SCHIARIMENTI

INTORNO A' PRINCIPJ D' ANTEPORSI NELL' APPLICAZIONE DE' COMUNEMENTE NOTI ALLA SOLUZIONE DE' PROBLEMI MECCANICI.

Di Paolo Delanges

Ricevuti il dì 4 Maggio 1805.

§. I.

Trattando io de' *Principj di Statica per i tetti, per i ponti e per le volte* nel Tomo XI degli Atti della nostra Società, feci conoscere principalmente, che per conseguire l' esatta soluzione de' problemi statici elementari risguardanti gli accennati soggetti, mediante i noti principj della composizione e della risoluzione delle forze, e delle minime azioni, o velocità virtuali, forz' è primieramente *di non ammettere nessuna attività ne' punti o sostegni d' appoggio, non essendo essi atti che a resistere alle forze perpendicolari a' piani in cui consistono*; ed in secondo luogo *di rilevare la linea che descriverebbe il centro di gravità d' una verga pesante; o le linee che descriverebbero i centri di gravità di più verghe combinate insieme in data posizione, se concesso fosse ad esse un libero movimento*: onde non solo ottenere l'esatta loro soluzione, ma eziandio scoprire la naturale e completa economia o distribuzione di tutte le forze componenti il proposto sistema.

§. II.

La presente soluzione che potrebbe proporsi per un caso del problema elementare da me discusso nella citata mia Memoria mi eccitò alla compilazione di questa.

Sia

Sia AB (Fig. I. Tav. I.) una verga inflessibile e senza gravità, nell' estremità A siavi attaccato un corpo pesante raccolto nel punto A.

Se la verga vien posta fra due piani DV, DR *uno orizzontale e l'altro verticale colla inclinazione* ABD $= \varphi$; *sarà la spinta orizzontale nel punto* B $=$ P. cot.φ. *Quindi può aggiungersi. Ora secondo Delanges questa sarebbe* $= 0$ (*Tom. cit. pag.* 194. *coroll. I.*) *: dunque la sua dimostrazione è erronea.*

Ora io passerò primieramente a dimostrare le assurdità della proposta soluzione, e poscia dimostrerò, come, nel contemplato caso particolare, il risultato dedotto dalla formola generale appoggiata alla mia teoria non è altrimenti erroneo; ma anzi conforme a' principj elementari della geometria.

§. III.

Essendo, posto il raggio $= 1$, sen. φ : cos. $\varphi = 1$: cot. φ, sarà cot. $\varphi = \frac{\text{cos.}\,\varphi}{\text{sen.}\,\varphi}$: dunque la spinta orizzontale, secondo la riferita soluzione, sarà presentata egualmente dalla formola P. $\frac{\text{cos.}\,\varphi}{\text{sen.}\,\varphi}$ . . . . . . (Y); vale a dire che denotando AF (Fig. II. Tav. I.) il peso raccolto nel punto A, condotta l'orizzontale FC, e descritto il parallelogrammo ACFG, dovrebbe dividersi la forza AC in direzione della verga nella verticale CH e nella orizzontale AH eguale a CF, per avere in questa la ricercata spinta orizzontale all' estremità B espressa dalla formola (Y).

Se pertanto s' intendesse che l' esposta soluzione dovesse valere egualmente se attaccato fosse il *corpo pesante* in qualsivoglia altro punto C della verga, si avrebbe allora proposto una soluzione più imperfetta di tutte le soluzioni pel passato conosciute; avvegnachè, come io dimostro (Tom. cit. pag. 188.) comprenderebbe essa insieme i due difetti a cui quelle soggiacciono, cioè quello di dare il valore della ricercata spinta senza veruna relazione alla posizione del punto, a cui è attaccato il *corpo pesante* all' immaginata *verga inflessibile e senza gravità*, e di dar-

lo

lo infinito nella posizione orizzontale. Che se in fine si ammettesse, che negli altri punti, eccettuato quello della sua estremità A, l' azione del *corpo pesante* dipender dovesse dalla ragione de' segamenti BC, CA, allora niente di nuovo si avrebbe scoperto, e non si avrebbe che ripetuta l' antica soluzione di Couplet, di cui (pag. cit.) io ne rappresento il generale risultato nella formola (A), e faccio osservare che conduce essa pure al secondo sopraccennato assurdo.

§. IV.

Ma qui può rispondersi I.° Che anche nella mia soluzione *supposto il corpo nella metà della lunghezza della verga, si ottiene la spinta orizzontale* $=$ p. sen. ϕ. cos. ϕ, *che non contiene più nè* a *nè* b. II.° Che *intorno al paradosso risultante* dall' antica formola di Couplet *nel caso di* $\phi = 0$, *Gregorio Fontana dice* (*Soc. Ital. Tom. III. pag.* 530.) *che Lorgna ne ha dato* (*Saggi di Statica* §. *XI.*) *una ragione assai plausibile*. III.° *Che oltre all' inesattezza della mia formula nel caso che il corpo sia posto in* A *estremità superiore della verga inflessibile* AB, *sembra* IV.° *che la soluzione del* 1.° *problema* (Tom. cit. pag. 190 e 191) *a cui s' appoggia la stessa formola, sia radicalmente inesatta*. Pretendo io *che la forza* Cm $=$ BM (Fig. III. Tav. I.) esprima la spinta orizzontale che esercita la verga in B. *Ma siccome le forze non si trasportano arbitrariamente da un punto all' altro e da un piano all' altro come le linee, egli è evidente che la forza* Cm, *ancorchè trasportata altrove, non può esprimere che la spinta orizzontale del punto* C, *ossia* (*per parlare più esattamente*) *quella parte della spinta orizzontale di* C *che proviene dalla forza* Ch: *quindi la stessa* Cm $=$ BM *non potrà mai rappresentare la totale spinta orizzontale del punto* B.

§. V.

Che la spinta orizzontale nella supposizione che il centro di gra-

gravità cada nella metà della verga dipenda solamente dal suo angolo d'inclinazione lo dimostro così. La verga AB (Fig. IV. Tav. I.) inclinata nel dato angolo ABD si prolunghi quanto piace in a', e condotta aa' parallela a BD, si meni ab parallela ad AB, e nelle verghe AB, a'B, ab cadano i loro centri di gravità C, c, c' nella metà della respettiva lunghezza. È manifesto che i triangoli ABD, a'Bd, abD sono simili tra di sè; ma dimostrai (Tom. cit. pag. 193.), che nel caso supposto, la determinazione della spinta orizzontale si ha dalla ragione de' lati de' triangoli predetti: dunque indifferente si è l' elemento della lunghezza della verga, nè deve dipendere la spinta all' estremità B che dall' angolo d'inclinazione ABD.

