MEMORIA

IDROSTATICA

Di Girolamo Saladini

Ricevuta il dì 20 Ottobre 1803.

Essendo stato a me richiesto il metodo di determinare il centro di pressione nelle cateratte ossia parature di figura circolare ed ellittica, nè avendolo ritrovato negli Autori le di cui Opere Idrostatiche poteva consultare, mi accinsi io stesso a rintracciarlo sì per soddisfare chi si era compiaciuto farmene domanda, sì perchè riputava utile tal cognizione in alcune circostanze.

È il centro di pressione di una data superficie che trattiene il fluido, quel punto della stessa superficie in cui può supporsi raccolta la somma delle pressioni contro ciascun punto della medesima, talmente che sostenuto questo punto, la superficie benchè sciolta da qualunque altro vincolo, non può concepire moto alcuno nè rettilineo nè di rotazione, ma debbe rimanere in equilibrio. Essendo le superficie delle nostre cateratte piane, a cui in tutti i punti sono normali le pressioni, e perciò tra loro parallele, ne avviene che per determinare il centro ricercato, usiamo il solito metodo con cui si determina generalmente il centro delle forze parallele, moltiplicando la pressione di ciascun punto della superficie nella di lui distanza da una retta data di posizione a piacimento nel piano della stessa superficie, e dividendo la somma di questi prodotti, che somma de' momenti relativamente a questa retta suol chiamarsi, per la somma di tutte le pressioni; il quoziente determina la distanza del centro di pressione della data superficie da questa retta; e se facciasi l' istesso rispettivamente ad altra retta arbitraria giacente nella stessa superficie, che seghi per altro la prima perpendicolarmente, si verrà a fissare il centro di pressione della superficie proposta, dovendo necessariamente quello essere, in cui si segano le due rette di distanza parallele alle date di posizione.

2. Il circolo AZFR rappresenti una cateratta che esiste nella sponda d' un fiume o d' un lago: suppongo il punto supremo A essere appunto nel livello del fluido; pel centro C conducasi il diametro verticale ACF; in questo esiste sicuramente il centro di pressione; poichè non può darsi alcuna ragion sufficiente di sua esistenza in un de' due semicircoli AZF, ARF ad esclusione dell' altro. Si dovrà per tanto ritrovare qual punto sia di questo diametro verticale che soddisfà al quesito. Se ottengasi la distanza del centro di pressione del semicircolo ANF dal diametro ZCR normale ad ACF, dovendo esser essa eguale a simil distanza dell' altro semicircolo AZF; sarà essa stessa la distanza del centro di pressione del circolo intiero presa nel diametro AF dal centro C; poichè congiunti i due centri di pressione dei semicircoli con una retta, essa segherà il diametro AF in P che sarà il centro di pressione di tutto il circolo.

Stabilito il punto A per principio dell' ascisse, pongasi $AO = x$; pel punto O condotta l' ordinata OL le si ponga l'altra BN infinitamente vicina, e dicasi $OL = y$, $OB = dx$; il raggio del circolo CA in grazia del calcolo dicasi $= 1$; sarà $OL = y = \sqrt{2x - xx}$ per proprietà del circolo; ed $ydx = dx\sqrt{2x - xx}$ sarà l' elemento OLBN del semicircolo ARF. Da' principj d' Idrostatica abbiamo che la quantità della pressione contro una superficie sia eguale al prodotto della stessa superficie moltiplicata nella distanza del suo centro di gravità dalla superficie dell'acqua; questa distanza nel caso nostro è $AO = x$; esprimeremo pertanto la pressione elemenmentare per $xdx\sqrt{2x-xx}$, la quale di nuovo moltiplicata per $AO = x$ darà il momento di questa pressione rispettivamente alla superficie del fluido eguale ad $x^2dx \times \sqrt{2x-xx} = dM$; M disegna la somma di tutti questi momenti: dunque $M = \int x^2\,dx\sqrt{2x-xx} + C$. Per liberare questa formola dal radicale pongo $\sqrt{2x-xx} = xz$, da cui ricavo $x = \frac{2}{zz+1}$, e $dx = -\frac{4zdz}{\overline{zz+1}^2}$: compite le sostituzioni si avrà $M = \int x^2dx\sqrt{2x-x^2} + C = -32\int\frac{zdz}{\overline{z^2+1}^5} + C$; quindi subito si comprende che l' integrazione di questa formola non oltrepassa la quadratura delle Sezioni Coniche Apolloniane.

