MEMORIE
DI
MATEMATICA

INTORNO ALL' INCURVAZIONE DE' SOLIDI

DI PAOLO DELANGES

Ricevuta il dì 14 Giugno 1804.

Promossa da *Galileo* la teoria della renitenza de' solidi fitti ad una parete o sostenuti in uno o più punti, il *Viviani* ed il *Grandi* hanno il merito di averla coltivata, e di avere segnatamente determinate le figure di cui deggiono essere dotati i solidi, sicchè sporgendo da un muro con l' asse orizzontale, o essendo sostenuti verticalmente, la resistenza allo spezzamento d' ogni loro sezione verticale nel primo caso, ed orizzontale nel secondo, sia in equilibrio col peso della porzione anteriore di essi, e di cui la stessa sezione ne è la base.

L' indagine però a cui io mi rivolgo presentemente, reputandola di qualche utilità nelle pratiche, si è di determinare la figura propria ad impedire la incurvazione de' solidi derivante dal loro peso.

Il legname per esempio è da riporsi nella classe de' solidi intorno a' quali intendo di ragionare. Non v' ha nessuno cui non abbia osservato incurvarsi le travi, quantunque d' uniforme grossezza, sostenute nel mezzo o nelle sue estremità in direzione orizzontale od obbliqua; il che se avviene dal rilassamento delle fibre, di cui, secondo i Botanici, sono le piante tessute, tale rilassazione però può dipendere non solo dal passare l'atmosfera dallo stato umido al secco, allungandosi il legno nel primo caso, ed accorciandosi o strignendosi nel secondo, ma anche nella contemplata circostanza massimamente dal non essere abbastanza robuste e legate le predette fibre in guisa da resistere in linea retta, vincendo con l'adesione loro reciproca le parti più vicine agli appoggi il maggior momento delle più lontane.

In tale ricerca pertanto io assumo che i solidi di cui si deggiono determinare le figure, perchè risultino incurvabili dal proprio peso, debbano avere due piani opposti uguali e paralleli secondo la loro lunghezza, e che in conseguenza si possa considerarli sotto una sezione parallela a detti piani senza tener conto della larghezza o grossezza loro; ed inoltre che nella stessa specie sieno di egual densità in tutti i suoi elementi, di modo che rappresentando ADCB (Fig. I.) la sezione di un solido parallela a' piani opposti sostenuto ne' punti E, F, la base di tal sezione, cioè la retta AEFB possa riguardarsi come un vette caricato in ogni suo punto G d' un peso proporzionale alla corrispondente sezione verticale GH.

TEOREMA.

Se nel vette retto ACB (Fig. II) in cui i gravi H, G sono in equilibrio intorno al centro di moto C, si supponga che la retta BG esprima il grave G, e quindi fra gli assintoti DC Cb' comprendenti l'angolo retto DCb' sia descritta l'iperbole equilatera EGg'': dico che qualunque ordinata $b'g'$ esprime il grave che dovrebbe essere sospeso nel punto b', in luogo del G sospeso al punto B per mantenere costantemente nel vette ACb' il primo equilibrio.

Imperciocchè essendo uguali i rettangoli delle CB, BG, Cb, bg, Cb', $b'g'$ ec.; ed è il rettangolo della CB in un peso proporzionale alla BG uguale al momento del grave H: sarà dunque anche il

ret-

rettangolo della Cb in un grave proporzionale all' ordinata bg, o della Cb' in un grave proporzionale all' ordinata $b'g'$ ec. eguale sempre al momento dello stesso grave G. Il che ec.

PROBLEMA I.

Trovare la sezione d'un solido sostenuto nella metà della sua lunghezza AB (Fig. III.), che sia pel proprio peso in ogni sua parte incurvabile.

Rappresentino le rette uguali AH, BG ordinate alla retta ACB le uguali sezioni verticali che il solido da costruirsi dee avere nelle sue estremità, e innalzata dal punto d' appoggio C la perpendicolare CD, negli assintoti AC, CD si descriva l' iperbole Hhh', e negli assintoti BC, CD l' eguale iperbole Ggg', la prima che passi pel punto H e la seconda pel punto G: dico che il solido di cui una sezione secondo la sua lunghezza è compresa dalle rette HA, ACB, BG e dalle due uguali iperbole Hhh', Ggg', che dalla parte D si prolunga all' infinito, sempre più assottigliandosi, è il solido ricercato.