§. VI.

Per convenire che nulla debba essere la spinta orizzontale nelle due posizioni della verga verticale ed orizzontale, e non solamente nulla nella prima ed infinita nella seconda, è duopo distinguere il problema d' investigare la spinta all'estremità B d'un trave AB (Fig. V. e VI. Tav. I.) contro un ostacolo O, ovvero un pilastro inerte BC, da quello di ricercare la forza BI d' applicarsi all' estremità B (Fig. VII. Tav. I.) per tenere fronteggiato il trave AB contro il muro AD nel dato angolo d' inclinazione ABD. Ognun vede che nel primo problema, sì, accostandosi l'ostacolo verso il muro AD, che allontanandosi da esso, finchè il trave AB si riduca verticale in aD, od orizzontale in $a'b'$, termina esso di spignere in tali due posizioni orizzontalmente in amendue le sue estremità, e inutile rimane, come la presenza del muro, così quella dell' ostacolo, venendo nella circostanza della figura V, nel primo e secondo caso sostenuto l' intero peso del trave dal piano orizzontale, ed in quella rappresentata dalla figura VI verrebbe sostenuto dal pilastro BC ridotto contiguo al muro AD, e capovoglierebbesi ridotto nella distanza orizzontale Ba eguale alla lunghezza dello stesso trave. Nel secondo problema poi, in cui la direzione e la quantità della forza BI (Fig. VII. Tav. I.) si determina pel noto principio della composizione e della risoluzione delle forze, col condurre l' orizzontale AF, e dal punto F, in cui è intersecata dalla verticale CF alzata dal centro di gravità C del trave la FBI, e costruendo il parallelogrammo FGCH, cognita soluzione di Couplet, e che dà un risultato conforme a quello delle soluzioni proposte da Lorgna, Fontana, ec. (Tom. cit. pag. 188.); i primi elementi della meccanica bastano per comprendere che infinita deve essere la forza B*i* per rattenere il trave nella posizione orizzontale BD, come appunto lo dimostra la formola generale delle anzidette soluzioni. Ma è verità di fatto che col secondo problema intendevasi di sciogliere il primo, ch' è quello di cui abbisognava la meccanica: dunque resta esattamente dimostrato che la mia teoria non porta a risultato assurdo, ma a risultato vero e conveniente alla naturale condizione del problema, facendo conoscere che nulla egualmente si è la spinta della verga nelle due posizioni verticale ed orizzontale.

§. VII.

Per giudicare geometrico e non *inesatto* il risultamento somministrato dalla mia formola *nel caso che il corpo sia concentrato in* A (Fig. VIII. Tav. I.) *estremità superiore della verga inflessibile* AB, bisogna riflettere, che nell' astratta fatta supposizione, la verga AB è precisamente una retta linea matematica, e che perciò il punto A è comune sì ad essa verga, che alla retta AD rappresentante il piano verticale a cui si suppone appoggiata, e quindi manifestamente apparisce che nell' astratto immaginato caso la forza AS equivalente al peso P, supposto concentrato in A, cade esattamente sulla stessa verticale AD, e che perciò essendo essa sostenuta intieramente sul punto D dal piano orizzontale BD, non può esercitare veruna spinta orizzontale all' altra estremità inferiore B della verga AB. Non dovrà in conseguenza riguardarsi come paradosso o come inesatto il risultato a cui conduce la mia formola generale applicata a questo caso particolare, ma consono anzi all' essenza sua astratta, cui altronde non può

aver

aver luogo in natura giammai, ideandosi comunque deforme la verga di figura e di densità.

§. VIII.

Che finalmente sia radicalmente esatta e non *radicalmente inesatta la soluzione del problema* I. (Tom. cit. pag. 190 e 191), immaginandosi che non esprima la forza C*m* (Fig. III. Tav. I), che *quella parte della spinta orizzontale di* C *che proviene dalla forza* Ch; e che *quindi la stessa* Cm = BM *non potrà mai rappresentare la totale spinta orizzontale del punto* B, basta considerare, che risoluta l' altra forza C*n* nell' orizzontale C*r*, e nella verticale *nr*; venendo la prima sostenuta orizzontalmente dal muro in A, non rimane che la seconda da comporsi con la C*h* con la costruzióne del parallelogrammo *Chzt*, onde dalla composta Cz ottenere *la totale spinta* orizzontale del punto B: ma essendo la verticale *hz* per diritto alla verticale *hm*, cioè *mhz* una linea retta, come non può dubitarsi di ciò, così egualmente non deesi dubitare, che C*m* non sia l' intiera spinta orizzontale nel punto B.

§. IX.

Per farsi poi un' idea chiara sulla convenienza della distribuzione delle forze nella mia soluzione, e dimostrare di non aver io abusato di trasportare le forze *arbitrariamente da un punto all' altro, e da un piano all' altro come le linee*, quantunque, se avessi errato io in ciò, avrei errato, e con chi volesse sostenere questa opinione, e con i matematici di tutti i tempi; si consideri I.° che gli sforzi che esercita la verga pesante AB in istato di equilibrio (Fig. III. Tav. I.), di cui il suo centro di gravità sia C, sono quegli stessi che eserciterebbe nell'astratta supposizione che la verga fosse priva di gravità, ed a cui fosse attaccato un peso nel punto C, rappresentato dalla verticale CG eguale a quello della verga pesante; II.° che l'azione del peso o della forza CG dee distribuirsi su i punti d' appoggio A e B; e III.° che in

A non

A non può essere sostenuta dalla reazione del muro che una forza orizzontale, ed in B dalla reazione del piano orizzontale una forza verticale. Posti tali principj non può non ammettersi, che risoluta, secondo la mia teoria, la forza CG nelle due C*n*, C*h*, e la C*n* nella orizzontale C*r* diretta contro il muro AD, e nella verticale C*t* contro il piano orizzontale; e la C*h* nell' orizzontale C*m* tendente ad allontanare la verga dal piano verticale, e nella verticale C*o* diretta contro il piano orizzontale, non può non ammettersi, dico, che nello stato di equilibrio della verga, la forza orizzontale C*r* sia quella che sostiene il muro verticale in A, che le verticali C*t*, C*o* insieme prese eguali al peso CG, vengano sostenute verticalmente dal piano orizzontale in B, e che l' orizzontale forza C*m* debba sostenersi orizzontalmente in B, cioè che essa sia l' intera spinta orizzontale che esercita alla sua estremità B. Per convincersi in altra guisa di ciò, egli è evidente, che supposto raccolto nel solo punto C il totale peso della verga, rappresentato dalla verticale CG, e tendendo esso a discendere nel primo istante per la tangente CH alla curva FCE, la forza C*h* ne rappresenta il suo momento alla discesa tutto diretto all'estremità B della verga: quindi non dee giudicarsi arbitraria la trasposizione della forza C*h* in BL, e molto meno che BM uguale a CL non rappresenti la totale spinta orizzontale, derivante dal totale peso della verga alla sua estremità B. Che se volessero risolversi le forze, C*h*, C*n*, che sarebbe lo stesso che risolvere alla bella prima la loro risultante CG in direzione orizzontale, ed in direzione della stessa verga, si caderebbe allora nel risultato delle summentovate soluzioni, che come ho dimostrato (§. VI.), non è conveniente al problema in discussione.

