione dell'incontro. La lunghezza della retta che sotto l'angolo assegnato unisce il punto dato colla retta proposta è

$$\delta=\sqrt{\left[\left(\frac{\alpha'}{a-a'}-z'\right)^2+\left(\frac{b\alpha'}{a-a'}-y'\right)^2+\left(\frac{a\alpha'}{a-a'}-x'\right)^2\right]}$$
$$=\frac{1}{a-a'}\sqrt{\left[(\alpha'+(a'-a)z')^2+(b\alpha'+(a'-a)y')^2+a\alpha'+(a'-a)x')^2\right]}$$
$$=\frac{1}{a-a'}\sqrt{\left[(1+a^2+b^2)\alpha'^2+2\alpha'(a'-a)(z'+by'+ax')+(a'-a)^2(z'^2+y'^2+x'^2)\right]}$$

Doll'

Dell' esposto problema non conosciamo altra soluzione che quella del Profess. Monge; dessa per altro è soverchiamente operosa, e si riferisce al solo caso, in cui la retta richiesta debb'essere perpendicolare alla retta data.

42. Problema Per una retta data nello spazio condurre un piano che faccia con un dato piano un angolo assegnato.

Soluz. Posta l'origine de' piani coordinati nel punto in cui la retta incontra il piano dato, sia $z = A'x + B'y$ l'equazione del piano dato, $z = A''x + B''y$ l' equazione del piano richiesto, ed $x = az$, $y = bz$, l' equazioni della retta. Essendo x', y', z', le coordinate del suo punto d' incontro, e γ il coseno dell' angolo assegnato, si ha $z' = A''x' + B''y'$, $\gamma' = \frac{A'A'' + B'B''}{\sqrt{(A'^2+B'^2+1)}\sqrt{(A''^2+B''^2+1)}}$ e da queste due valori per A'', B''.

Se la retta è nel piano dato, posta l'origine in un punto della medesima, si ha per essa la sola equazione $x = az$; quindi $\frac{x}{a} = A'x + B'y$ e però $y = x\,\frac{(1-aA')}{aB'}$. Con questo l' equazione del piano richiesto è $\frac{x}{a} = A''x + B''x\,\frac{(1-aA')}{aB'}$, cioè $B''(1-aA') = B'(1-aA'')$, equazione che combinata con $\gamma' = \frac{A'A''+B'B''}{\sqrt{(A'^2+B'^2+1)}\sqrt{(A''^2+B''^2+1)}}$ dà i due valori per A'', B''.

Accenno per ultimo il seguente

Teorema. Un angolo solido di n facce è determinato quando sono dati i suoi n angoli piani ed $n - 3$ de' suoi angoli diedri.

43. Sino ad ora la risoluzione analitica de' poligoni si è fatta dipendere dai teoremi seguenti

$$\left.\begin{array}{l} A\,\text{sen.}a' + B\,\text{sen}\,(a'+b') + C\,\text{sen.}(a'+b'+c') \ldots \\ + W\,\text{sen.}\,(a'+b'+c' \ldots + w) = 0 \\ A\cos.a' + B\cos.(a'+b') + C\cos.(a'+b'+c') \ldots \\ + W\cos.(a'+b'+c' \ldots + w) = 0 \end{array}\right\} \ldots (K)$$

dove A, B, C ... W sono i lati del poligono, ed a', b', c' ... w sono no gli angoli esterni, tali che a' sia compreso fra il lato A ed il prolungamento del lato B; b' fra il lato B ed il prolungamento del lato C, ec.; e si è creduto di facilitarne l'applicazione, deducendone due equazioni ausiliari, che trattandosi de' quadrilateri sono

$$D^2 = A^2 + B^2 + C^2 + 2AB\cos. b + 2AC\cos.(b'+c') + 2BC\cos.c' = 0$$

$$D^2 + C^2 + 2CD\cos.d' = A^2 + B^2 + 2AB\cos.b'$$

le quali per altro, nè si derivano con semplicità, nè si applicano comodamente. Noi passiamo a dimostrare che i soli teoremi (K), purchè si riducano ad una forma opportuna, bastano per ottenere in una maniera semplicissima la risoluzione di cui si tratta.

Per li quadrilateri i teoremi (K) divengono

$$A\,\text{sen}.a' + B\,\text{sen}.(a'+b') + C\,\text{sen}.(a'+b'+c') = 0$$

$$A\cos.a' + B\cos.(a'+b') + C\cos.(a'+b'+c') = 0$$

e perchè $a'+b'+c' = 400.^\circ - d'$, possono ridursi alla forma seguente

$$A\,\text{sen}.a' + B\,\text{sen}.(a'+b') - C\,\text{sen}.d' = 0$$

$$A\cos.a' + B\cos.(a'+b') + C\cos.d' + D = 0$$

Si moltiplichi la prima di quest' equazioni per $\cos.a'$, la seconda per $\text{sen}.a'$, e sottraendo il primo prodotto dal secondo si avrà

$$-B\,\text{sen}.b' + C\,\text{sen}.(a'+d') + D\,\text{sen}.a' = 0$$

Dunque i teoremi ausiliari per la risoluzione de' quadrilateri posson essere i seguenti

$$\left.\begin{array}{l} A\,\text{sen}.a' + B\,\text{sen}.(a'+b') - C\,\text{sen}.d' = 0 \\ D\,\text{sen}.a' + C\,\text{sen}.(a'+d') - B\,\text{sen}.b' = 0 \end{array}\right\} \ldots (M)$$

Per vedere con qual facilità i teoremi precedenti si prestino alla risoluzione di cui si tratta, sia

Probl. 1.° Dati A, B, C, a' b', trovare D e d', c'.

