MEMORIA

DI FRANCESCO PEZZI

Sopra la legge di trasformazione di una Frazione continua indefinita qualunque in una Frazione volgare; e sopra la più semplice risoluzione delle equazioni indeterminate del primo grado.

Ricevuta il dì 26 del 1804.

Si conosce la legge di composizione delle diverse Frazioni volgari eguali a Frazioni continue, aventi successivamente un denominatore di più; ma lo sviluppo attuale de' termini di queste Frazioni, non è ancora stato dato da' Geometri, a mia cognizione; nientemeno parmi che tale punto di Algebra, meriti di essere perfezionato e per il vantaggio che può recarle, e perch' esso si presenta da principio complicatissimo, e poi si scioglie in una serie indefinita di Fattori di forma singolare, i quali si riproducono uniformemente da per se, dopo la metà del loro numero; questa dottrina mi ha richiamato a memoria quella delle equazioni indeterminate del primo grado, cui essa serve di base, e la cui risoluzione ho espressa in Formole algebraiche più definite e più semplici delle sin quì note in tale materia, e che anzi credo essere le più semplici possibili.

I. Fra le Frazioni continue scelgo quelle solamente che sono in uso nel vasto dominio dell'Algebra, i cui numeratori sono eguali all' unità; sia perciò $\frac{A}{B}$ l' espressione volgare di di una Frazione continua, maggiore dell' unità, rappresentata come segue.

$$\frac{A}{B} = a + \cfrac{1}{a1 + \cfrac{1}{a2 + \cfrac{1}{a3 + \cdots + \cfrac{1}{a(n)}}}} = \frac{M(n+1)}{N(n+1)} \qquad (1)$$

In cui $n+1$ esprime il numero qualunque de' quoti a, $a1$, $a2$, $a3$, &c. Da questa formola derivano le seguenti Frazioni convergenti verso il valore di $\frac{A}{B}$, la prima delle quali non si pone ad altro oggetto che per meglio indicarne la legge.

$$\frac{1}{0} = \frac{M0}{N0}$$

$$\frac{a}{1} = \frac{M1}{N1}$$

$$a + \frac{1}{a1} = \frac{M2}{N2}$$

$$a + \cfrac{1}{a1 + \cfrac{1}{a2}} = \frac{M3}{N3}$$

$$\vdots$$

$$a + \cfrac{1}{a2 + \cfrac{1}{a3 + \cfrac{1}{a4}}} = \frac{M5}{N5}$$

&c.

La legge di composizione delle Frazioni volgari precedenti, nota a' Geometri, è la seguente

Siano $\frac{M(n-1)}{N(n-1)}$, $\frac{M(n)}{N(n)}$, $\frac{M(n+1)}{N(n+1)}$ tre Frazioni consecutive qualunque, ed $a(n)$ in conseguenza il denominatore ultimo della Frazione continua $= \frac{M(n+1)}{N(n+1)}$, si ha

$$\left.\begin{aligned} M(n+1) &= a(n)M(n) + M(n-1) \\ N(n+1) &= a(n)\,N(n) + N(n-1) \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

2. Osservo di passaggio, che in virtù della notazione precedente si dimostreranno rapidamente tutte le note proprietà delle Frazioni continue.

3. A maggior comodo degli usi particolari che possono aver luogo nelle varie ricerche dell'Algebra, distinguerò i due casi ove l' espressione $\frac{A}{B}$ è maggiore e minore dell' unità. Sia essa in primo luogo minore, si avrà

$$a = 0,\ M0 = 1$$

$$M1 = 0$$

$$M2 = 1$$

$$M3 = a2$$

$$M4 = a3a2 + 1$$

$$M5 = a4(a3a2+1) + a2$$

$$\quad\ \ 1 \qquad\quad\ \ 1$$

$$M6 = a5(a4(a3a2+1) + a2) + a3a2+1$$

$$\quad\ \ 1\ \ 2 \qquad\quad\ \ 2 \qquad 1$$

$$M7 = a6\,(a5(a4(a3a2+1)+a2)+a3a2+1)+a4(a3a2+1)+a2$$

$$\quad 1\ \ 2\ \ 3 \qquad\quad 3 \quad\ 2 \qquad\qquad 1$$

$$M8 = a7(a6(a5(a4(a3a2+1)+a2)+a3a2+1)+a4(a3a2+1)$$

$$\quad 1\ \ 2\ \ 3\ \ 4 \qquad\ 4 \quad\ 3 \qquad\qquad\quad 2$$

$$+a2)+a5(a4(a3a2+1)+a2)+a3a2+1$$

$$1$$

&c.