§. X.

Riguardo poi all' altra obbiezione che può farsi contro la mia teoria applicata alla soluzione del solito problema della verga, usando del principio delle velocità virtuali, cioè che non sia $p\left(\frac{-dxdy}{dx^2+dy^2}\right)$ (Tom. cit. pag. 203) la spinta orizzontale del pun-

to

to B; ma che *per ottenere questa spinta bisogna ricercare le velocità virtuali di* S *e di* B, e discorrere così. *Ora mentre il peso* S (Fig. IX Tav. I.) *percorre lo spazio* RS = Cc, *l' estremità* B *della verga non percorre lo spazio* dx, *ma lo spazio* Bb; *cosicchè la velocità virtuale di* S è Cc, e *quella di* B è B*b*, e chiamato X il peso equivalente alla spinta orizzontale in B, *si avrà l'equazione* $X.Bb = S.Cc = S\sqrt{(dx^2+dy^2)}$; ma essendo per la mia costruzione $S\sqrt{(dx^2+dy^2)} = -pdy$, *ne risulterà la cercata spinta orizzontale del punto* B $X = \frac{-pdy}{Bb}$

Riguardo all'esposta obbjezione, dico, è da osservarsi primieramente che l'equazione $X.Bb = S.Cc$ è impropria al principio delle velocità virtuali, avvegnachè, supposto un minimo movimento nella verga, non reagiscono uno contro l'altro i pesi X, S, e intanto ha luogo in quanto, che pel detto principio applicato secondo la mia costruzione, $p.Cn$ è uguale sì ad $X.Bb$, che ad $S.Cc$. Manifestamente poscia si conosce l'inutilità e l'inconcludenza dell'esposto lavoro, onde dimostrare insussistente l'analogia da me instituita per determinare nel quarto proporzionale a $\sqrt{(dx^2+dy^2)}$, dx, ed S, la spinta ricercata. Sembra per ultimo che dimostrato certo il risultato ottenuto dall'applicazione del principio della composizione e della risoluzione delle forze al problema, esatta pure e conveniente debba giudicarsi la mia applicazione allo stesso dell'altro principio delle velocità virtuali come conducente ad un identico risultamento; ho detto conveniente, mentre col determinare la spinta all'estremità B cercando il peso X, ossia la forza d'applicarsi alla sua estremità B per tenerla in equilibrio, non si risolve, come dimostrai (§. VI.), il proposto, ma un differente problema.

§. XI.

Rischiarata e confermata la mia teoria meccanica, mi si offre quì l'opportunità di farne l'applicazione al seguente problema, se non tanto utile, però non meno celebre di quello su cui s'è finora ragionato.

De-

Determinare l'angolo secondo cui dee inclinarsi la data verga AB (Fig. X. Tav. II.) *ad una parete verticale ed immobile* DC, *sicchè passando sopra un sostegno* O *dato di posizione, rimanga in equilibrio, sollecitata al moto da un peso* P *attaccato alla sua estremità* A.

Il P. Gregorio Fontana nel Tomo IX. degli Atti della nostra Società (pag. 626) dimostra che può sciogliersi tale problema co' noti e comuni principj della meccanica, non trovando necessario con Eulero di ricorrere al nuovo principio di Maupertuis, come può vedersi nel Tomo VI. degli Atti dell' Accademia di Berlino. Supponendo pertanto la verga AB priva di gravità e la superficie della parete perfettamente liscia, di maniera che non abbiasi a metter in computo nè il peso della verga, nè la resistenza dell' attrito, eccone la soluzione Fontana.

„ Si rappresenti colla retta BM perpendicolare al muro la „ reazione o resistenza che quivi incontra la verga, e si risolva „ anche la forza BM nelle due MN e BN, quella normale alla „ verga, questa in direzione di lei, quella tendente a rivolgerla „ intorno all' appoggio O, questa a farla correre sull' appoggio „ nella direzione BA. Guido dal sostegno O al muro la perpendicolare $OE = b$, e faccio l' angolo $BOE = \varphi$, tutta la verga „ $BA = a$, la sua parte $OB = x$, l' altra $OA = a - x$, il peso „ $P = p$, e la forza $BM = f$. Ora lo stato di equilibrio della verga „ esige queste due condizioni; 1.ª che non ci sia moto rettilineo „ di strisciamento sul sostegno O; 2.ª che non ci sia moto rotatorio intorno ad O; le quali condizioni importano 1.° l' eguaglianza delle forze opposte AG, BN; 2.° l' eguaglianza de' momenti delle forze GF, NM. Ma $AG = p . \text{sen.}\varphi$, $BN = f . \cos.\varphi$, „ $GF = p . \cos.\varphi$, $NM = f . \text{sen.}\varphi$. Si avranno dunque le due seguenti equazioni dell' equilibrio I.ª $p \,\text{sen.}\varphi = f \cos.\varphi$. II.ª „ $p(a-x)\cos.\varphi = fx \,\text{sen.}\varphi$; dalle quali, cacciando f, si avrà tosto $p(a-x)\cos.\varphi = \frac{px \,\text{sen.}^2\varphi}{\cos.\varphi}$, e quindi $(a-x)\cos.^2\varphi =$ „ $x \,\text{sen.}^2\varphi$,

„ x sen.$^2\varphi$, e per ultimo $x = a \cos.^2 \varphi = \frac{ab^2}{x^2}$, e conseguentemente

„ $x = \sqrt[3]{abb}$. Il che ec.

§. XII.

