DUBBJ PROPOSTI

Al Socio Paolo Ruffini

SULLA SUA DIMOSTRAZIONE DELLA IMPOSSIBILITA' DI RISOLVERE LE EQUAZIONI SUPERIORI AL QUARTO GRADO

Da Gianfrancesco Malfatti

Ricevuti il dì 26 Aprile 1804.

L' egregio Socio Paolo Ruffini, il quale essendo di professione un valoroso seguace della Scienza del celebre Vecchio di Coo, rinnovando la memoria dei Cardani, e dei Commandini, merita di essere annoverato tra i Geometri di primo grido, nel suo bel libro sulla Teoria delle equazioni, stampato in Bologna l' anno 1799, e appresso in una Memoria inserita nel Tomo IX della Società nostra, ha inteso di dimostrare impossibile la risoluzione, in termini finiti, delle equazioni superiori al quarto grado. Siccome quella delle inferiori spetta interamente al valore degli Ingegni Italiani, dai quali i primi metodi di tali risoluzioni sono felicemente scaturiti, così io, che m' interesso moltissimo per la gloria della mia nazione, desidero ardentemente, che si possa asserire, averla su tale indagine portata il Collega Ruffini al suo colmo, collo stabilimento solido di un Teorema, che tolga l' adito ai Geometri di nuovi ed inutili tentativi per giungere a questa meta. Pertanto insortomi qualche dubbio contro tal sua dimostrazione ho creduto ben fatto di esporlo nel presente mio scritto, assoggettando tutto quello che sarò per dire alla sua rispettabile decisione. Con tale occasione prendendo la cosa da più alto, premetto un' idea della genesi delle equazioni, la quale per l' uso che ne ho sempre fatto, mi riesce più familiare, e sostanzialmente non differisce da quella che mette in pratica il Consocio Ruffini.

Per procedere con qualche chiarezza in una materia per se scabrosa e difficile, avanti ogni cosa premetto.

1.° Io considero le equazioni mancanti del secondo termine, di qualunque grado esse siano, ed assegno alla radice tante parti, quanti sono i coefficienti indipendenti l' uno dall' altro dei termini dell' equazione; per esempio per l' equazione cubica $x^3 + ax + b = 0$, stabilisco la radice $x = m + n$, cioè spezzo la radice in due parti, perchè due sono i coefficienti indipendenti nell' equazione, a e b; e in generale per l' equazione $x^r + ax^{r-2} + bx^{r-3} + cx^{r-4} + \ldots\ldots + u = 0$ stabilisco la radice $x = m + n + p + q + \ldots\ldots +$ ec., essendo $r-1$ il numero di queste parti della radice. Non credo che al dotto Ruffini possa dispiacere che io consideri le radici divise nelle suddette parti, laddove egli ne esprime ciascuna con un sol simbolo, perchè in sostanza qualunque delle due espressioni è sempre convertibile nell' altra qualor si voglia.

2.° Inoltre per la formazione delle mie equazioni canoniche, che si confrontano colle proposte, io mi servo delle radici dell' unità elevata al grado dell' equazione, il qual grado, supposto r, potrà essere espresso così $f^r - 1 = 0$. Sia per esempio l' equazione di terzo grado $x^3 + ax + b = 0$, di cui suppongo una radice $x = m + n$; a questa corrisponde l' equazione cubica dell' unità $f^3 - 1 = 0$, le cui radici sono, $f = 1$; $f = \dfrac{-1 + \sqrt{-3}}{2}$; $f = \dfrac{-1 - \sqrt{-3}}{2}$, valendomi di queste due ultime radici immaginarie, postochè mi sono servito della reale 1 nella ipotesi di $x = m + n$; le altre due radici della cubica esprimo nella maniera che sie-

gue

gue $x = \left(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right)m + \left(\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\right)n$; $x = \left(\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\right)m + \left(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right)n$; dalle radici, colla trasposizione dei termini del secondo membro di ciascuna di queste tre equazioni, passo ai fattori, e di questi il prodotto mi fa risultare la mia canonica di terzo grado, che debbo colla cubica proposta confrontare, onde trarre i valori di m, n, e rendermi con ciò nota la radice della generale equazione cubica $x^3 + ax + b = 0$. Ritornando all' equazione generale, che in se racchiude tutti i gradi, ed espressa col massimo esponente r, dico; o r è pari, o dispari. Se r è pari l' equazione $f^r - 1 = 0$ si potrà sempre spezzare in due fattori $f^{\frac{r}{2}} + 1$; $f^{\frac{r}{2}} - 1$; riuscendo in tal caso $\frac{r}{2}$ numero intiero. Ora contenendo l' uno e l' altro fattore delle radici immaginarie, la nostra f dev' essere presa non nel fattore $f^{\frac{r}{2}} - 1 = 0$ ma nell' altro $f^{\frac{r}{2}} + 1 = 0$, e direm poi la ragione in progresso. Nel caso di r dispari, divisa l' equazione $f^r - 1 = 0$ per $f - 1$, abbiamo il quoziente $f^{r-1} + f^{r-2} + f^{r-3} + \ldots + 1 = 0$; ossia invece dell' ultimo termine 1 sostuito f^r, e preso il quoziente inversamente; $f + f^2 + f^3 + f^4 + \ldots\ldots + f^r = 0$. O questo quoziente è di sua natura indeprimibile, od è composto di più fattori razionali. Nel fattore di grado più elevato degli altri, che nel primo caso è l' istesso quoziente indeprimibile, va presa la radice f, per mezzo della quale otterremo tutte le altre immaginarie che si comprendono nella equazione $f^r - 1 = 0$, e di esse ci serviremo per esprimere i fattori della canonica corrispondente al grado r della proposta equazione, onde paragonati i risultati che nascono dalla moltiplicazione dei fat-

fattori suddetti coi termini analoghi della proposta, si deducano da ultimo i valori di m, n, ed in conseguenza riescano note tutte le radici dell' equazione.