Ed in generale

M(n+1)

$$M(n+1)=a(n)M(n)+M(n-1)=a(n)\underset{1}{(}a(n-1)\underset{2}{(}a(n-2)\underset{3}{(}a(n-3)$$

$$\begin{array}{l}
(\ldots(a4\;(a3a2+1)+a2)+a3a2+1)+a4(a3a2+1)+a2) \\
4\ldots n-4 \quad n-3 \qquad n-3\;\; n-4 \qquad n-5 \qquad\qquad\qquad n-6 \\
\qquad\qquad\qquad n-m \qquad n-(m+1) \qquad\qquad\qquad n-(m+2)
\end{array}$$

$$\begin{array}{c}
+\;a5(a4(a3a2+1)+a1)+a3a2+1)\;+ \\
\qquad\qquad n-7 \\
\qquad\qquad n-(m+3)
\end{array}$$

$$\begin{array}{r}
a6(a5(a4(a3a2+1)+a2)+a3a2+1)+a4(a3a2+1)+a2)+\ldots+ \\
n-3\;. \\
n-(m+4)
\end{array}$$

$$\begin{array}{l}
a(n-3)(a(-4)(\ldots a4\;(a3a2+1)\quad+\ldots)+M(n+1)\quad(3) \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 1 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad n-(n-1)
\end{array}$$

La Formola (3) è quindi il valore del numeratore della Frazione volgare $\frac{M(n+1)}{N(n+1)}$, eguale ad una Frazione continua qualunque data, minore dell' unità, cioè di

$$\frac{M(n+1)}{N(n+1)}=\cfrac{1}{a1+\cfrac{1}{a2+\cfrac{1}{a3+\cdot\,\cdot\,+\cfrac{1}{a(n)}}}}$$

4. Or egli è necessario di scoprire la legge di composizione delle Formole (3); perciò ne' valori particolari M5, M6, M7, &c., come nel generale $M(n+1)$, ho numerato le parentesi in modo, che i stessi numeri segnino le corrispondenti; così nel valore di M8 per es. le parentesi $\underset{4}{(}\;\;\underset{4}{)}$ chiudono la quantità ch' è moltiplicata per lo stesso Fattore $a4$, cioè $a4\underset{4}{(}a3a2+1\underset{4}{)}$; le parentesi $\underset{3}{(}\;\underset{3}{)}$ chiudono la quantità ch' è moltiplicata per lo stesso fattore $a5$, cioè $a5\underset{3}{(}a4\underset{4}{(}a3a2+1\underset{4}{)}$ $+\,a2\underset{3}{)}$; con tale mezzo si hanno in questi prodotti due serie

rie di parentesi, segnate da due serie di numeri, l'una ascendente, l' altra discendente, nelle quali i numeri estremi, e gli equidistanti dalli estremi sono eguali, e tenendo sempre a memoria che la notazione di tutti li M, è sempre $M(n+1)$, si vede che il numero de' termini di ciascuna serie è $n-3$; perciò il numero totale di simili parentesi è $2n-6$.

5. Egli è facile di formare in virtù de' valori del n.° 3, quello di $M(n+1)$, qualunque sia n; si comincierà dallo scrivere la prima parte di $M(n+1)$, cioè il valore di $a(n)M(n)$, e perciò si porrà la seguente serie di fattori monomj, meno l' ultimo ch' è binomiale, e che occupa il posto di mezzo,

$$a(n)\underset{1}{(}a(n-1)\underset{2}{(}a(n-3)\underset{4}{(}a(n-5)\underset{5}{(}\ldots\underset{n-4}{(}a4\underset{n-3}{(}a3a2+1\underset{n-3}{)}$$

separati da $n-3$ parentesi, di cui quella ch'è preceduta da $a4$, è l' ultima; or fa d' uopo di trovare le quantità che sono moltiplicate da ciascuno di questi fattori, e che sono chiuse in conseguenza da altre $n-3$ parentesi, delle quali quantità una è la $a3a2+1$.