Siccome però potrebbe sembrare a taluno, come è sembrato a me stesso, non convenire nella riferita soluzione la risoluzione della forza BM nelle due BN, NM, dacchè con essa vuolsi rappresentare la reazione orizzontale in B che dee esercitare il muro EC nel ricercato equilibrio della verga AB; così prima di procedere nella propostami discussione del problema, farò vedere essere nullameno tale quale risultò a Fontana, il risultamento che può ottenersi per la soluzione di esso da' comuni principj della meccanica. Divisa la forza AF (Fig. XI. Tav. II.) denotante il peso P nella perpendicolare FG e nella AG in direzione della verga, prolungata questa in Q, sicchè sia BQ eguale ad AG, e menata l' orizzontale SBM che concorra in S colla QS perpendicolare a BQ, si compiano il parallelogrammo SR, ed il rettangolo BM. Si chiami poscia $AB = a$, $OB = x$, $OA = a - x$, $OE = b$, ed $AF = p$; sarà $BE = \sqrt{(x^2 - b^2)}$, e per la somiglianza de' triangoli BOE, AGF, sarà la forza $AG = \frac{p}{x}\sqrt{(x^2 - b^2)}$, e la $GF = \frac{bp}{x}$. E poichè si è fatta BQ eguale alla forza AG, e la BQ si è risoluta nella BS perpendicolare al muro EC, e nella BR perpendicolare alla verga AB, equivalerà l' azione della forza AG contro il muro EC alla BS equilibrata dalla reazione dello stesso muro, ed alla forza BR tendente a far girare la verga intorno al punto O in direzione contraria a quella a cui tende di farla girare la forza GF all' altra sua estremità A: e perciò pel richiesto equilibrio della verga dovrà essere $BR . BO = GF . AO$; ma per la somiglianza de' triangoli BQR, BOE, si ha $BR = \frac{p(x^2 - b^2)}{bx}$: dunque sarà

$$\frac{p(x^2 - b^2)x}{bx}$$

$$\frac{p(x^2-b^2)x}{bx} = \frac{bp}{x}(a-x)$$

e quindi $x = \sqrt[3]{abb}$, come risulta dalla sopraccitata soluzione dell' Eulero, o dalla rapportata del Fontana, quantunque non abbia io, come esso, creduto necessaria una forza di reazione in B, come BN eguale e contraria alla AG, per impedire *il moto rettilineo di strisciamento sul sostegno* O; il che veramente non può pretendersi dall' inerzia del muro, cui non resiste che in quanto è desso perpendicolarmente alla sua superficie premuto; nè saprei attribuire l' identità del risultato, che alla combinazione, dirò così, geometrica, cioè, che per la fatta costruzione ne segue, che la diagonale QB sia eguale al lato BN, e perciò che anche BN sia eguale ad AG. È inoltre osservabile che volendosi determinare OF, cioè porre OF $= x$, si perviene all' equazione completa del sesto grado

$$(b+x)^2[(b+x)^4 - 2a^2(b+x)^2 + a^4] - a^4x^2 = 0$$

ma sapendosi che è BO $= \sqrt[3]{ab^2}$, sarà AO $= a - \sqrt[3]{ab^2}$, e sta BO ad OE come AO ad OF: dunque OF $= x = \frac{ab - \sqrt[3]{ab^2}}{\sqrt[3]{ab^2}}$ e però $x - \frac{ab}{\sqrt[3]{ab^2}} + b = 0$, oppure, moltiplicando il numeratore ed il denominatore della frazione $\frac{ab}{\sqrt[3]{ab^2}}$ per $\sqrt[3]{a^2b}$, $x - \sqrt[3]{a^2b} + b = 0$ dovrà essere una sua radice, come esattamente vi soddisfà. Ciò posto si trova, che in siffatta posizione di equilibrio, è la reazione del muro, cioè la forza BM $= \frac{p}{b}\sqrt{\left(b\sqrt[3]{a^2b} - b^2\right)}$.

§. XIII.

§. XIII.

Ma lasciando da parte il principio di Maupertuis, il quale in fine conduce allo stesso risultato, quantunque, come osserva Fontana, sia *un poco precario* (luogo cit.), l'esposta soluzione di tale problema coll' usata applicazione del principio della composizione e della risoluzione delle forze costringe a dover ammettere I.° che sotto qualunque angolo d' inclinazione la verga AB sia intenta e pronta a strisciare coll' estremità B lungo il muro soltanto verso il centro de' gravi; il che è contro il fatto che può da ogn' uno sperimentarsi; II.° che nelle inclinazioni in cui è in movimento la verga, l'estremità A sia disposta a girare circolarmente intorno al sostegno O, il che pure è contro il fatto, mentre strisciando essa allora coll' estremità B o verso E, o verso G percorrendo coll' estremità B la retta Bb, o Bb', coll' altra estremità A percorre gli archi Aa Aa' proprj d' una curva non circolare; e III.° non apparisce per ultimo, o non immediatamente risulta, sostenere nello stato di equilibrio l' appoggio O la pressione equivalente al solo peso P: dico al solo peso P, poichè egli è un principiò elementare della Statica, che se vuolsi tenere in equilibrio il peso P (Fig. XII. Tav. II.) attaccato all' estremità A del vette AOB supposto privo di gravità, con altro peso R attaccato all' altra estremità B, il sostegno O soffre la pressione equivalente alla somma de' pesi P ed R; ma se il vette è tenuto in equilibrio mediante un ostacolo inerte in B, allora non sente che la pressione proveniente dal peso P, venendo estinta l' azione di esso all'estremità B dalla reazione del detto ostacolo. Così essendo, m'accingerò ora a risolvere questo illustre problema colla direzione della mia teoria.

§. XIV.

Prima d' ogni cosa pertanto è duopo scoprire l' equazione alla curva che descrive coll'estremità A la verga AB in movimento

(Fig. XIII. Tav. II.); che però si faccia l' ascissa OI $= x$, l' ordinata AI $= y$, e sarà OA $= \sqrt{(x^2 + y^2)}$; posta poi la lunghezza della verga AB $= a$, e la distanza dell' appoggio O dal muro DC, cioè la perpendicolare OE $= b$, si avrà per la somiglianza de' triangoli AOI, BOE, BO $= \frac{b}{x} \sqrt{(x^2 + y^2)}$, e quindi