3.° Sarebbe di molta briga l' esprimere le radici immaginarie dell' unità elevata ad alti gradi; ma dopo aver dimostrato alla mia maniera una proprietà generale di tali radici dell' unità, sarà agevole ancorchè non se ne presenti il valore di ciascuna, formare le nostre canoniche, qualunque sia il grado dell' equazione.

Il Teorema è questo. Supposta in generale l' equazione $1-f^r=0$, siccome questa sarà sempre divisibile per $1-f$, ed avremo il suddetto quoziente $1+f+f^2+f^3+f^4+$ ec.... $+f^{r-1}$; ossia $f+f^2+f^3+f^4+$ ec. . . . . $+f^r$. Se supporremo che f sia una di quelle radici prese nel massimo fattore dell' accennato quoziente, o nel caso di r pari, chè può dar la formola composta di due fattori dello stesso grado, se prenderem la radice immaginaria non nel fattore $f^{\frac{r}{2}}-1$, che ammette la radice $f=1$, ma nell'altro $f^{\frac{r}{2}}+1$, sarà f^2 un' altra radice, f^3 una terza, f^4 una quarta ec. fino all' ultima $f^r=1$, onde il quoziente suddetto sarà la somma totale di tutte le diverse radici dell' equazione $f^r-1=0$.

Per dimostrare questo Teorema mi servo d' un altro già noto agli Analisti, che si trova espresso in quasi tutti i libri elementari di Istituzioni analitiche, ed è il seguente. Supposta in generale l' equazione $x^r-Ax^{r-1}+Bx^{r-2}-Cx^{r-3}+$ ec. . . . . $+P=0$, le cui radici siano a, b, c, ec., la somma delle quali si esprimerà con questo simbolo M^1; la somma dei quadrati di queste radici si esprima con M^2, quella dei cubi con M^3, e così proseguendo fino alla somma delle podestà r delle radici che si esprime con M^r: intendo che i numeri 1, 2. 3. ec. . . . fino ad r, siano apici, e non podestà. Viene in tai libri dimostrato valer le seguenti equazioni,

M^1-

$M^1 - A = 0$
$M^2 - AM^1 + 2B = 0$
$M^3 - AM^2 + BM^1 - 3C = 0$ e in generale . . . .

. . . . .
. . . . .
. . . . .

$M^r - AM^{r-1} + BM^{r-2} - CM^{r-3}$ fino a . . . . $\pm rM = 0$
dove l' ultimo M senza apice rappresenta il prodotto di tutte le radici. Qui si vede che per ragione dell' alternativa dei segni, l' ultimo termine rM ha il segno positivo se l' r^{esimo} è il prodotto di numero pari di radici, ed ha il segno negativo se l' r^{esimo} è il prodotto di radici di numero dispari.

Mi resta pertanto a dimostrare che per la nostra equazione $f^r - 1 = 0$ sarà sempre M^1, M^2, M^3 ec. . . . . fino ad M^{r-1} eguale a zero. Per provare quindi che la formola $f + f^2 + f^3 + f^4 +$ ec. . . . $+ f^r$ è l' aggregato di tutte le radici dell' equazione $f^r - 1 = 0$, basterà che io dimostri essere realmente $f + f^2 + f^3 + f^4 +$ ec. . . . $+ f^r = M^1 = 0$, e così i quadrati de' suddetti termini $f^2 + f^4 + f^6 + f^8 +$ ec. . . . $+ f^{2r} = M^2 = 0$, i cubi $f^3 + f^6 + f^9 + f^{12} +$ ec. . . . . $+ f^{3r} = M^3 = 0$, e generalmente $f^{1(r-1)} + f^{2(r-1)} + f^{3(r-1)} + f^{4(r-1)} +$ ec. . . . $+ f^{r(r-1)} = M^{r-1} = 0$. Provato pertanto ch' io abbia esser $M^{r-1} = 0$, sarà parimenti dimostrato che essendo $f + f^2 + f^3 + f^4 +$ ec. . . . $+ f^r = 0$, sarà la somma degli ambi, dei terni, delle quaderne ec. di queste radici, eguale a zero, sino alla denominazione degli $r - 1^{esimi}$, che cala d'un' unità dal grado dell'equazione proposta $f^r - 1 = 0$.

Ora poichè $1 - f^r = (1 - f)(f + f^2 + f^3 + f^4 +$ ec. . . . $+ f^r)$, sarà anche $(1 - f)(f + f^2 + f^3 + f^4 +$ ec. . . . . . $+ f^r) = 0$, esclusa pertanto la radice $f = 1$, perchè f non deve essere presa che tra le radici immaginarie, ne viene per conseguenza che sarà $f + f^2 + f^3 + f^4 +$ ec. . . . . $+ f^r = 0$, ed ecco

che

che il secondo termine dell'equazione generale $f^r - Af^{r-1} + Bf^{r-2} - \text{ec.} \dots + P = 0$ è nullo, e tale appunto nella nostra equazione $f^r - 1 = 0$. Potrà quindi quest' aggregato $f + f^2 + f^3 + f^4 + \text{ec.} \dots + f^r$ rappresentare la somma delle radici della equazione $f^r - 1 = 0$, se la somma degli ambi di queste radici, dei terni, delle quaderne ec. fino agli $r - 1$.^{esima} cioè B, C, ec. fino al coefficiente del termine precedente P, sia zero, e se l' unità r^{esima} sia -1, così esigendo l' indole della nostra equazione $f^r - 1 = 0$.