3. Molti sono i metodi per giungere all' integrazione di questa formola; scelgo quello delle nostre Istituzioni. Prendo la formola generale $\frac{z^q}{\overline{z^2+1}^p}$; la differenzio, ed ottengo $D\frac{z^q}{\overline{z^2+1}^p} = \frac{qz^{q-1}dz}{\overline{z^2+1}^p} - \frac{2pz^{q+1}dz}{\overline{zz+1}^{p+1}}$; dunque $\int\frac{z^{q+1}dz}{\overline{z^2+1}^{p+1}} = -\frac{z^q}{2p(z^2+1)^p} + q\int\frac{z^{q-1}dz}{2p(z^2+1)^p}$. Per mezzo di questa equazione si giunge al desiderato integrale nella seguente maniera.

Pongasi $q+1=2$, cioè $q=1$; $p+1=5$, cioè $p=4$, avremo subito $-32\int\frac{z^2dz}{\overline{z^2+1}^5} = -32\left(\frac{-z}{8(z^2+1)^4} + \int\frac{dz}{8.(z^2+1)^4}\right)$; per deprimere $\int\frac{dz}{8.(z^2+1)^4}$ pongasi $q+1=0$, cioè $q=-1$, $p+1=4$, cioè $p=3$; nascerà $\frac{1}{8}\int\frac{dz}{\overline{z^2+1}^4} = -\frac{1}{8}\times\frac{1}{6.z.(z^2+1)^3}$

—

$-\frac{1}{8.6}\int\frac{dz}{z^2(z^2+1)^3}$; proseguendo quest'operazione troveremo finalmente $-32\int\frac{z^2dz}{\overline{z^2+1}^5}=32\times\left(\frac{z}{8.(z^2+1)^4}+\frac{1}{8.6.z.(z^2+1)^3}\right.$ $\frac{-1}{8.6.4.z^3.(z^2+1)^2}\ \frac{+3}{8.6.4.2.z^5.(z^2+1)}+\frac{3.5}{8.6.4.2}\left.\int\frac{dz}{z^8+z^6}\right)$. La Frazione poi $\frac{1}{z^8+z^6}$ per mezzo della divisione continua si ritrova eguale $\frac{1}{z^6}-\frac{1}{z^4}+\frac{1}{z^2}-\frac{1}{z^2+1}$; dunque $\frac{dz}{z^8+z^6}=\frac{dz}{z^6}-\frac{dz}{z^4}+\frac{dz}{z^2}\ \frac{-dz}{z^2+1}$, ed integrando $\int\frac{dz}{z^8+z^6}$ $=\frac{-1}{5.z^5}\ \frac{+1}{3.z^3}\ \frac{-1}{z}-\int\frac{dz}{z^2+1}$. Sapendosi essere questa sommatoria un arco di circolo, il cui raggio è eguale all' unità, e la cui tangente è eguale a z; dunque avremo finalmente $M=32\left[\frac{z}{8.(z^2+1)^4}\ \frac{+1}{8.6.z.(z^2+1)^3}\ \frac{-1}{8.6.4z^3.(z^2+1)^2}\right.$ $+\frac{3}{8.6.4.2.z^5.(z^2+1)}+\frac{3.5}{8.6.4.2}\left(\frac{-1}{5.z^5}\ \frac{+1}{3.z^3}\ \frac{-1}{z}\right.$

$-$ Arco tangen. z + Quadrante $\left.\right)\Big]$ . . . . (K)

Il quadrante è la costante, che si deve aggiungere la quale si determina facendo la sommatoria eguale al zero, quando $x=0$; sarà in questa supposizione $\sqrt{2x-xx}=\sqrt{\frac{2}{x}}=z=\infty$; dunque tutti i termini svaniscono, fuorichè l'arco, il quale avendo la tangente infinita, diventerà un quadrante del circolo, il cui raggio è $=1$, che sarà la costante da aggiungere.