$$\frac{b}{x} \sqrt{(x^2 + y^2)} + \sqrt{(x^2 + y^2)} = a$$

e sarà (A) l' equazione alla curva HAZaO

(A) . . . $x^4 + 2bx^3 + (b^2 + y^2 - a^2)x^2 + 2by^2.x + b^2y^2 = 0$

da cui si rileva, che la curva ha per asse OH $= a - b$, e che all' ascissa OG $= \sqrt[3]{a^2 b} - b$ corrisponde la massima ordinata GZ, sicchè la tangente RS al punto Z è orizzontale, cioè parallela all' asse OH; e che le tangenti alla curva da Z in H s' incontrano coll' asse dalla parte GF, e le tangenti ai punti da Z in O dalla parte Gf. Considerando pertanto che l' estremità A della verga AB, sollecitata al moto dal peso P, tende nel primo istante a muoversi nella direzione della tangente AF; è chiaro che nelle posizioni della verga comprese dall' arco ZAH tenderà coll' altra estremità B a strisciare lungo il muro da B in su verso D, e che nelle posizioni comprese dall' arco ZaO, tenderà viceversa coll' estremità b a strisciare in giù da b verso C; e siccome non è atto il muro che di reagire contro una forza ad esso perpendicolare, così ne segue che in nessuna delle accennate posizioni potrà la verga restare in equilibrio. Disposta poi la verga nell'inclinazione b'OZ diretta all'estremità Z della massima ordinata GZ, tendendo in questa posizione a moversi l' estremità A nel primo istante per l'orizzontale ZS, l' altra estremità b' non avrà movimento strisciante lungo il muro, e però l' azione del peso P all' estremità Z potendo essere equilibrata dalla reazione perpendicolare del muro, in tale posizione unicamente si manterrà la verga in equilibrio, e la determinazione del suo angolo d' inclinazione dipenderà dal valore di OG $= \sqrt[3]{a^2 b} - b$. Menate poi l' orizzontale b'M, e la verti-

ca-

cale OM, ed inoltre condotte la GS parallela alla verga $b'OZ$, e la verticale OR, che incontrino la tangente orizzontale RZS ne' punti S ed R, indicando l' ordinata ZG il peso p, sarà la forza orizzontale $ZS = p\left(\frac{c}{\sqrt{(a^2-c^2)}}\right)$, ponendo $\sqrt[3]{a^2b} = c$, e rappresentando $b'M$ la reazione esercitata dal muro, si avrà $b'M = p\left(\frac{c}{\sqrt{(a^2-c^2)}}\right) \times \frac{OR}{OM}$; ma siccome in questo caso è $p\left(\frac{c}{\sqrt{(a^2-c^2)}}\right) \times \frac{OR}{OM} = p\left(\frac{OG}{OM}\right)$, sarà anche la reazione del muro $b'M = p\left(\frac{OG}{OM}\right) = \frac{p}{b}\sqrt{\left(b\sqrt[3]{a^2b} - b^2\right)}$, risultato identico a quello che si ottiene dalle riferite soluzioni (§. XII).

§. XV.

Scoperta la curva OZAH (Fig. XIV Tav. II), si vedrà ora come agevolmente si risolva col principio delle velocità virtuali il proposto problema. Si chiami BV la forza necessaria per impedire lo strisciamento lungo il muro dell' estremità B della verga AB a cui tende, parlando delle inclinazioni comprese dall' arco ZAH in virtù del peso P attaccato all' altra sua estremità A. Supposto un minimo movimento nella verga, sicchè l' estremità A abbia percorso l' archetto infinitesimo Aa della curva, e l' estremità B lo spazietto infinitesimo verticale Bb, e siasi trasferita la verga BOA in bOa; calata l'ordinata AI e l' infinitamente prossima ai, e tirata l'orizzontale ao, dovrà pel principio delle velocità virtuali essere $VB \,.\, Bb = P \,.\, Ao$, cioè $VB = P\left(\frac{Ao}{Bb}\right)$. Ora essendo l' ascissa $OI = x$, menata st parallela ad ao, sarà $Ii = st = ao = dx$; dall' equazione alla curva (§. XIV) si ha poi

$$AI = y = \frac{x}{b+x}\sqrt{\left(a^2 - (b+x)^2\right)}$$

sarà differenziando

$$Ao = -dy = dx\left(\frac{(b+x)^3 - a^2b}{(b+x)^2\sqrt{(a^2-(b+x)^2)}}\right)$$

e quine quindi essendo $\mathrm{OI} : \mathrm{IA} = st : ta = os$, si avrà

$$os = \frac{dx}{b+x} \sqrt{\left(a^2 - (b+x)^2\right)}$$

e però

$$\mathrm{A}s = dx \left(\frac{(b+x)^3 - a^2 b}{(b+x)^2 \sqrt{\left(a^2 - (b+x)^2\right)}}\right) + \frac{dx}{b+x} \sqrt{\left(a^2 - (b+x)^2\right)}$$

ed essendo inoltre $\mathrm{AO} : \mathrm{OB} = \mathrm{OI} : \mathrm{OE} = \mathrm{A}s : \mathrm{B}b$, sarà

$$\mathrm{B}b = \frac{b\,dx}{x} \left(\frac{(b+x)^3 - a^2 b}{(b+x)^2 \sqrt{\left(a^2 - (b+x)^2\right)}} + \frac{\sqrt{\left(a^2 - (b+x)^2\right)}}{b+x}\right)$$

e perciò la forza verticale

$$\mathrm{VB} = \mathrm{P} \left(\frac{\mathrm{A}o}{\mathrm{B}b}\right) = \frac{\mathrm{P}\left(x(b+x)^3 - a^2 bx\right)}{b\left((b+x)^3 - a^2 b\right) + b(b+x)\left(a^2 - (b+x)^2\right)}.$$

Siccome nulla dee diventare la forza verticale lungo il muro nell' inclinazione della verga in equilibrio, così eguagliando a zero la trovata formola, si avrà l' equazione del terzo grado

$$(x+b)^3 - a^2 b = 0$$

che ha due radici immaginarie, e la reale si è $x = \sqrt[3]{a^2 b} - b$; dal che risulta, come s' è veduto superiormente, che la verga dee essere inclinata al punto Z della massima ordinata GZ per restare in equilibrio: così posto in luogo d' x il valore $\sqrt[3]{a^2 b} - b$ dell' ascissa della massima ordinata, si scopre, che in tale inclinazione diventa nulla la forza verticale all' estremità B, convertendosi la trovata formola in $\mathrm{VB} = \varphi \dfrac{0}{\left(a^2 b \sqrt[3]{a^2 b} - a^2 b^2\right)} = 0$ e supponendosi la verga nella posizione orizzontale EOH, cosicchè sia $x = a - b$, si rileva come deve essere $\mathrm{VB} = \mathrm{P}\left(\frac{a-b}{b}\right)$.

§. XVI.