Ma questo si dimostra così. La Teoria della sommazione delle serie geometriche, ci fa conoscere essere $f^m + f^{2m} + f^{3m} + f^{4m} + \text{ec.} \dots + f^{mr} = \dfrac{f^m(1 - f^{rm})}{1 - f^m}$, ed essendo sì il numeratore che il denominatore di questa formola divisibile per $1 - f$, sarà la suddetta serie $f^m + f^{2m} + f^{3m} + \text{ec} \dots + f^{mr} = f^m(1 + f + f^2 + f^3 + \text{ec.} \dots + f^{r-1} + f^r + f^{r+1} + f^{r+2} + \text{ec.} \dots + f^{2r-1} + f^{2r} + f^{2r+1} + f^{2r+2} + \text{ec.} \dots + f^{3r-1} + f^{3r} + f^{3r+1} + f^{3r+2} + \text{ec.} \dots + f^{4r+2} + \dots \text{ec.} \dots + f^{r(m-1)}$, ossia eguale $f^m(1 + f^r + f^{2r} + \text{ec.} \dots + f^{r(m-1)})(1 + f + f^2 + \text{ec.} \dots + f^{r-1})$, e perchè f^r, f^{2r}, f^{3r} ec. .... $f^{r(m-1)}$ sono ciascuna eguale all' unità, e diventano di numero m, la suddetta espressione si cangia in quest' altra $f^m . m(1 + f + f^2 + \text{ec.} \dots f^{r-1})$. Così il quoziente del denominatore dopo la divisione per $1 - f$ diventa $1 + f + f^2 + f^3 + \text{ec.} \dots + f^{m-1}$. Laonde si fa l' anzidetta serie $f^m + f^{2m} + f^{3m} + \text{ec.} \dots + f^{rm} = \dfrac{fm . m(1 + f + f^2 + \text{ec.} \dots + f^{r-1})}{1 + f + f^2 + \text{ec.} \dots f^{r-1}}$. Ora o r è un multiplo di m, o no; nel caso di r multiplo di m, succede un quoziente esatto, se si divide il numeratore per il denominatore, e in esso troverassi sempre il fattore $1 + f + f^2 + f^3 + \text{ec.} \dots + f^{m-1}$. Se poi r non è un multiplo di m, non potendosi fare esattamente cotal divisione resterà la formola come l' abbiamo sopra espressa, e poichè supponiamo r maggiore di m, e la prima radice f immaginaria

ria va presa nel maggior fattore della serie $1+f+f^2+$ ec. . . . f^{r-1}, cotal valore di radici introdotto nella medesima serie renderà nullo il numeratore, nè potrà esser tale il denominatore; dunque, supposto $1+f+f^2+$ ec. . . . . $+f^{r-1}$ ovvero $f+f^2+f^3+$ ec. . . . . $+f^r$ eguale a zero, diventerà pur zero la serie $f^m+f^{2m}+f^{3m}+$ ec. . . . $+f^{rm}$. Ora siccome il valore degli ambi delle radici di qualunque equazione dipende da un termine che rappresenta la somma dei quadrati delle medesime radici, e da un altro che è il quadrato della somma delle stesse radici, posta questa somma eguale a zero, ed avendo dimostrato che in generale $f^m+f^{2m}+f^{3m}+$ ec. . . . $+f^{rm}=0$, fatto $m=2$ rappresenterà quella formola la somma dei quadrati di tutte le radici, che annullandosi rende nulla eziandio la somma degli ambi delle stesse radici. Fatto $m=3$ avremo in essa la somma dei cubi delle medesime radici, e siccome la somma dei terni ha nel suo valore cotal somma unita agli ambi e somma di radici, resta chiaro annullarsi ancora la somma dei terni; e con simil discorso si dirà pure lo stesso per la somma delle quaderne ec., sino all' ultimo termine esclusivamente, il quale non essendo altro che il prodotto di tutte le radici, quando avremo dimostrato essere il prodotto di tali radici = all' unità negativa, quando r è pari, o si prenda ciascuna radice positivamente, o negativamente, ed eguale all' unità positiva quando r è dispari, e si prendano le radici positive, resterà anche dimostrato restituirsi l' equazione $f^r-1=0$.

Per far ciò rifletteremo essere il prodotto delle radici

$$f.f^2.f^3.f^4.\text{ ec.} \ldots f^r=f^{1+2+3+4\text{ ec.} \ldots +r}\text{ cioè }=f^{r\frac{r(r+1)}{2}}=\text{M}$$