Si vede che la quantità che segue la $n-3^{ma}$ parentesi a destra, principiante la serie discendente, e ch' è chiusa da) è $a2$; in guisa che si ha

$n-4$

$$a(n)\underset{1}{(}a(n-1)\underset{2}{(}a(n-2)(\ldots\underset{n-4}{(}a4\underset{n-3}{(}a3a2+1\underset{n-3}{)}+a2\underset{n-4}{)} \quad ;$$

al di là di questa $n-4^{ma}$ parentesi ritornano secondo una legge costante le quantità che principiano nella serie ascendente delle parentesi; ed ecco tale legge in generale.

6. *La $n-m^{ma}$ parentesi della serie discendente è seguitata dalla quantità che principia immediatamente dopo la $n-m+1^{ma}$ parentesi della serie ascendente, e che finisce alla parentesi antecedente a quella in quistione, la quale è perciò segnata collo stesso numero $n-m+1$; i valori di m essendo successivamente $m=5, 6, 7, \ldots n-2, n-1$.*

7. Con questa regola si può trovare una qualunque di que-

queste quantità, indipendentemente dalle precedenti, in fatti la quantità che segue la $n-m^{ma}$ parentesi è

$$a(m-1)(a(m-2)(\ldots(a4(a3a2+1)+a2)+\ldots)_{n-(m+1)}$$

Quindi per aver il valore totale di $a(n)\mathrm{M}(n)$, a cominciare da $m=5$, dopo la parentesi $)_{n-5}$, non si hanno che a scrivere $n-6$ di queste quantità, chiudendole con un egual numero di parentesi.

8. Ma non s'incontrerà alcuna difficoltà nello scrivere di seguito tutto il valore di $a(n)\mathrm{M}(n)$; perchè quando si sarà pervenuto alla parentesi $)_{n-4}$, non si avrà che a retrogradare successivamente nella serie ascendente, prendendovi l'una dopo l' altra le quantità che vi principiano cioè, $a3a2+1$, $a4(a3a2+1)+a2$, $a5(a4($etc., $a6(a5(a4,($ec., le quali sono chiuse rispettivamente dalla parentesi che nella serie discendente precede quella, sotto cui si pone la quantità in quistione.

9. Il valore di $\mathrm{M}(n-1)$ è contenuto fra le parentesi $(\ )$ del valore di $a(n)\mathrm{M}(n)$, e quello essendo giunto a $2\ \ n-(n-2)$ questo, darà il valore cercato di $\mathrm{M}(n+1)$.

10. Ora per determinare $\mathrm{N}(n+1)$ osservo, che la quantità a, nulla influendo nel denominatore della Frazione continua $a+\frac{1}{a1+\text{etc.}}$ ridotta ad una Frazione comune, il valore che troverò per $\mathrm{N}(n+1)$ varrà egualmente per il denominatore della Frazione comune rappresentante la continua maggiore o minore dell' unità. Dalla formola (1) si deduce

$\mathrm{N}1=1$

$\mathrm{N}2=a1$

$\mathrm{N}3=a2a1+1$

$\mathrm{N}4=a3\,(a2a1+1)_1+a1_1$

N5 =

$$N5 = a4\underset{1}{(}a3\underset{2}{(}a2a1+1\underset{2}{)}+a1\underset{1}{)}+a2a1+1$$

$$N6 = a5\underset{1}{(}a4\underset{2}{(}a3\underset{3}{(}a2a1+1\underset{3}{)}+a1\underset{2}{)}+a2a1+1\underset{1}{)}+a3(a2a1+1)+a1$$

$$N7 = a6\underset{1}{(}a5\underset{2}{(}a4\underset{3}{(}a3\underset{\substack{4\\ n-2}}{(}a2a1+1\underset{\substack{4\\ n-2}}{)}+a1\underset{\substack{3\\ n-3\\ n-m}}{)}+a2a1+1\underset{\substack{2\\ n-4\\ n-(m+1)}}{)}+a3(a2a1+1)+a1\underset{1}{)}$$

$$+\,a4(a3(a2a1+1)+a1)+a2a1+1$$

&c.