Non è difficile poi di rilevare la ragione della identità di risultati tra la riferita (§. XII) e la mia soluzione riguardo alla ri-

ricerca dell' inclinazione in cui può mantenersi la verga in equilibrio: imperocchè fatta la solita risoluzione della forza AF (Fig. XV Tav. II) rappresentante il peso P, e della forza orizzontale BM occorrente all' equilibrio della verga AB, onde la forza BN sia uguale e contraria alla forza AG, ed il momento della BR uguale al momento della CF o Af intorno all'appoggio O; si conduca per O la verticale mO, e sarà per la somiglianza de' triangoli BRM, BmO, il momento di BR uguale al momento di BM, e per la somiglianza de' triangoli AOF, AfF, il momento della forza Af uguale al momento della forza AF: dunque sarà anche il momento della forza BM uguale al momento della forza AF come accade nella nostra soluzione (§. XIV). Per conoscere però chiaramente l'incertezza dell' uso del principio della risoluzione delle forze, senza il soccorso degli accennati principj (§. I), imprenderò la soluzione di tale problema generalmente, cioè. *Determinare in una data inclinazione della verga* AB (Fig. XVI Tav. II), *eccettuata quella dell' equilibrio, la spinta orizzontale e la spinta verticale che esercita all' estremità* B *contro il muro* DC.

§. XVII.

Si ponga che la verga AB sia quadrupla della distanza OE, e che sia inclinata in maniera che OF sia doppia di OE. Chiamata al solito OE $= b$, sarà OF $= 2b$, la verga AB $= 4b$, e sarà il segamento BO $= \frac{4}{3}b$, e l' altro AO $= \frac{8}{3}b$; e quindi AF $= \frac{8}{3}b\sqrt{7}$, e BE $= \frac{b}{3}\sqrt{7}$. Rappresentato da AF il peso P, si costruisca il rettangolo Gf, e fatta BN uguale ad AG, e tirata l'orizzontale BM si costruisca il rettangolo NR. Si troverà com' è noto, la forza AG $=$ BN $= p\,.\frac{\sqrt{7}}{4}$; e la forza A$f = p\,.\frac{3}{4}$, e la forza BR $= p\,.\frac{7}{16}$; ma per l' equilibrio della verga la forza BR dovrebbe essere doppia della Af, cioè BR $= p\,.\frac{24}{16}$: dunque nella la data inclinazione non può mantenersi in equilibrio, ed è costretta a strisciare coll' estremità B lungo il muro in su da B verso D. Suppongasi arrestato questo moto da una maggior grossezza superiormente al punto B della muraglia, come dimostra la figura, e si cerchino in tale circostanza la forza verticale, e la forza orizzontale esercitate dalla verga alla sua estremità B contro il muro. Seguendo il comune metodo di applicare i noti principj meccanici al problema, è manifesto, che per tenere in equilibrio la verga AB nella data inclinazione, è necessaria una forza Bm risultante della BN eguale e contraria alla AG, e della Br parallela e doppia della Af; e siccome la forza BN è impiegata ad impedire alla verga di strisciare sull' appoggio O, dalla sola forza Br intenta ad impedire il moto rotatorio, dovranno dedursi le forze ricercate, e perciò tirata l' orizzontale rC, essendo la forza $Br = p \cdot \frac{3}{2}$, per la somiglianza de' triangoli AOF, BCr, si troverà essere la forza verticale in B, cioè $BC = p \cdot \frac{18}{16}$, e l'orizzontale $Cr = p \cdot \frac{6\sqrt{7}}{16}$.

§. XVIII.

Si passi ora a risolvere il proposto problema dirigendone la soluzione co' nostri principj (§. I). Sia come antecedentemente la verga AB (Fig. XVII. Tav. III) quadrupla della distanza EO, e la sua inclinazione sia tale che l'ascissa OI sia doppia di OE; per il che essendo $OE = b$, sarà $OI = 2b$, $BO = \frac{4}{3}b$, $AO = \frac{8}{3}b$, $AI = \frac{2}{3}b\sqrt{7}$, e $BE = \frac{b}{3}\sqrt{7}$. E poichè l' ascissa OI è maggiore dell' ascissa OG della massima ordinata GZ, essendo $2b > \sqrt[3]{a^2 b} - b$, cioè per essere nell' assunto esempio $a = 4b$, $2b > 2b\sqrt[3]{2} - b$; così è manifesto che l' estremità A della verga nella data inclinazione si troverà nell' arco ZAH della curva va che descriverebbe se non le fosse impedito, come supponiamo, il moto, e che però mentre tende coll' estremità A a discendere per l'arco AH, cioè nel primo istante per la tangente AF, coll' altra estremità B tende ad ascendere da B verso D. Posto ciò, sia indicato da AI il peso P, e condotta la tangente AF, si costruiscano il parallelogrammo $Ax\,If$, ed i rettangoli Ax, Af. Delle due forze pertanto Ax, Af nelle quali si è risoluta la AI, la sola Af è quella che viene reagita dal muro al punto B: imperocchè delle due forze AR Au in cui questa risolvesi, la prima orizzontale AR, stante la predetta tendenza della verga, spinge il muro perpendicolarmente alla sua superficie da B in r, e la seconda verticale Au lo spinge verticalmente da B in D, che sono le due uniche direzioni nel muro, conformato come si è supposto, per le quali spinto può equilibrare le forze contro di esso dirette con la sua reazione. Delle due forze poi AS, Am in cui s' è risoluta la forza Ax, tendendo la prima orizzontale AS a distaccare l' estremità B della verga dal muro, diventa nullo il suo effetto ed insieme quello della verticale Am contro il muro medesimo. E poichè nello stato di equilibrio l' appoggio O dee sostenere la pressione dell' intero peso P, o dell' equivalente forza AI (§. XIII) così ne segue che mentre la forza AR spinge orizzontalmente il muro in B, tiene in equilibrio anche la forza AS, e che la forza Au che lo spinge verticalmente gravita, con la Am eguali insieme alla AI, sull' appoggio O. Per determinare poi le quantità della forza verticale e della orizzontale in B; dall' equazione alla curva (§. XIV) si ricavi la sottangente $FI = \frac{42}{11}b$, e sarà la tangente $AF = \frac{8 \cdot b}{3 \cdot 11}\sqrt{301}$: quindi per la somiglianza de' triangoli FOA, FIf; si avrà $Af = \frac{8 \cdot b}{3 \cdot 32}\sqrt{301}$; ed instituendo come AI ad Af, così p a forza Af; sarà la forza $Af = p \cdot \frac{8 \cdot \sqrt{301}}{2 \cdot 32 \cdot \sqrt{7}}$, e finalmente per la somiglianza de' triangoli FAI, FAu si scopre la forza $Au = p \cdot \frac{11}{32}$, e la la forza *fu* ovvero AR $= p \cdot \frac{3 \cdot 2r}{3a \cdot \sqrt{7}} = p \cdot \frac{3 \cdot 3\sqrt{7}}{3a}$: ma tali forze agiscono all' estremità A del vette BOA in cui OA è doppia di BO : dunque la forza di reazione verticale che esercita il muro nel punto B è $p \cdot \frac{11}{16}$, e la forza di reazione orizzontale $p \cdot \frac{3 \cdot 3 \cdot \sqrt{7}}{16}$: Surrogando nella formola generale esprimente la forza verticale esercitata dalla verga al punto B comunque inclinata, e derivante dalla soluzione ottenuta del problema col principio delle velocità virtuali (§. XV), surrogando, dico, $2b$ in luogo d'x, e $4b$ in vece di a per applicarla al caso particolare preso in considerazione, si trova come innanzi che la forza verticale in B è pure costantemente $p \cdot \frac{11}{16}$.