della Tabella. Così equivalerà l' espressione $f^r+f^{2r}+f^{3r}+f^{4r}+$ ec. . . . $+f^{rr}$ ad M^r cioè ad M coll' apice r, ossia alla somma delle podestà r di ciascuna radice. Quando pertanto si considera nella nostra equazione $f^r-1=0$ l' unico r^{esimo}, nella formola generale della Tabella, annullandosi pel caso nostro tutti i termini intermedj tra il primo e l' ultimo, sarà $M' \pm rM = o$. Ora o il numero r è pari, o dispari; supposto r pari, avendo luogo il primo segno $+$ nell' ultimo termine, sarà $M' + rM = o$; nel caso di r dispari, avrà luogo il secondo segno e sarà $M' - rM = o$; cioè nel caso di r, pari adoperando i nostri simboli espressi colle podestà di f, $f^r + f^{2r} + f^{3r} +$ ec. . . . $+ f^{r.r} + f^{\frac{r(r+1)}{2}} = o$. Ma supposto r pari, la nostra equazione $f^r - 1 = o$ è sempre il prodotto dei due fattori $f^{\frac{r}{2}} + 1$; $f^{\frac{r}{2}} - 1$; e noi non prendiamo la prima radice f nel fattore $f^{\frac{r}{2}} - 1$, ma bensì nell' altro fattore $f^{\frac{r}{2}} + 1$; dunque valendoci della equazione $f^{\frac{r}{2}} + 1 = o$ sarà $f^{\frac{r}{2}} = - 1$. La superiore espressione $f^{r\frac{(r+1)}{2}}$ equivale quest' altra $f^{\frac{r.r}{2}} . f^{\frac{r}{2}}$, ma perchè r è pari, sarà sempre $f^{\frac{r.r}{2}} = 1$, e l'altro fattore $f^{\frac{r}{2}} = - 1$, dunque sostituendo questo valore, sarà nel caso di r pari $f^r + f^{2r} + f^{3r} + f^{4r} +$ ec. ... $+ f^{rr} - rM = o$, e poichè ciascun termine, f^r, f^{2r}, f^{3r}, f^{4r} ec. . . . f^{rr}, è eguale all' unità, la prima formola esprimerà r numero di unità, e quindi valerà l'equazione $r + rM = o$, $M = - 1$, ovvero il prodotto di tutte le radici f, f^2, f^3, f^4 ec. . . $f^r = - 1$. Ma essendo pari il numero delle radici, o si considerino esse col segno positivo, o portando ciascuna dall' altra parte dell' equazione, onde facciano il secondo termine di ciascun fattore cangiando ognuna il proprio segno, non resterà mutato il segno del prodotto, dunque anche nell'equazione ridotta a zero l' ultimo termine sarà eguale a $- 1$. Nel caso poi di r dispari, abbiamo parimenti $M^r - rM = o$, ossia cogli equivalenti simboli, $f^r + f^{2r} + f^{3r} +$ ec. . . . $+ f^{rr} - rf^{\frac{r(r+1)}{2}} = o$. Ma se r è dispari, necessariamente $r + 1$ è pari, onde $\frac{r+1}{2}$

$\frac{r+1}{2}$ diventa numero intiero che chiamo m, e sarà lo stesso che dire f^{rm}, e siccome l'equazione $f^r - 1 = 0$ dà $f^r = 1$ sarà pure $f^{rm} = 1$. Dunque sarà lo stesso che dire r numero di unità che indica il primo termine $-rM = 0$ cioè $M = 1$; ma perchè il numero delle radici è dispari, ciascuna d'esse cangia il segno trasportandola dall'altra parte dell'equazione, e resta pure cangiato il segno del loro prodotto; dunque anche in questo caso avremo nell' equazione ridotta a zero l' ultimo termine eguale a -1; con che sarà restituita la primitiva formola $f^r - 1 = 0$, e si verifica evidentemente essere $f + f^2 + f^3 + f^4 +$ ec. . . . $+ f^r$ la somma di tutte le radici della suddetta equazione, cosicchè considerata f come la prima un'altra sarà f^2, una terza f^3 ec. fino all' ultima f^r.

Darò per maggior chiarezza uno o due esempj di tali fattori nelle formole del grado più elevato, da cui si deve prendere la prima delle radici immaginarie, le cui podestà danno tutte le altre. Supponiamo l' equazione $f^{27} - 1 = 0$. Questa formola equivale a quest' altra $(f^3 - 1)(f^6 + f^3 + 1)(f^{18} + f^9 + 1) = 0$, ove si vede che il più alto fattore contenente le radici immaginarie è l' ultimo $(f^{18} + f^9 + 1)$ che supposto eguale a zero, e risoluta l'equazione dà $f^9 = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$, e in conseguenza $f = \sqrt[9]{\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}}$. Se la formola fosse $f^9 - 1 = 0$, poichè è lo stesso che dire $(f^3 - 1)(f^6 + f^3 + 1) = 0$, essendo il fattore più alto $(f^6 + f^3 + 1)$, eguagliato questo a zero ed estratta la radice, si ha $f^3 = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$ onde $f = \sqrt[3]{\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}}$; dal che si deducono tutte le 9 radici dell' equazione $f^9 - 1 = 0$ in questa maniera. Fatto per comodo di calcolo $\frac{-1+\sqrt{-3}}{2} = a$ abbiamo

$$1.^\circ\ f = \sqrt[3]{a},\ 2.^\circ\ f^2 = \sqrt[3]{a^2},\ 3.^\circ\ f^3 = \sqrt[3]{a^3} = a$$

$$4.^\circ\ f^4 = a\sqrt[3]{a},\ 5.^\circ\ f^5 = a\sqrt[3]{a^2},\ 6.^\circ\ f^6 = a\sqrt[3]{a^3} = a^2$$

$$7.^\circ\ f^7 = a^2\sqrt[3]{a},\ 8.^\circ\ f^8 = a^2\sqrt[3]{a^2},\ 9.^\circ\ f^9 = a^2\sqrt[3]{a^3} = a^3 = 1.$$

In questa serie di radici una è sempre diversa dall' altra, e solo l' ultima è eguale all' unità positiva. Se invece di prendere la prima radice f immaginaria nel maggior fattore $(f^6 + f^3 + 1) = 0$, la prendessimo nell' altro di grado meno elevato $(f^3 - 1) = 0$, cioè nel quoziente $f^2 + f + 1 = 0$, dopo la divisione di $f^3 - 1$ per il fattor reale $f - 1$, avrebbesi per prima radice $f = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$ che darebbe $f^2 = \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$, $f^3 = 1$, $f^4 = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$, $f^5 = \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$, $f^6 = 1$, $f^7 = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$, $f^8 = \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$, $f^9 = 1$; e con ciò verrebbe triplicata ciascuna delle prime tre radici, ma non mai espresse tutte le 9 diverse che abbraccia l' equazione $f^9 - 1 = 0$. Di qui apparisce, la necessità di prendere la prima radice immaginaria non in questo fattore ma nell' altro innalzato a maggior grado, il che si vede dover essere in tutti gli altri esempj che alcun si volesse proporre.