Posta $x=2$ avremo il momento appartenente al semicircolo ANRF; in questa supposizione divenendo $z=0$, tutti i teri termini della nostra sommatoria diventano infiniti, se si eccettui il primo, che ritrovasi $= 0$, e l' arco del circolo che avendo la tangente $= 0$, sarà anch' esso $= 0$; ciò non ostante se rifletteremo che questi infiniti non sono tutti dell' istess' ordine, troveremo che quelli di grado massimo sono $\frac{3}{8 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2 \cdot z^5}$ $\frac{-3}{8 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2 \cdot z^5}$; onde non curando quelli di grado inferiore, ed elidendosi i primi, troveremo il momento di tutta l' area semicircolare $ANRF = M = \frac{5\phi}{8}$, posta la ragione del raggio alla circonferenza quella di $1 : \phi$; onde risulta la periferia del nostro Circolo $= 2\phi$, e la sua quarta parte a $\frac{\phi}{2}$, che moltiplicata nel coefficiente $\frac{5}{4}$ dà $\frac{5\phi}{8}$.

4. Ora sappiamo dall' Idrostatica che la pressione dell' area circolare intera posta verticalmente nella supposizione in cui siamo, cioè che il punto supremo della cateratta esista nel livello, debbe farsi eguale al peso d' un cilindro, la cui base sia il circolo stesso, la sua altezza sia la distanza del centro del circolo dal livello, e la sua gravità specifica sia quella del fluido sovrastante; cioè al peso d' un cilindro acqueo, la cui base sia il circolo AZFR, l' altezza il raggio CA da noi posto eguale all' unità; dunque l' espressione del peso d' un tal cilindro sarà $= \phi$, e la sua metà $= \frac{\phi}{2}$. Per la qual cosa diviso il momento sopra ritrovato $\frac{5\phi}{8}$ per $\frac{\phi}{2}$, nascerà la distanza ricercata del centro di pressione dal livello eguale $\frac{5}{4} = 1 + \frac{1}{4}$. Esiste per tanto il centro di pressione di cui parliamo un quarto del raggio CF sotto l' orizzontale ZCR. Se si tagli adunque CF in P talmente che sia CP la sua quarta

ta parte, sarà il punto P il nostro centro di pressione di tutta la cateratta circolare ARFZA, che ha il vertice A nella superficie del fluido.

5. Comecchè le cose da noi finquì stabilite sembrino camminare a dovere, ciò non ostante non può negarsi che le quantità infinite che si frammischiano nell' espressione, non facciano giustamente nascere dei sospetti; imperciocchè distruggendosi scambievolmente i termini infiniti del grado massimo, non sembra doversi disprezzare quei di grado inferiore, che rendono incerto il metodo e di niun conto i risultati.

Per togliere di mezzo qualunque dubbio ci è convenuto pensare ad altro metodo. Determino in primo luogo il momento del semicircolo ZARC, indi quello dell' inferiore ZFRC, da' quali ricavo il momento di tutta la cateratta circolare per riguardo al livello. A questo fine pongo nella nostra formola (K) $x = AC = 1$; da ciò nasce $z = 1$ e il momento del quadrante ACR $=$
$$32\left(\frac{1}{8\cdot 2^4}\,\frac{+1}{8\cdot 6\cdot 2^3}\,\frac{-1}{8\cdot 6\cdot 4\cdot 2^2}\,\frac{+3}{8\cdot 6\cdot 4\cdot 2\cdot 2}\,\frac{-3\cdot 5}{8\cdot 6\cdot 4\cdot 2}\left(\overline{\frac{1}{5}-\frac{1}{3}+1+\frac{\text{quadrante}}{2}}\right)\right)=\frac{1}{4}+\frac{1}{12}-\frac{1}{24}+\frac{3}{24}$$
$$-\frac{5}{4}\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{3}+1+\frac{\text{quadr.}}{2}\right)=-\frac{2}{3}+\frac{5}{8}\,\text{quadr.},$$ e il momento dell' intiero semicircolo superiore CZARC $= -\frac{4}{3}+\frac{5}{4}$ quadr.