E in generale

$$N(n+1) = a(n)N(n)+N(n-1) = a(n)\underset{1}{(}a(n-1)\underset{2}{(}a(n-3)\underset{3..n-3}{(}\ldots\underset{n-2}{(}a3(a2a1+1\underset{n-2}{)}$$

$$+a1\underset{\substack{n-3\\ n-m}}{)}+a2a1+1\underset{\substack{n-4\\ n-(m+1)}}{)}+a3(a2a1+1)+a1\underset{\substack{n-5\\ n-(m+2)}}{)}+a4(a3(a2a1+1)+a1)+$$

$$a2a1+1\underset{\substack{n-6\\ n-(m+3)}}{)}+a5(a4(a3(a2a1+1)+a1)+a2a1+1)+a3(a2a1+1)$$

$$+a1\underset{\substack{n-7\\ n-(m+4)}}{)}+\ldots+a(n-3)(a(n-4)(\ldots)\underset{\substack{1\\ n-(n-1)}}{)}+N(n-1) \qquad (4)$$

11. Il valore di $N(n+1)$ è composto in un modo del tutto simile a quello (3) di $M(n+1)$; per formarlo basta scrivere il prodotto

$$a(n)\underset{1}{(}a(n-1)\underset{2}{(}a(n-3)\underset{3\,n-3\,n-2}{(}\ldots(a3(a2a1+1\underset{n-2}{)}+a1\underset{n-3}{)}+a2a1+1\underset{n-4}{)}\quad,$$

al di là della $n-3^{ma}$ parentesi ritornano costantemente le quantità che principiano nella serie ascendente delle parentesi; onde vale anche quì la regola del n.° 6, i valori di m essendo in questo caso successivamente $m=4$, $5, 6, \ldots n-2$, $n-1$; perciò la quantità che segue la $n-m^{ma}$ parentesi è

$$a(m-1)(a(m-2)(a(m-3)(\ldots\ldots a3(a2a1+1)+a1)+\ldots\underset{n-(m+1)}{)}\quad,$$

e dopo la parentesi $\underset{n-4}{)}$ vi sono, principiando da $m=4$,

$n-5$

$n-5$ quantità da scrivere, chiuse con un eguale numero di parentesi.

12. Quindi per formare di seguito con estrema facilità il valore di $a(n)\,\mathrm{N}(n)$, giunto che si sarà alla parentesi),
$n-4$
basterà retrogradare scrivendo successivamente le quantità $a3(a2a1+1)+a1$, $a4(a3$ (etc., che principiano nella serie ascendente, e che terminano nella discendente alla parentesi precedente quella sotto cui si pone la quantità in quistione.

13. Il valore di $\mathrm{N}(n-1)$ è contenuto fra le parentesi ( ) del prodotto $a(n)\mathrm{N}(n)$, e giunto con questo fornirà il
$2\ n-(n-2)$
valore di $\mathrm{N}(n+1)$.

14. La sesta somiglianza di composizione si scoprirà nel numeratore $\mathrm{M}(n+1)$ della Frazione $\dfrac{\mathrm{M}(n+1)}{\mathrm{N}(n+1)}$ quando essa sarà eguale ad una Frazione continua maggiore dell' unità, come è l' espressione generale del n.° 1; in fatti si avrà

$\mathrm{M}1 = a$

$\mathrm{M}2 = a1a+1$

$\mathrm{M}3 = a2(a1a+1)+a$
$\quad 1 \quad 1$

$\mathrm{M}4 = a3(a2(a1a+1)+a)+a1a+1$
$\quad 1 \quad 2 \quad 2 \quad 1$

$\mathrm{M}5 = a4(a3(a2(a1a+1)+a)+a1a+1)+a2(a1a+1)+a$
$\quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 3 \quad 2 \quad 1$