Considerando io le equazioni di qualunque grado mancanti del secondo termine, se queste avranno tanti coefficienti indipendenti tra loro quanto è il numero del grado dell' equazione meno uno, chiamo questa equazione generica rispetto a quel grado. Per esempio $x^3 + ax + b = 0$ è un' equazione generica di terzo grado ove siano tra loro indipendenti a, b; ma se b è una qualche funzione del coeffi-

cien-

ciente a onde da questo dipenda, chiamo tale equazione come particolare di terzo grado. Da ciò nasce che le equazioni particolari di qualunque grado possono avere delle proprietà non comuni alle equazioni generiche del medesimo grado, come quella di avere un divisore razionale di grado inferiore, che le generiche non potranno mai avere, e così dicasi di altre proprietà. E se tal divisore di grado inferiore non viene accettato nemmen dall' equazione particolare, non vedo ragione di negare che si possa trovare nella risolvente di quest' equazione particolare, o se nè anche in questa, nella risolvente della risolvente, o nella terza, o nella quarta ec., riuscendo tutte queste risolventi successive, sempre con maggior ragione, equazioni particolari, perchè coll' accrescimento del numero de' termini, non si hanno per loro coefficienti che funzioni dei primi pochi simboli indipendenti prefissi ai termini della prima proposta equazione.

Premesse tutte queste cose che abbiamo fin quì esposte, io vengo a formare certe equazioni che chiamo canoniche, le quali confrontate colle proposte mi conducono ad un' altra equazione, che chiamo risolvente, col mezzo della quale cerco di determinare le radici della medesima equazione. Per la formazione di tali canoniche stabilisco la radice della proposta eguale a tanti simboli diversi meno uno, quanto è il grado dell' equazione, e moltiplico per le radici dell' unità del medesimo grado questi stessi simboli, onde formarne tante quante sono nell' equazione contenute e nella maniera che qui sotto esporremo, affinchè dalla loro moltiplicazione risulti la canonica che dee servire di confronto.

Comincio dalla equazione di secondo grado $x^2 - a = 0$: Assumo pertanto l' equazione dell' unità quadrata $f^2 - 1 = 0$, nella quale le radici sono tutte due reali, $f = -1$, $f = 1$, esclusa pertanto la radice $f = 1$ mi servo dell' altra $f = -1$ che darà $f^2 = 1$. Suppongo che la radice dell' equazione chiamata $-m$, dia il fattore $x + m = 0$, ovvero $x + f^2 m = 0$, onde l' altro fattore sia $x + fm = 0$. Il prodotto di questi due

due fattori somministra l'equazione $x^2 + (fm + f^2m)x + f^3m^2 = 0$. Ma $f + f^2$, cioè $-1 + 1 = 0$; $f^3 = f^2 \cdot f = -1$, onde sarà essa $x^2 - m^2 = 0$, e il confronto colla proposta dà $m^2 = a$, cioè $m = \sqrt{a}$, $m = -\sqrt{a}$. Tale equazione $m^2 = a$ sarebbe secondo il mio metodo la risolvente della proposta $x^2 - a = 0$, anzi la proposta in tal caso diventa di se stessa la risolvente.

Per le equazioni di terzo grado faccio nascere la canonica in questa maniera. Competendo a questa l' equazione $f^3 - 1 = 0$ cioè $(f - 1)(f + f^2 + 1) = 0$, e presa una delle radici immaginarie, che si trovano nella formola $f^2 + f + 1$ per prima delle nostre radici, i tre fattori della canonica cubica devon essere secondo il mio metodo.

$x + f\,m + f^2n = 0$
$x + f^2m + f^4n = 0$
$x + f^3m + f^6n = 0$

ovvero esprimendoli più comodamente per il calcolo

$x + fm + f^2n = 0$
$x + f^2m + fn = 0$
$x + m + n = 0$

perchè a motivo dell' equazione $f^3 - 1 = 0$, ossia $f^3 = 1$ diventa $f^4 = f$, $f^3 = f^6 = 1$. Moltiplicati tra loro i due primi di questi ultimi fattori, risulta $x^2 + (fm + f^2m + fn + f^2n)x + f^3m^2 + f^3mn + f^4mn + f^2n^2$, cioè $x^2 - (m + n)x + m^2 - mn + n^2 = 0$, perchè $f^2 + f = -1 = f^2 + f^4$; $f^3 = 1$; finalmente moltiplicato questo trinomio razionale per l' ultimo fattore $x + m + n = 0$ abbiamo la canonica di terzo grado $x^3 - 3mnx + m^3 + n^3 = 0$. Ora essendo la cubica generica $x^3 - 3ax + b = 0$, i confronti de' termini ci somministrano prima di tutto l'equazione $mn = a$ che diventa per me la risolvente della proposta. In fatti essendo $m^3 + n^3 = b$, $m^6 + 2m^3n^3 + n^6 = b^2$, poichè dalla risolvente $mn = a$ nasce $4m^3n^3 = 4a^3$, colla sottrazione di questa dalla precedente risulta $m^6 - 2m^3n^3 + n^6 = b^2 - 4a^3$ cioè $m^3 - n^3 = \sqrt{b^2 - 4a^3}$, che combinata coll' altra $m^3 + n^3 = b$ dà in ultimo $m = \sqrt[3]{\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} - a^3}}$, $n = \sqrt[3]{\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{b^2}{4} - a^3}}$.