6. Passiamo a determinare il momento del semicircolo inferiore CZFRC. Ad una qualunque ascissa AB' maggior del raggio AC si conduca l' ordinata B'N', e pongo $FB' = x$, $B'N' = y$, e posta $FC = CA = 1$, sarà $y = \sqrt{2x - xx}$, e condotta O'L' infinitamente vicina a B'N', sarà $O'B' = dx$, e l' elemento dell' area semicircolare FRA $=$ $y\,dx = dx\sqrt{2x - xx}$; ed essendo la distanza di questo elemento dal livello $= 2 - x$, sarà la pressione di questo elemen-

mento $\overline{2-x}\,.\,dx\sqrt{2x-xx}$, ed il suo momento per riguardo al livello $= \overline{2-x}^2\,dx\sqrt{2x-xx} = 4\,dx\sqrt{2x-xx} - 4\,x\,dx\sqrt{2x-xx} + x^2\,dx\sqrt{2x-xx}$. Dunque il momento indefinito del semicircolo ARF $= \frac{4}{3}(2x-xx)^{\frac{3}{2}} + \int x^2\,dx\sqrt{2x-xx}$. Si ponga come dianzi $\sqrt{2x-xx} = xz$, eseguite l' istesse sostituzioni, avremo

$$\frac{4}{3}(2x-xx)^{\frac{3}{2}} + \int x^2\,dx\sqrt{2x-xx} = 3a\Big[\frac{z}{8\,.\,(z^2+1)^4}\;\frac{+1}{8\,.\,6\,.\,z\,.\,(z^2+1)^3}\;\frac{-1}{8\,.\,6\,.\,4\,z^3(z^2+1)^2}\;\frac{+3}{8\,.\,6\,.\,4\,.\,2\,z^5\,.\,(z^2+1)}\;\frac{+3\,.\,5}{8\,.\,6\,.\,4\,.\,2}\Big(\frac{-1}{5\,.\,z^5}\;\frac{+1}{3\,.\,z^3}\;\frac{-1}{z} - \int\frac{dz}{z^2+1} + C\Big)\Big] + \frac{4}{3}(2x-xx)^{\frac{3}{2}}.$$

Posta $x = 0$, e perciò $z = \infty$, svanisce la quantità algebraica, siccome svaniscono tutti i termini espressi per z rimanendo soltanto $-\int\frac{dz}{z^2+1} + C = 0$, e perciò $C = \int\frac{dz}{z^2+1} =$ quadrante, poichè sappiamo che l' arco di circolo la cui tangente è infinita, eguaglia il quadrante, dunque il momento indeterminato del nostro semicircolo è

$$3a\Big[\frac{z}{8\,.\,(z^2+1)^4} + \frac{1}{8.6.z\,.\,(z^2+1)^3} - \frac{1}{8.6.4.z^3.(z^2+1)^2} + \frac{3}{8.6.4.2.z^5.(z^2+1)} + \frac{3\,.\,5}{8\,.\,6\,.\,4\,.\,2}\Big(\frac{-1}{5\,.\,z^5} - \frac{+1}{3\,.\,z^3}\;\frac{-1}{z} - \int\frac{dz}{1+z^2} + \text{quadrante}\Big)\Big] + \frac{4}{3}\,\overline{(2x-xx)}^{\frac{3}{2}}.$$