Imperocchè essendo il rettangolo delle HA, AC uguale al rettangolo delle GB, BC, e l' iperbola Hhh' la scala de' pesi del braccio AC, e l' iperbole Ggg' la scala de' pesi del braccio BC nello stesso vette ACB (Teorema); sarà il rettangolo di qualunque sezione verticale nella parte del solido sul braccio AC nella rispettiva distanza dal centro di moto C, uguale al rettangolo di qualunque altra sezione verticale nell' altra parte del solido sull' altro braccio AC nella respettiva distanza dal centro medesimo: dunque il solido di cui una sezione secondo la sua lunghezza è compresa dalle rette HA, ACB, BG ed alle due uguali iperbole Hhh', Ggg' sostenuto sulla metà della base in C, avrà tutti i suoi elementi in equilibrio fra di se, ed in conseguenza sarà dal proprio peso incurvabile. Il che ec.

COROLLARJ.

I. È manifesto che capovolgendosi il ritrovato solido HAC BGD in posizione verticale (Fig. IV.) sopra un appoggio o fondamento in D, saranno stessamente riguardo al proprio peso le sue parti HACD, GBCD incurvabili.

II. Se fosse confitta la metà DCBG colla sezione CD in una parete verticale, resisterebbe pure essa all' incurvazione: e qui è da osservarsi che per risultare il predetto solido tale che il suo momento, o quello d' ogni sua parte BcEG pareggi la resistenza allo spezzamento della respettiva sezione CD, o cE, dovrebbe essere conterminato, in luogo dell' arco iperbolico DeG, dall' arco parabolico DEB a cui sia tangente l' orizzontale CB.

PROBLEMA II.

Determinare la sezione di un solido incurvabile dal suo peso, essendo sostenuto da due appoggi A, B nelle estremità della sua base orizzontale AB (fig. V.).

Sia la lunghezza del solido $AB = a$, la grossezza che dee avere in un dato punto C, cioè la verticale $CD = p$, quella in un altro qualsivoglia punto b, cioè $bl = y$; sia poi la data distanza $BC = m$, sarà $AC = a - m$, e sia per ultimo l' ascissa $Bb = x$, e sarà $Ab = a - x$.

Considerando pertanto la base AB del solido AHhDlgGBA da determinarsi, come un vette caricato di pesi proporzionali alle sezioni DC, lb ec., è manifesto, che, perchè sia incurvabile dal proprio peso, immaginandosi un minimo rilassamento o incurvamento in esso, dovranno i momenti del peso in b di qualsivoglia sezione bl rappresentato da y, riguardo agli appoggi A, B, pareggiare i momenti del peso in C della data sezione DC rappresentato da p riguardo agli stessi sostegni A, B: ma pe' principj della statica de' solidi il momento della parte del peso y che gravita sul sostetegno A è $\frac{xy}{a}(a-x)$, che è uguale al momento di quella che gravita sul sostegno B, cioè $\left(\frac{a-x}{a}\right)y.x$; e così il momento della parte del peso p che gravita sul sostegno A è $\frac{mp}{a}(a-m)$, che è uguale al momento di quella che gravita sul sostegno B cioè $\left(\frac{a-m}{a}\right)p.m$; quindi perchè il solido ricercato AHhDlgGBA sostenuto nelle estremità A, B sia incurvabile dal proprio peso, dovrà essere conterminata la sua sezione verticale secondo la sua lunghezza dalla curva hDlg dell' equazione (A)

$$xy(a-x)=mp(a-m)\;\ldots\ldots\ldots\;(A)$$

Il che ec.

COROLLARJ.

I. Avendosi dall' equazione (A)

$$y=\frac{mp(a-m)}{x(a-x)}$$

è manifesto che se $x=0$, ovvero $x=a$, sarà $y=\infty$: dunque le estreme sezioni verticali AH, BG del solido incurvabile sono assintoti della curva hDlg da cui è conterminato, producendosi nelle estremità A, B all' infinito.

II. E poichè dalla stessa equazione (A) si ha

$$(a-x)x:(a-m)m=p:y$$

ne risulta, che le sezioni verticali bl, CD del solido incurvabile sono in reciproca ragione de' rettangoli de' respettivi segamenti Ab, bB, AC, CB della base AB, e che in conseguenza la minima sezione verticale corrisponde alla metà della stessa base.

III. La scoperta curva hDlg che costituisce il solido AHhDgGB incurvabile dal proprio peso è quella medesima con cui *Viviani* determinò la scala delle resistenze respettive delle sezioni in C, b ec. d'un solido cilindrico o prismatico forzato alla rottura da pesi pendenti alle sue estremità A, B, e sostenuto o in C, o in b ec., rappresentando le ordinate CD, bl ec. le resistenze delle stesse sezioni. Quindi ne segue la facile descrizione per punti della curvava $hDlg$, poichè costruita sulla base AB col vertice in D la parabola ADLB, sarà sempre bL a CD, così CD a bl.