Per

Per formare la canonica delle equazioni biquadratiche, avrà luogo quella della podestà quarta dell' unità cioè $f^4-1=0$ ovvero $(f^2-1)(f^2+1)=0$, e la prima radice f immaginaria andrà presa nella equazione $f^2+1=0$, ossia $f^2=-1$. Ecco pertanto i nostri quattro fattori componenti l' equazion canonica di quarto grado.

1.ª $x+fm+f^2r+fn=0$, 3.ª $x+f^3m+f^6r+f^9n=0$
2.ª $x+f^2m+f^4r+f^6n=0$, 4.ª $x+f^4m+f^8r+f^{12}n=0$

ossia posti in essi i valori risultanti dalla equazione $f^2=-1$.

1.ª $x+fm-r-fn=0$
2.ª $x-m+r-n=0$
3.ª $x-fm-r+fn=0$
4.ª $x+m+r+n=0$.

Formeremo poi i due trinomj razionali col moltiplicare il primo fattore col terzo, indi il secondo col quarto. Colla prima moltiplicazione si ha il trinomio $x^2-2rx+(m-n)^2+r^2=0$, e colla moltiplicazione del secondo e del quarto fattore si ha l' altro trinomio $x^2+2rx-(m+n)^2+r^2=0$. Resta ora da moltiplicare tra loro questi due trinomj razionali dal che risulta l' equazione canonica . . . .

$x^4+(-4m\cdot n-2r^2)x^2+4r(m^2+n^2)x-(m^2-n^2)^2-4mnr^2+r^4=0$
o anche $x^4+(-4mn-4r^2)x^2+4r(m^2+n^2)x-(m^2-n^2)^2+(2mn-r^2)^2=0$.

Sia ora l' equazione generica di quarto grado, $x^4-2ax^2+4bx+c=0$. Per avere di questa la risolvente confrontandola colla canonica, ho $2mn+r^2=a$, e $2mn-r^2=a-2r^2$. Indi col confronto degli ultimi termini risulta $(m^2+n^2)^2=a^2-4ar^2+4r^4-c$, e perciò $(m^2+n^2)^2=a^2r^2-4ar^4+4r^6-cr^2=b^2$, e disponendo i termini opportunamente, nasce la risolvente $4r^6-4ar^4+(a^2-c^2)r^2-b^2=0$. Si rifletta che questa risolvente è effettivamente di sesto grado e noi possiamo trattarla come le equazioni di terzo, perchè mancano i termini delle podestà dispari di r, il cui valore sarà espresso da una radice seconda che comprende sotto di se una radice terza, e ne rende infatti il valore rappresentato da una radice di sesto indice. Poichè questa 1.ª risolvente non è divisibibile per alcun divisor razionale, riuscendo essa di natura generica, perchè tanti sono i simboli indipendenti tra loro, m, n, r, quanti sono i termini dell' equazione meno uno, è necessario trasformar questa in un'altra, che presenti a un tratto la sua risolvente che sarà la risolvente della risolvente. Per ottenere ciò trasformeremo la formola in un'altra cui manchi il 2.° termine, ed avrà essa l'aspetto $z^3-3MN+M^3N^3=0$, mentre la trasformata potrà essere espressa così $z^3-3Az+B=0$, riuscendo cogniti A, e B, che sono funzioni dei noti coefficienti a,b. La seconda trasformata per tanto dà col confronto $MN=A$, che diventa quella che chiamo la 2.ª risolvente, perchè nel modo medesimo da noi adoperato per le equazioni cubiche, si trovano i valori di M ed N dati per A, e B, ed in conseguenza anche il valore di z, e quindi ritornando ai primi, i valori di m,n,r, e perciò anche il valore di x. Siccome poi abbiamo formato la nostra canonica di quarto grado coi quattro suddetti fattori, rendendocisi noti i simboli m,n,r, ed essendo altresì cogniti i valori di f, f^2, f^3, f^4 ec., ci restan note eziandio tutte le quattro radici componenti la nostra generale di quarto grado.

Vengo ora alle equazioni generali di quinto grado, che hanno sino ad ora deluse le speranze degli Analisti per la loro generale risoluzione, la quale, e a più forte ragione dicendo lo stesso per le equazioni di grado superiori al quinto, vien giudicata impossibile dall' egregio nostro Socio Ruffini. Quì pure, inerendo sempre al nostro metodo formeremo la canonica di quinto grado coll' ajuto dell' equazione $f^5-1=0$ ossia $(f-1)(f^4+f^3+f^2+f+1)=0$. La prima radice immaginaria f di cui ci serviamo per la formazione de' binomj componenti la canonica di quinto grado, secondo la teoria più sopra esposta va presa nell' equazione $f^4+f^3+f^2+f+1=0$, che contiene le quattro radici immaginarie dell' unità elevata al quinto grado. Siano pertanto le seguenti serie dei cinque fattori componenti la nostra canonica di quinto grado.