§. XIX.

Gioverà a confermare la verità dell' esposta soluzione nell' accennato caso, l' imprendere di determinare la forza orizzontale che spinge il muro in B essendo inclinata la verga AB (Fig. XVIII Tav. III) al punto A della massima ordinata AG, ed in cui la tangente SAR è orizzontale. Si sa che essendo OE $= b$, ed AB $= 4b$, sarà OG $= 2b\sqrt[3]{2} - b$, ovvero posto $\sqrt[3]{2} = \varphi$, OG $= 2b\varphi - b$, BO $= \frac{2b}{\varphi}$, AO $= \frac{4b\varphi - 2b}{\varphi}$, BE $= \frac{b}{\varphi}\sqrt{(4 - \varphi^2)}$, ed AG $= \frac{(2\varphi b - b)\sqrt{(4 - \varphi^2)}}{\varphi}$. E poichè condotta GR parallela alla verga, cioè risoluta la forza AG nelle AO, AR, la forza AR, che corrisponde alla Af (Fig. XVI Tav. II), essendo orizzontale non può somministrare veruna forza verticale, così la sola forza AR dovrà essere reagita dal muro in B : e per essere la forza AR $= p\left(\frac{2\varphi^2 - \varphi}{(2\varphi - 1)\sqrt{(4 - \varphi^2)}}\right)$, sarà il quarto proporzionale alle BO OA ed alla forza AR, cioè $p\left(\frac{2\varphi^2 - \varphi}{\sqrt{(4 - \varphi^2)}}\right)$ la forza orizzontale, ossia

sia la reazione che esercita il muro nel punto B; valore, che egualmente in tale inclinazione della verga, si ottiene dall' espressione $p \cdot \frac{OG}{BE}$, di cui l' esattezza si è già dimostrata (§. XII). Conseguentemente la forza AO, che può risolversi nell' orizzontale AS eguale e contraria alla AR e nella verticale AG, non serve che a far conoscere che l' intera forza AG o il peso P è sostenuto dall' appoggio O.

§. XX.

Confrontando pertanto le forze o reazioni del muro all' estremità B della verga lunga ed inclinata, come si è supposto, $p \cdot \frac{18}{16}$, $p \cdot \frac{6\sqrt{7}}{16}$ (§. XVII) ottenute dall' applicazione al problema de' noti principj meccanici, colle forze o reazioni $p \cdot \frac{11}{16}$, $p \cdot \frac{3 \cdot 3 \cdot \sqrt{7}}{16}$ determinate colla nostra soluzione (§. XVIII), non sussiste più l' identità di risultato, come nel caso in cui la verga è inclinata sotto l' angolo di equilibrio (§. XVI); ma mentre è la forza verticale $p \cdot \frac{18}{16}$ maggiore della $p \cdot \frac{11}{16}$, l' orizzontale $p \cdot \frac{6\sqrt{7}}{16}$ è minore della $p \cdot \frac{3 \cdot 3 \cdot \sqrt{7}}{16}$. Conosciuta la ragione dell' identità di risultato nella suddetta inclinazione, resta presentemente per condurre a termine l' intrapresa analisi di questo problema, dimostrare donde dipenda la diversità di risultati nelle altre inclinazioni della verga medesima. Suppongasi che all'estremità B della verga AB (Fig. XIX. Tav. III) non esista il muro verticale; è indubitato, che in tale supposizione, fatto intorno AF esprimente il peso P, il rettangolo Gf e posta BN eguale ad AG e Br parallela alla Af quarta proporzionale alle BO, OA, Af, e compiuto il rettangolo Bm, nella diagonale Bm si avrà la direzione e la quantità della forza necessaria all' equilibrio del-

della verga AB; poichè equivalendo alla Bm le due BN, Br la prima BN essendo eguale e contraria alla AG, impedisce alla verga di strisciare sull' appoggio O, e la Br avendo alla Af la ragione reciproca delle distanze BO, OA, impedirà il moto rotatorio intorno all' appoggio medesimo: così risoluta la forza Br nella verticale BC e nell' orizzontale Bb, dipenderà l'equilibrio della verga dalle tre forze BN, BC, Bb; ma essendo appunto le forze BC, Bb le determinate nella soluzione del problema (§. XVII. Fig. XVI. Tav. II.) della verga fronteggiata contro il muro verticale DC: dunque s'è supposto che in quella circostanza il muro potesse esercitare una forza BN eguale e contraria alla GA, il che non può attendersi dall' inerzia del muro, ma solamente da una forza attiva del valore e della direzione di Bm. Non è dunque erronea quella soluzione se non in quanto non vale per la condizione che la verga sia inclinata ad un resistente muro verticale, e si è risoluto un problema diverso dal proposto, ed è in ciò che consiste la diversità de' surriferiti risultati. Nel problema dunque del muro, dall'intiera forza Bm necessaria all'equilibrio della verga deggiono risultare le forze esercitate dalla stessa contro di esso nel punto B: di modo che prodotta Bm in d e presa Bd eguale a Bm, compiendo il rettangolo Bd, sarà BD (Fig. XVI. Tav. II.) la forza verticale che soffre il muro nel punto B, e Bb l' orizzontale. Per determinare i valori di tali forze si conducano le orizzontali rC, mz, e la verticale rn; e sarà $mz = Bb$. e $Bz = BD$: essendo poscia $BN = b \cdot \frac{7}{6}$, e $Br = b \cdot \sqrt{7}$, si avrà $Bm = \frac{b}{6} \sqrt{301}$, e la forza $Bm = p \cdot \frac{\sqrt{7 \cdot 301}}{4 \cdot 7}$. Inoltre per la somiglianza de' triangoli BCr, AOF, si ricaverà $BC = b \cdot \frac{3\sqrt{7}}{4}$, $Cr = b \cdot \frac{7}{4}$, e per la somiglianza de' triangoli rnm, AOF, $rn = b \cdot \frac{7\sqrt{7}}{24}$, ed $mn = b \cdot \frac{7}{8}$; e perciò $Bz = b \cdot \frac{11 \cdot \sqrt{7}}{24}$, ed $mz = b \cdot \frac{21}{8}$; e finalmente instituendo