$\mathrm{M}6 = a5(a4(a3(a2(a1a+1)+a)+a1a+1)+a2(a1a+1)+a)+$
$\quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 4 \quad 3 \quad 2 \quad 1$

$a3(a2(a1a+1)+a)+a1a+1$

$\mathrm{M}7 = a6(a5(a4(a3(a2(a1a+1)+a)+a1a+1)+$
$\quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 5 \quad 4 \quad 3$
$\quad n-1 \quad n-1 \quad n-2 \quad n-3$
$\quad n-m \quad n-(m+1)$

$a2(a1a+1)+a)+a3(a2(a1a+1)+a)+a1a+1)$
$\quad 2 \quad 1$
$\quad n-4 \quad m(n-1)$
$\quad n-(m+2)$

$+\ a4$

$$+\ a4(a3(a2(a1a+1)+a)+a1a+1)+a2(a1a+1)+a$$

&c.

E in generale

$$M(n+1)=a(n)\underset{1}{(}a(n-1)\underset{2..n-2}{(\cdots(}\ a2\underset{n-1}{(}a1a+1\underset{n-1}{)}+a\underset{\substack{n-2\\ n-m}}{)}+a1a+1\underset{\substack{n-3\\ (n-m+1)}}{)}+$$

$$a2(a1a+1)+a\underset{\substack{n-4\\ n-(m+1)}}{)}+a3(a2(a1a+1)+a)+a1a+1\underset{\substack{n-5\\ n-(m+3)}}{)}+$$

$$a4(a3(a2(a1a+1)+a)+a1a+1)+a2(a1a+1)+a\underset{\substack{n-6\\ n-(m+4)}}{)}+\ldots+$$

$$a(n-3)(a(n-4)(\ldots\ldots\underset{n-(n-1)}{)}+M(n-1) \qquad (5)$$

15. Onde per aver subito il valore di $a(n)M(n)$, pongasi il prodotto

$$a(n)\underset{1}{(}a(n-1)\underset{2}{(}a(n-2)\underset{3..n-2}{(\ldots(}a2\underset{n-1}{(}a1a+1\underset{n-1}{)}+a\underset{\substack{n-2\\ n-m}}{)}+a1a+1\underset{\substack{n-3\\ n-(m+1)}}{)}$$

Al di là di questa $n-2^{ma}$ parentesi ritornano uniformemente, come quì avanti, le quantità che principiano nella serie ascendente delle parentesi: onde vale ancora in questo caso la regola del n.° 6, essendo quì m successivamente $=2, 3, 4, \ldots. n-1$.

16. Perciò si formerà con somma facilità il valore di $(n)M(n)$ scrivendo la serie de' fattori quì sopra sino alla parentesi $\underset{n-2}{)}$, dopo la quale si scriveranno le quantità, che nella serie ascendente così cominciano, partendo dalla media, $a1a+1$, $a2(a1a+1)+a$, $a3(a2($ &c., $a4(a3($ &c., e che terminano alla parentesi precedente quella sotto cui si scrive la quantità in quistione.

17. Il valor di $M(n-1)$ è compreso fra le parentesi $\underset{2}{(}\quad\underset{n-(n-2)}{)}$ del

del prodotto $a(n)M(n)$; giungendolo a questo si avrà il valore cercato di $M(n+1)$.

18. Ora ristringendo in poche parole, quanto ho sin quì esposto, onde formar si possano col libero moto della penna i valori generali di $M(n+1)$ ne' casi di $\frac{A}{B}$ maggiore e minore dell'unità, e del denominatore comune a questi due casi, dico, che basterà di scrivere a tale obbietto le quantità che occupano il sito di mezzo ne' mentovati valori, aggiungendovi quella che le segue, cioè

$$\left.\begin{array}{l} \text{Se } \frac{A}{B} > 1\text{, si scriverà } (\underset{n-1}{a1a}\underset{n-1}{+1}) + \underset{n-2}{a}) \\ \text{Se } \frac{A}{B} < 1\text{, } \ldots\ldots\ldots (\underset{n-3}{a3a2} \underset{n-3}{+1}) + \underset{n-4}{a2}) \end{array}\right\} \text{per i valori di } M(n+1)$$

$$\text{E per il valore di } N(n+1)\text{, } \ldots (\underset{n-2}{a2a1}\underset{n-2}{+1}) + \underset{n-3}{a1})$$