Sia $x = 1 =$ FC, sarà $z = 1$. La quantità poi algebraica data per $x = \frac{4}{3}$, e la la quantità algebraica data per $z = -\frac{2}{3}$, e la quantità trascendente $= \frac{5}{8}$ quadrante. Dunque il momento dell' intero semicircolo CZFRC $= \frac{4}{3} + \frac{5}{4}$ quadrante: ma abbiamo dianzi trovato il momento del semicircolo superiore eguale $-\frac{4}{3} + \frac{5}{4}$ quadrante; dunque il momento di tutto il circolo AZFRA sarà eguale a $\frac{5}{2}$ quadrante; se adunque pongasi la ragione del diametro alla periferia $1 : \phi$; sarà la periferia del circolo AZFRA $= 2\phi$ ed il suo quadrante a $\frac{\phi}{2}$; dunque il sopraindicato momento sarà espresso per $\frac{5\phi}{4}$, e se dividasi questa espressione $\frac{5\phi}{4}$ per la somma della pressione che soffre la cateratta nostra circolare, la cui espressione da noi fu dianzi ritrovata eguale a ϕ; resterà determinata la distanza del centro di pressione della nostra cateratta circolare AZFRA dal livello, che passa per $A = \frac{5}{4} = 1 + \frac{1}{4}$; come appunto da noi si determinò con altro metodo involuto da quantità infinite.

E perchè questi due metodi non debbono essere in contradizione; la quale si toglie, se dicasi distruggersi tra loro tutti i termini infiniti, quindi ricavasi che $\frac{3}{z^3} = \frac{3}{0^3}$ debba eguagliare l' infinito espresso per l' arco Tangente $z =$ Arco T. zero, e perciò l' arco di tangente zero in questo caso eguaglia infinite periferie prese infinite d' infinite volte.

Non è adunque un' idea stravagante e puramente arbitraria de' Geometri, che alle linee trigonometriche appartenga una serie infinita d' infiniti archi, come dimostra il presente caso.

7.

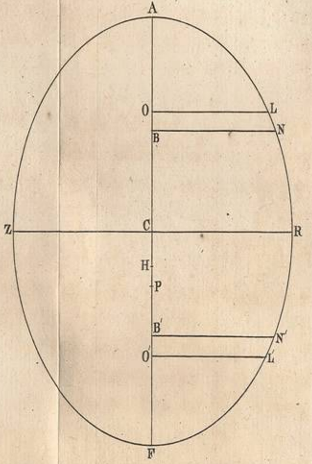
7. Passiamo a determinare il centro di pressione nelle cateratte circolari, quando il supremo punto A delle medesime è depresso sotto il livello del fluido. Fingo in primo luogo che la nostra cateratta AZFRA sostenga soltanto la pressione che soffre dal fluido esistente superiormente al livello condotto pel vertice A; in questa supposizione tutti i punti della medesima saranno egualmente premuti in ragione dell' altezza del fluido sopra l' anzidetto livello; quindi il centro di pressione cade appunto nel centro del circolo; la quantità poi della pressione eguaglia il peso d' un cilindro acqueo, la cui base sia la cateratta stessa, e l' altezza sia appunto quella dianzi detta. Per determinare adunque il centro di pressione concepisco la cateratta premuta da due forze, una applicata nel centro la cui espressione è $= a\varphi$, essendo da noi già stata espressa l' area della cateratta per φ, e potendosi esprimere l' altezza del fluido sopra il dianzidetto livello $= a$, l' altra applicata in P distante dal centro per CP quarta parte del raggio LF, la cui misura è stata da noi già determinata ed espressa colla φ. Adunque la forza nel centro C alla forza nel punto $P = a\varphi : \varphi, = a : 1$. Trovisi dunque il centro di queste due forze, cioè dividendo la distanza CP in ragione reciproca di $a : 1$; cioè facendo come la forza in C alla forza in P così PH : CH, e il punto H di divisione sarà il centro di pressione di tutta la cateratta, come raccogliesi dalla statica. Se sia $a = 1$, cioè se l' acqua s' innalzi sopra l' indicato livello, quanto è il diametro della cateratta; il centro di pressione resterà inferiore al centro del circolo d' un' ottava parte del raggio; a proporzione che s' innalza il fluido sopra la cateratta, e cresce per conseguenza l' espressione a; tanto più s' accosta il centro H di pressione al centro del circolo, in maniera che essendo il diametro della cateratta picciolo in confronto dell' altezza del fluido; allora il centro di pressione si può considerare, senza pericolo di errore sensibile, come fosse nel centro C della stessa cateratta.