1.°

$$
\begin{aligned}
&1.^\circ\ x + fm + f^2p + f^3q + f^4n = 0\\
&2.^\circ\ x + f^2m + f^4p + f^6q + f^8n = 0\\
&3.^\circ\ x + f^3m + f^6p + f^9q + f^{12}n = 0\\
&4.^\circ\ x + f^4m + f^8p + f^{12}q + f^{16}n = 0\\
&5.^\circ\ x + f^5m + f^{10}p + f^{15}q + f^{20}n = 0
\end{aligned}
$$

ossia in maniera più semplice sul riflesso che dall' equazione $f^5 - 1 = 0$ risulta $f^5 = 1$,

$$
\begin{aligned}
&1.^\circ\ x + fm + f^2p + f^3q + f^4n = 0\\
&2.^\circ\ x + f^2m + f^4p + f^2q + f^3n = 0\\
&3.^\circ\ x + f^3m + fp + f^4q + f^2n = 0\\
&4.^\circ\ x + f^4m + f^3p + f^2q + fn = 0\\
&5.^\circ\ x + m + p + q + n = 0.
\end{aligned}
$$

Dalla moltiplicazione dei quattro primi fattori tra di loro avuto riflesso all'equazione, $f^4 + f^3 + f^2 + f + 1 = 0$, ovvero $f + f^2 + f^3 + f^4 + f^5 = 0$ che contiene la somma di tutte cinque le radici della formola $f^5 - 1 = 0$, verrà prodotto un risultato razionale dal quale spariranno tutte le radici immaginarie suddette; e tal prodotto moltiplicato per l'ultimo binomio $x + m + p + q + n = 0$ farà riuscire la canonica di quinto grado che sarà la seguente

$$
\begin{array}{llllll}
x^5 - 5mnx^3 & + 5m^2qx^2 & - 5m^3px & + m^5 & + (5mn - 5pq)(mp^2 + nq^2 - mq^2 - np^2q) = 0\\
 - 5pq & + 5n^2p & - 5n^3q & + n^5 & \\
 & + 5mp^2 & - 5mq^3 & + p^5 & \\
 & + 5nq^2 & - 5np^3 & + q^5 & \\
 & & + 5m^2n^2 & & \\
 & & - 5mnpq & & \\
 & & + 5p^2q^2. & &
\end{array}
$$

Stabilisco ora l'equazione generale di quinto grado $x^5 - 5ax^3 + 5bx^2 + 5cx + d = 0$ colla quale la canonica va confrontata.

Per facilitare tal confronto mi servo delle seguenti sostituzioni; $mn = g$, $pq = u$; $m^2q + n^2p = r$, $mp^2 + nq^2 = t$. Dal paragone dei secondi termini nasce $g + u = a$; e da quello lo dei terzi $r+t=b$ ossia $t=b-r$. Moltiplico l' equazione $m^2q+n^2p=r$ per n^2p; e si ha $m^2n^2pq+n^4p^2=n^2pr$, cioè $g^2u+n^4p^2=n^2pr$ e risoluta questa equazione troviamo 1.° $n^2p=\frac{r}{2}+\sqrt{\frac{r^2}{4}-g^2u}$, e quindi 2.° $m^2q=\frac{r}{2}-\sqrt{\frac{r^2}{4}-g^2u}$. Moltiplico la seconda equazione per nq^2 e mi nasce $mnp^2q^2+n^2q^4=(b-r)nq^2$, o anche $gu^2+n^2q^4=(b-r)nq^2$. Quindi 3.° $nq^2=\frac{b-r}{2}-\sqrt{\frac{(b-r)^2}{4}-gu^2}$; e 4.° $mp^2=\frac{b-r}{2}+\sqrt{\frac{(b-r)^2}{4}-gu^2}$. Quadrata la seconda delle precedenti formole $m^4q^2=\left(\frac{r}{2}-\sqrt{\frac{r^2}{4}-g^2u}\right)^2$, e moltiplicata questa nella quarta;

$$m^5p^2q^2=\left(\frac{b-r}{2}+\sqrt{\frac{(b-r)^2}{4}-gu^2}\right)\left[\frac{r}{2}-\sqrt{\frac{r^2}{4}-g^2u}\right]^2,$$ cioè

$$m^5=\frac{\left(\frac{b-r}{2}+\sqrt{\frac{(b-r)^2}{4}-gu^2}\right)\left[\frac{r}{2}-\sqrt{\frac{r^2}{4}-g^2u}\right]^2}{u^2}.$$ Così quadrata la 1.^{a}, moltiplicata per questo quadrato la terza, e diviso il prodotto per u^2,

si ha $$n^5=\frac{\left(\frac{b-r}{2}-\sqrt{\frac{(b-r)^2}{4}-gu^2}\right)\left[\frac{r}{2}+\sqrt{\frac{r^2}{4}-g^2u}\right]^2}{u^2}.$$

Parimenti il quadrato della quarta formola, moltiplicato nella prima e diviso il prodotto per g^2 si ha

$$p^5=\frac{\left(\frac{r}{2}+\sqrt{\frac{r^2}{4}-g^2u}\right)\left[\frac{b-r}{2}+\sqrt{\frac{(b-r)^2}{4}-gu^2}\right]^2}{g^2}.$$

Finalmente moltiplicata la seconda nel quadrato della terza, e diviso il prodotto per g^2 si ottiene.

$q^5=$

$$q^5 = \frac{\left(\frac{r}{2} - \sqrt{\frac{r^2}{4} - g^2 u}\right)\left[\frac{b-r}{2} - \sqrt{\frac{(b-r)^2}{4} - gu^2}\right]^2}{g^2}.$$

Per facilitare il seguente calcolo faremo le sostituzioni, $\frac{r}{2} - \sqrt{\frac{r^2}{4} - g^2 u} = A$; $\frac{r}{2} + \sqrt{\frac{r^2}{4} - g^2 u} = B$; $\frac{b-r}{2} + \sqrt{\frac{(b-r)^2}{4} - gu^2} = C$; $\frac{b-r}{2} - \sqrt{\frac{(b-r)^2}{4} - gu^2} = D$; da tali sostituzioni risulta $AB = g^2 u$. $CD = gu^2$. Inoltre sostituendo i valori delle formole dati per le anzidette majuscole, rispetto alle podestà quinte di m, n, p, q, sarà $m = \sqrt[5]{\frac{CA^2}{u^2}}$; $n = \sqrt[5]{\frac{DB^2}{u^2}}$; $p = \sqrt[5]{\frac{BC^2}{g^2}}$; $q = \sqrt[5]{\frac{AD^2}{g^2}}$.