Facendo precedere queste quantità medie da destra a sinistra, rispettivamente da

$$a(n)\,\underset{1}{(}\,a(n-1)\,\underset{2}{(}\,\ldots\ldots\underset{n-3}{(}\,a3\,\underset{n-2}{(}\,a2$$

$$a(n)\,\underset{1}{(}\,a(n-1)\,\underset{2}{(}\,\ldots\ldots\underset{n-5}{(}\,a5\,\underset{n-4}{(}\,a4$$

$$a(n)\,\underset{1}{(}\,a(n-1)\,\underset{2}{(}\,\ldots\ldots\underset{n-4}{(}\,a4\,\underset{n-3}{(}\,a3$$

Continuandole poi da sinistra a destra, scrivendovi successivamente dopo le parentesi $n-2$, ovvero $n-4$, ovvero $n-3$ le quantità terminate alla parentesi antecedente, e principianti nella serie ascendente sotto la parentesi segnata dallo stesso numero che affetta l'antecedente or mentovata, conformemente alla regola del n.° 6; i valori di $M(n-1)$, e $N(n-1)$ saranno contenuti fra le parentesi $\underset{2}{(}\quad\underset{n-(n-2)}{)}$ de' valori di $a(n)\,M(n)$, $a(n)N(n)$.

19. Parlerò ora brevemente delle equazioni indeterminate

 del

del primo grado; la loro risoluzione dipende dal teorema seguente

Dato un rotto irriducibile $\frac{B}{A}$, *si può sempre trovare un moltiplicatore* $M(n)$, *che renda* $BM(n)$, *multiplo di* A *col resto* ± 1.

Il quale non è che un corollario della nota proprietà di due frazioni qualunque consecutive, convergenti verso il valore di $\frac{A}{B}$ sviluppato in frazione continua; per es. di $\frac{M(n)}{N(n)}$, $\frac{M(n+1)}{N(n+1)}$ le quali danno generalmente

$$N(n)M(n+1) - M(n)N(n+1) = \pm 1$$

qualunque sia il numero intiero n; $+$ ovvero $-$, secondo che il numero de' quoti $a, a1, \ldots a(n)$ della frazione continua eguale a $\frac{M(n+1)}{N(n+1)}$ è pari ovvero dispari, cioè

$$N(n)M(n+1) - M(n)N(n+1) = -(-1)^n \qquad (6)$$

Se di passaggio si volesse dimostrare l' equazione (6), col mezzo della presente notazione, si potrebbe ragionare così; per il calcolo delle derivazioni, la cui forza ha luogo in questo caso, attesa la legge costante di composizione de' valori qualunque $M(n)$, $N(n)$, contenuta nelle equazioni (2), provata tale equazione per due valori qualunque di n, corrispondenti al doppio segno $\pm$, essa rimarrà provata generalmente.

Pongansi quindi per n i due più semplici valori possibili, relativi al doppio segno, cioè sia $n = 0$, e $n = 1$, si avrà

$$No\,M1 - Mo\,N1 = -1$$
$$N1\,M2 - M1\,N2 = 1$$

E sostituendo in queste espressioni i valori di No, Mo, N1, N1, &c. dati ne' numeri (1, 10 e 14), esse diverranno

$$0.a - 1.1 = -1$$

$1(aa1+1)$

$1(aa1+1) - aa1 = 1$

20. Ritornando al teorema quì sopra enunciato, egli è chiaro, che se nella notazione de' termini della frazione $\frac{M(n+1)}{N(n+1)}$, si dà a n il più grande valore possibile, tale frazione, comprendente allora l' ultimo denominatore $a(n)$, (n. 10, e 14), è eguale alla data $\frac{A}{B}$; perciò $A = M(n+1)$, $B = N(n+1)$, e così si dimostrerà anche quì di passaggio con somma facilità il mentovato teorema, sostituendo nell' equazione (6) a $M(n+1)$, $N(n+1)$ i loro valori A e B, e quindi si avrà

$$N(n)A - M(n)B = -(-1)^n$$

d' onde $$\frac{M(n)B}{A} = N(n) + \frac{(-1)^n}{A} \qquad (7)$$

21. Sia di presente

$$ax \mp by = c \qquad (8)$$

l' equazione proposta indeterminata del primo grado; essendo a e b primi fra di loro; non essendo tali, e c non avendo comune con essi lo stesso divisore, la proposta è evidentemente irrisolubile.