Soluz. Dalla prima equazione (M) si ha $\text{sen}.d' = \frac{A\,\text{sen}.a' + B\,\text{sen}.(a'+b)}{C}$ e però dalla seconda $D = \frac{B\,\text{sen}.b' - C\,\text{sen}.(a' + A\,\text{sen}.a' + B\,\text{sen}.(a'+b'))}{\text{sen}.a'}$.

Probl. 2.° Dati a', b', d' ed A, B, trovare C, D.

Soluz. Dalla prima $C = \frac{A\,\text{sen}.a' + B\,\text{sen}.(a'+b')}{\text{sen}.a'}$, e dalla seconda

D=

$$D = \left[B\,\text{sen}.b' - [A\,\text{sen}.a' + B\,\text{sen}.(a'+b')]\,\frac{\text{sen}.(a'+d')}{\text{sen}.a'} \right] : \text{sen}.a'.$$

Probl. 3.° Dato l' angolo b, gli angoli a, c, retti ed i lati A, B che comprendono l' angolo b, trovare i lati C, D.

Soluz. Si ha $b' = 200° - b$, $a' = 100°$, $c' = 100°$, $d' = 400° - (200° + b') = 200° - b' = b$.

Dunque l' equazioni (M) divengono

$$A + B\,\text{sen}.\,(300° - b) - C\,\text{sen}.b = 0$$
$$D + C\,\text{sen}.\,(100° + b) - B\,\text{sen}.\,(200° - b) = 0$$

cioè

$$A - B\cos.b - C\,\text{sen}.b = 0$$
$$D + C\cos.b - B\,\text{sen}.b = 0$$

Dalla prima $C = \frac{A - B\cos.b}{\text{sen}.b}$, e però dalla seconda $D = B\,\text{sen}\,b - \cos.b\left(\frac{A - B\cos.b}{\text{sen}.b}\right) = \frac{B - A\cos.b}{\text{sen}\,b}$. Il problema precedente è stato sciolto da *Legendre* (Elem. de Géom. Note V.) col soccorso di una costruzione geometrica, adattata al caso che sia $b < 50°$.

I teoremi (K) per li poligoni di cinque lati, posto $a' + b' + c' + d' = 400° - e'$, sono

$$A\,\text{sen}.a'' + B\,\text{sen}.(a'+b') + C\,\text{sen}.\,(a'+b'+c') - D\,\text{sen}.e' = 0$$
$$A\cos.a' + B\cos\,(a'+b') + C\cos.\,(a'+b'+c') + D\cos.e' + E = 0$$

e tolta la prima equazione moltiplicata per $\cos.a$, dalla seconda moltiplicata per $\text{sen}.a'$, divengono

$$A\,\text{sen}.a' + B\,\text{sen}.\,(a'+b') + C\,\text{sen}\,(a'+b'+c') - D\,\text{sen}.e' = 0$$
$$E\,\text{sen}.a' + D\,\text{sen}.(a'+d') - C\,\text{sen}.\,(b'+c') - B\,\text{sen}.\,b' = 0$$

Per gli esagoni trovansi nello stesso modo l' equazioni

$$A\,\text{sen}.a' + B\,\text{sen}.(a'+b') + C\,\text{sen}.(a'+b'+c') + D\,\text{sen}.(a'+b'+c'+d') - E\,\text{sen}.f' = 0$$
$$F\,\text{sen}\,a' + E\,\text{sen}.(a'+f') - D\,\text{sen}.(b'+c'+d') - C\,\text{sen}\,(b'+c') - B\,\text{sen}.b' = 0$$

In generale, operando su i teoremi (K) senza procedere per induzione, se i lati sieno A, B, C, D ... U, V, W, e gli angoli esterni corrispondenti a', b', c', d' ...u,v, w, si hanno i teoremi che seguono

$$A\,\text{sen}.a' + B\,\text{sen}.(a'+b') + C\,\text{sen}.(a'+b'+c') \ldots + U\,\text{sen}.(a'+b'+c'+d' \ldots + u) - V\,\text{sen}.W = 0$$
$$W\,\text{sen}.a + V\,\text{sen}.(a'+w) \ldots + D\,\text{sen}.(b'+c'+d') - C\,\text{sen}.(b'+c') - B\,\text{sen}.b' = 0$$

L' Articolo precedente potrebb' estendersi molto più, derivanvando dai due teoremi ridotti molte delle formole proposte senza dimostrazione dal Prof. Mascheroni (*Problemi per gli Agrimensori*) e da lui ottenute col soccorso di particolari metodi geometrici.