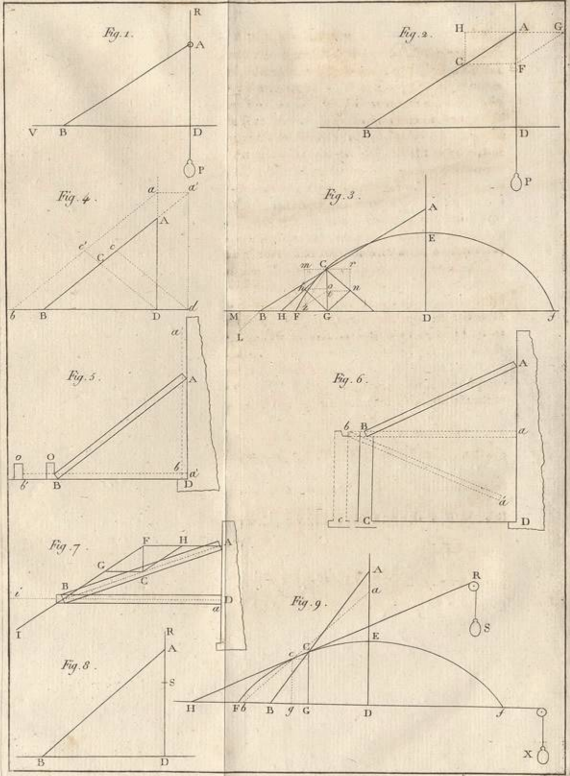
Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 8.
Fig. 9.

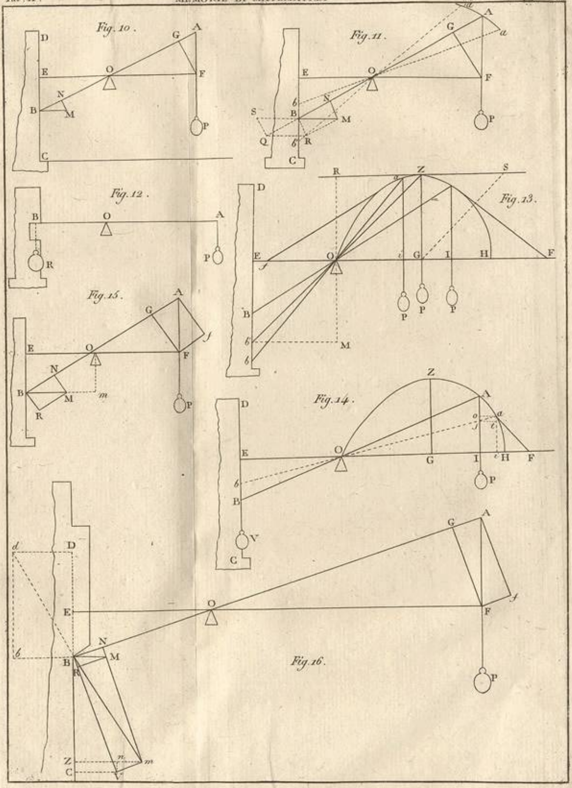
Fig. 10.
Fig. 11.
Fig. 12.
Fig. 13.
Fig. 14.
Fig. 15.
Fig. 16.

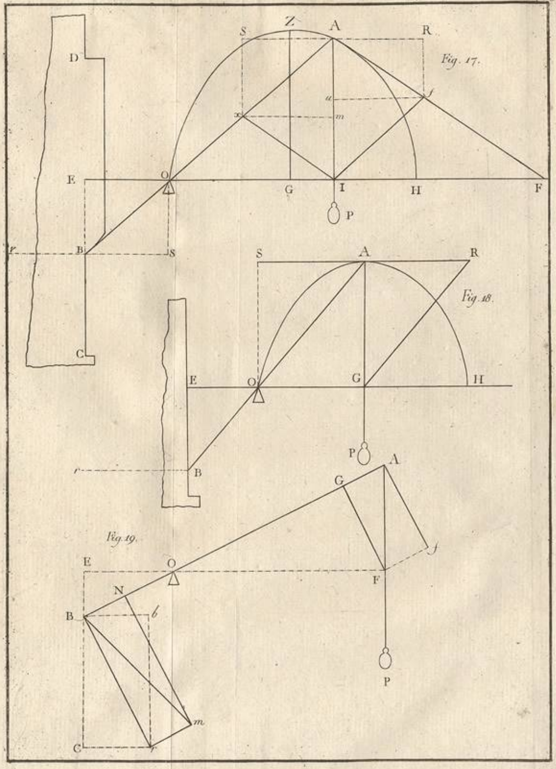
Fig. 17.
Z A S R D u f x m E O G I H F P r B s C
Fig. 18.
S A R E O G H P r B
Fig. 19.
G A f E O F N B b P m C r

Bm a Bz, così la forza Bm alla forza Bz, si scoprirà essere la forza verticale Bz uguale a BD $= p \cdot \frac{11}{16}$, ed instituendo Bm ad mz, così la forza Bm alla forza mz, si determinerà la forza orizzontale o perpendicolare al muro mz uguale a B$b = p \cdot \frac{9 \cdot \sqrt{7}}{16}$: valori identici a' ricavati dalla soluzione del problema colla nostra teoria (§. XVIII.); il che avviene, come è facile a dimostrarsi, per risultare la forza Bm parallela ed uguale alla doppia Af (Fig. XVII. Tav. III). Dall' esposta analisi pertanto concludesi che la generale soluzione del problema conseguita col combinare i due indicati principj (§. I) co' noti principj meccanici a differenza di quella che si ottiene colla semplice applicazione di essi, conduce insieme: 1.° a scoprire le direzioni per cui moverebbesi la verga nelle inclinazioni maggiori e minori di quella dell' equilibrio, 2.° a determinare la naturale direzione, e l' esatta distribuzione di tutte le forze sì contro il muro che sull' appoggio O esercitate dal peso P alla sua estremità attaccato, 3.° e per ultimo ci salva dal pericolo di risolvere in vece del proposto un altro problema, come s' è superiormente dimostrato.

AP-