 8. Ciò

8. Ciò che abbiamo stabilito della cateratta circolare si applica facilmente alle cateratte di figura ellittica, avvegnachè il momento di ciascuna porzione infinitesima dell' ellisse verrà espressa per $n x^2 dx \sqrt{2x - xx}$, quando esso si riferisca al livello che passa per l' estremità superiore della cateratta ellittica; perchè il rettangolo FO $\times$ OA $= 2x - xx$ stà al quadrato OL $= y^2$, come $1 : n^2$ nell' ellisse, cioè ponendo il semiasse maggiore $= 1$ ed il minore $= n$, quindi sarà $y = n \sqrt{2x - xx}$; e l' elemento dell' ellisse $= ydx = n dx \sqrt{2x - xx}$, e la pressione che soffre, quando il livello passa per l'estremità A della cateratta $= n x dx \sqrt{2x - xx}$, ed il suo momento per riguardo al livello $= nx^2 dx \sqrt{2x - xx}$; onde la pressione finita e indeterminata della semiellisse $= n \int x dx \sqrt{2x - xx}$, e il suo momento finito indeterminato $= n \int x^2 dx \sqrt{2x - xx}$. Divisa adunque la somma de' momenti per la somma delle pressioni onde determinare il centro di queste nella cateratta ellittica, risulta la formola istessa, che abbiamo ottenuta volendo ritrovare il centro di pressione della cateratta circolare.

9. Per dire alcuna cosa ancora delle cateratte iperboliche, osserviamo in primo luogo essere l' equazione dell' Iperbola $y = n \sqrt{2x + xx}$, prese le ascisse x nell' asse trasverso ed il loro principio nel vertice A, e chiamata y l'ordinata, e posto il semiasse trasverso $= 1$ ed il conjugato $= n$. Dunque la quantità della pressione, se l'acqua arrivi soltanto al vertice A, sarà $n \int x dx \sqrt{2x + xx}$, e il suo momento rispettivamente a questo livello sarà $n \int x^2 dx \sqrt{2x + x^2}$; dunque la distanza della pressione dal vertice sarà $\dfrac{\int x^2 dx \sqrt{2x + xx}}{\int x dx \sqrt{2x + xx}}$;

posta $\sqrt{2x + xx} = xz$ e sostituita la z invece della x, ed eseguito il alcolo come nelle cateratte circolari, si ritrova la quanti-


A
O
L
N
B
Z
C
R
H
P
B'
N'
O'
L'
F

tità della pressione rappresentata per $16\left(\frac{z}{6.(z^2-1)^3}+\right.$

$$\left.\frac{z^{-1}}{6.4.(z^2-1)^2}-\frac{z^{-3}}{6.4.2.(z^2-1)}\right)\frac{+1}{3z^3}+\frac{1}{z}+\frac{1}{2}\overline{\left(\frac{z-1}{z^2-1}\right.}^{\,-2},$$

ed il suo momento $=32\left(\frac{z}{8.(z^2-1)^4}+\frac{z^{-1}}{8.6.(z^2-1)^3}-\right.$

$$\left.\frac{z^{-3}}{8.6.4.(z^2-1)^2}+\frac{3z^{-5}}{8.6.4.2(z^2-1)}\right)+\frac{1}{4z^5}+\frac{5}{3.4.z^3}+$$

$\frac{5}{4.z}+\frac{5}{8}\overline{\left(\frac{z^2-1}{z^2-1}\right.}^{\,2}$. Posta $x=2$, sarà $z^2=2$, $z=\sqrt{2}$, fatte le debite sostituzioni si ritrova il nostro momento $=6,261$, e la quantità della pressione eguale $4,145$; dunque il centro di pressione della cateratta Iperbolica nelle supposizioni in cui siamo è distante dal vertice, $1,49$, cioè $\frac{3}{2}$ in circa; ciò è quanto mi occorreva dire di queste cateratte.

SO-