Sia x l' indeterminata che ha il maggiore coefficiente, cioè sia $a > b$; si ha

$$x = \frac{c \pm by}{a}$$

E $$M(n)\frac{c \pm by}{a} = \frac{cM(n)}{a} \pm \frac{bM(n)y}{a} = \frac{cM(n)}{a} \pm N(n)y + \frac{(-1)^n y}{a} \quad (9).$$

Ora si sarebbe tentato di porre $\frac{cM(n) \pm (-1)^n y}{a}$ = ad un numero qualunque intiero e, giacchè egli sembra a prima vista che tale espressione sia la sola che in quella di x, lascierebbe una quantità che da per se non sarebbe un numero intiero; e in fatti, operando in questa guisa, si scioglierebrebbe la proposta; ma il valore di y così ottenuto, e quindi quello di x, non sarebbero generalmente i più semplici possibili; e la ragione *a priori* n'è, che il moltiplicatore $M(n)$, può rendere $\frac{cM(n)}{a}$ un numero frazionario, cioè può essere

$$\frac{cM(n)}{a} = c' + \frac{a'}{a}. \qquad (10)$$

Allora $\quad M(n)\frac{c \pm by}{a} = c' + \frac{a'}{a} \pm N(n)y \pm \frac{(-1)^n y}{a}$.

Ora pongasi la sola e più semplice frazione, che incontrar si possa nel valore di $M(n)\frac{c \pm by}{a}$, $= e$, cioè facciasi

$$\frac{a' \pm (-1)^n y}{a} = e$$

d' onde $(-1)^n y = ae \mp a'$

e facendo in modo, che qualunque sia n, pari o dispari, y resti sempre positivo, e raccogliendo ambi i casi in una sola espressione generale, si avrà

$$y = ae \mp (-1)^n a';$$

sostituito tale valore in quello di x, ed avvertendo che in virtù delle equazioni (7) e (10), si ha

$$c - (-1)^n a'b = (-1)^n a[bc' - cN(n)]$$

si otterrà $\quad x = \pm be + (-1)^n [bc' - cN(n)]$

22. Quindi della proposta

$$ax \mp by = c$$

si ha la semplicissima soluzione

$$y = ae \mp (-1)^n a' \qquad (11)$$

$$x = \pm be + (-1)^n [bc' - cN(n)] \qquad (12).$$

I termini della frazione $\frac{M(n)}{N(n)}$, ch'è la penultima delle convergenti verso il valore di $\frac{a}{b}$, essendo noti per lo sviluppo di $\frac{a}{b}$ in frazione continua, ed i valori di a' e di c' per l'equazione (10).

23.

23. Avanti di paragonare questa soluzione con quelle di *Eulero* (*a*), *Lagrange* (*b*) e *le Gendre* (*c*), piglio un esempio, cioè l' equazione

$$56x - 39y = -11$$

trattata da *Eulero* e *Lagrange* ne' luoghi citati.

Si ha $x = \dfrac{-11 + 39y}{56}$. $a = 56$, $b = 39$, $c = -11$. E

$$\frac{56}{39} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}}}}$$

$$a = 1, a1 = 2, a2 = 3, a3 = 2;\ n = 4;\ M4 = 23;\ N4 = 16.$$

$$\frac{cM(n)}{a} = \frac{-11.23}{56} = -4 - \frac{29}{56}, a' = -29, c' = -4.$$

Dunque le formole (11) e (12) danno

$$y = 56e + 29$$
$$x = 39e + 20.$$

Eulero e *Lagrange* trovano

$$y = 56e + 253$$
$$x = 39e + 176.$$

Nella mia soluzione i più piccoli valori di x e di y si trovano subito col supporre ad e il minore valore possibile, atto a dare per x e per y, de' numeri intieri e positivi, cioè facendo $e = 0$, la dove nelle soluzioni de' sommi Geometri or or mentovati, bisogna fare $e = -4$, per avere i minori numeri $y = 29$, $x = 20$.