IV. Se finalmente il determinato solido di cui HABCDH (fig. VI.) è la sezione verticale secondo la sua lunghezza conterminata dalle verticali AH, BG, dall'orizzontale AB e dalla sunnominata curva HDG, sia retto sopra sostegni o fondamenti in H e G, rimarrà egualmente esso quanto al suo peso incurvabile.

PROBLEMA III.

Determinare la figura della sezione verticale secondo la lunghezza d'un solido incurvabile, di cui la base AB sostenuta alle estremità A, B (fig. VII.) è inclinata all'orizzontale BE nell'angolo dato ABE.

Si supponga come innanzi che sia data la grossezza indicata dalla verticale DC, che dee avere il ricercato solido in un dato punto C, e da qualsivoglia altro punto b si conduca la verticale bl; e menate le lr, DR perpendicolari alla base AB, le orizzontali BE Al' incontrino le verticali DC, lb prolungate quanto occorre, ne' punti b', c, c',l'.

È evidente che presa al solito la base AB per un vette caricato in ogni suo punto come ne' C, b di pesi proporzionali alle sezioni verticali DC, lb, verrà gravata soltanto ne' suoi punti da forze o pesi agenti in direzione ad essa perpendicolare e proporzionali alle normali DR, lr, venendo sostenute le forze RC, rb, che colle dette DR, lr equivalgono alle verticali DC, lb dal sostegno inferiore B.

Siccome però i triangoli lrb, DRC, Dbb', DCc, $Al'b$, Ac'C sono simili fra di loro; così la stessa equazione (A) scoperta nell'antecedente problema determina pure anche in questo caso la curva da cui dee essere conterminata la sezione del solido incurvabile ricercato colla differenza che le coordinate Bb, bl saranno inclinate nell'angolo dato ABE. Il che ec.

SCO-

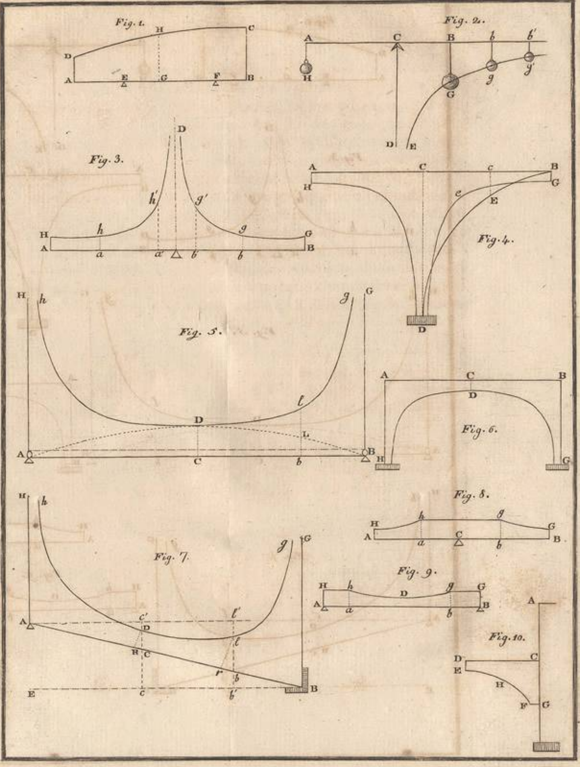
Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 8.
Fig. 9.
Fig. 10.

SCOLIO.

Benchè siasi veduto che le figure de' solidi incurvabili dal proprio peso vadino in parte conterminate da linee infinite, qualora sieno retti su d' uno o più punti della loro base piana: nondimeno nelle pratiche, nel primo caso, il solido può essere dotato della figura dimostrata dalla sezione ABG*gh*H, cioè avere le due porzioni A*ah*H, *b*B*g*G (fig. VIII.) estreme conterminate da rette linee, e da linee iperboliche essendo rettangolare la porzione di mezzo *abgh* in cui è più difficile l'incurvazione; e nel secondo la figura dimostrata dalla sezione ABGgD*h*H (fig. IX.), cioè avere le parti estreme A*ah*H, B*bg*G rettangolari, ed essere la parte di mezzo conterminata dalle rette *ha*, *ab*, *bg* e dalla porzione di curva *h*Dg dell' equazione (A) surriferita. Ad un solido in fine confitto con una estremità ad una muraglia converrebbe la figura prismatica rappresentata dalla sezione CDEHFG (fig. X.) conterminata dalle rette GF, GC CD, DE, e dall'arco iperbolico EHF.

SUL