24. *Eulero* scioglie le equazioni in quistione, esaurendo successivamente colla divisione continua i coefficienti a e b, sinchè il coefficiente di y arrivi ad eguagliare l' unità; ed il suo metodo tradotto, per mezzo della notazione adottata precedentemente, in una espressione generale algebrica, conduce alla soluzione seguente della proposta ax

(*a*) Alg. Tom. 2.

(*b*) Ad iz. all' Alg. di Eulero. Tom. cit.

(*c*) Essai sur la théorie des nombres §. 11.

$$ax \mp by = c$$
$$y = ae \mp (-1)^n cM(n) \qquad (13)$$
$$x = \pm be - (-1)^n cN(n) \qquad (14)$$

Onde i numeri $cM(n)$, $cN(n)$ essendo più grandi rispettivamente de' numeri a', $cN(n) - bc'$, le soluzioni (11) e (12) sono più semplici delle precedenti; nè si può temere che $cN(n)$ e bc' abbiano lo stesso segno, poichè i segni di c e c' sono i medesimi nell' equazione (10).

25. *Lagrange* dà la risoluzione dell' equazione $ax - by = c$, in due modi diversi; nel primo Egli fa vedere, che se ne fosse nota una sola soluzione, da questa se ne dedurrebbero tutte le altre possibili, e chiamando α e β i valori qualunque particolari che soddisfanno alla proposta, dimostra essere
$$y = ae + \beta$$
$$x = be + \alpha$$
Egli è chiaro che questi valori non sono generalmente così semplici come li (11) e (12), appunto perchè lasciano ignoti quelli di α e di β, per la cui determinazione, il citato Geometra prescrive de' limiti.

Nella seconda maniera, Egli fa dipendere la soluzione della proposta dall' equazione $ap - bq = \pm 1$, ov' egli suppone tacitamente $b > a$; ma avend' io supposto il contrario, questa equazione tradotta ne' segni adottati, viene espressa così $aN(n) - bM(n) = -(-1)^n$, ed il citato Geometra trova $y = \pm qc$, $x = \pm pc$, cioè $y = \pm cM(n)$, $x = \pm cN(n)$, e prendendo questi valori per α e per β, Egli ottiene da ultimo
$$y = ae \pm cM(n)$$
$$x = be \pm cN(n).$$
I quali valori ritornano a quelli dell' *Eulero*, e a quelli dati dal *le Gendre* nell' opera citata.

26. *Lagrange* avendo trovato per x e per y i valori particolari $\pm cN(n)$, $\pm cM(n)$, ha dovuto ricorrere al suo primo metodo, per ottenere, se non m' inganno, la soluzione generale; ora parmi di potere dimostrare *a priori*, che que-

quest' ultima non si dà, senza che ne esista prima una particolare; ciò che forma lo scopo del seguente

Teorema. *La soluzione generale delle equazioni indeterminate del primo grado, inchiude necessariamente una soluzione nota particolare, e questa è della generale il più semplice caso particolare, non escludendone, se sia bisogno, i risultati negativi.*

Perchè se nelle formole (11) e (12), facciasi $e=0$, si avranno le soluzioni particolari $y=\mp(-1)^n a'$

$$x=-(-1)^n(cN(n)-bc')=\frac{c-(-1)^n a'b}{a} \qquad \text{N.° 21}$$

Cioè sostituiti questi valori nella proposta

$$ax\mp by=c$$

si ha in conseguenza

$$c-(-1)^n a'b+(-1)^n a'b=c.$$

27. Per i più piccoli valori di y e di x quì sopra rapportati, ho dovuto generalmente non escluderne i negativi; nientemeno si troverebbe in più casi, che le soluzioni in quistione danno i più piccoli valori assoluti; ma ne ometto il dettaglio per terminare questa troppo lunga Memoria.