Il confronto dei quarti termini della canonica colla generale di quinto grado somministra $-m^3 p - n^3 q - mq^3 - np^3 + m^2 n^2 - mnpq + p^2 q^2 = c$ cioè coll' uso dei valori di m, n, p, q dati per le majuscole troveremo, $\frac{-AC-BD}{u} \frac{-AD-BC}{g} + g^2 - ug + u^2 = c$. Così adoperando le suddette majuscole nel paragone degli ultimi termini della canonica e dalla generale ci si presenta l' equazione $\frac{CA^2+DB^2}{u^2} + \frac{BC^2+AD^2}{g^2} + (5g-5u)(b-2r) = d$. Il primo confronto dei secondi termini dandoci $g+u=a$, e quindi $ug+u^2 = au$ ossia $u^2 - au = -ug$, sarà $u = \frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} - ug}$, e perciò $g = \frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} - ug}$. Essendo date le u, g per il simbolo ug, e le majuscole A, B, C, D essendo funzioni di r, u, g diventeranno eziandio funzioni delle sole due incognite, r, ug, dal che si deduce che le due equazioni, che nascono dai confronti dei due ultimi termini della canonica e della generale, sostituendo i valori di A, B, C, D dati per le funzioni di r, ug, faranno finalmente nascere due equazioni contenenti le due sole incognite r, ug, le quali liberate dalla irrazionalità, si convertiranno in altre due, le quali abbassate coi metodi conosciuti daranno da ultimo un' equazione in cui la massima podestà dell' incognita ug arriverà al sesto grado, e questa sarà la 1.ª risolvente della nostra equazione di quinto grado che ci abbiamo proposti.

Essendo date A, B, C, D, g, u per i simboli r, ug, e coll' abbassamento delle due ultime equazioni ritrovate coi confronti dei due ultimi termini della canonica cogli analoghi della proposta, e riducendosi finalmente a ritrovare il valore di r dato per ug, e poi in fine l' equazione contenente la sola incognita ug che è la nostra risolvente di sesto grado, egli è evidente che le anzidette majuscole, supposto ritrovato il valore di ug, e così quello di u, g, r e conseguentemente le m, n, p, q, saranno date per funzioni di ug, onde espresse queste funzioni coi simboli Fug, $F'ug$, etc. avremo $m = \sqrt[5]{Fug}$, $n = \sqrt[5]{F'ug}$, $p = \sqrt[5]{F''ug}$, $q = \sqrt[5]{F'''ug}$.

Arrivati che siamo a questa prima risolvente di sesto grado, siccome essa è un' equazion particolare perchè essendo 7 i termini di quest' equazione, e i coefficienti di essi non potendo essere che funzioni dei soli a, b, c, d della proposta di quinto grado, due di essi dipendono dai precedenti; dal che risulta che la prima indagine da farsi sopra di essa si è di vedere se ha alcun divisore razionale, di 1.° di 2.° o di 3.° grado. In tal caso è chiaro, che al più il valore di ug non viene espresso che con funzioni di radici cubiche di noto valore, e che il simbolo m, e così dicasi degli altri, ha per valore una $\sqrt[5]{}$ di funzione di $\sqrt[3]{}$. Il Socio Ruffini vorrebbe, giudicato dall' analogia delle equazioni di grado inferiore al quinto, che sotto alla $\sqrt[5]{}$ del valore di m, vi fos-

fossero le funzioni di $\sqrt[4]{}$, e quindi supponendo che tutte le forme di funzioni di $\sqrt[4]{}$ dovessero essere comprese in un' equazione di 4.° grado razionale, conclude che la data risolvente di 6.° grado debba avere tre radici eguali, la qual cosa non verificandosi nella generale risolvente, giudica impossibile la risoluzione generale dell' equazioni di 5.° grado.

Opporremo due riflessioni a questa sua decisione. La prima: che vi possono essere dell' equazioni in cui l' incognita sia eguale a funzioni di radici quarte, contenenti dentro di se radici inferiori, essendo esse equazioni di grado superiore al quarto, senza che si possano dividere in fattori razionali di quarto grado, come avverrebbe nell' equazione $E^{12}+8E^9-9E^8+24E^6+288E^5+27E^4+32E^3-360E^2+216E-11=0$ la quale non è divisibile nè in uno, nè in tre fattori razionali di quarto grado, quantunque una delle sue radici non sia altro che $E=\sqrt[4]{3}-\sqrt[4]{2\sqrt[3]{2}}$; egli è ben vero che la nostra risolvente di 6.° grado non può ammettere un divisor razionale di grado duodecimo al 6.° superiore; ma perchè non potrebbe egli trovarsi, un simil divisore razionale nella risolvente della nostra equazione di 6.° grado, che diventerebbe la seconda risolvente della nostra proposta di quinto, e non trovandosi in quseta, perchè, passando alla terza risolvente, non potrebbe aver luogo in essa un simil divisore, e lo stesso dicasi delle risolventi ulteriori, cosicchè ritrovato finalmente tal divisore razionale, e ascendendo di mano in mano sino alla prima risolvente di 6.° grado, si possa realmente ottenere il valore di z, che non sia altro che funzioni di radici contenenti sotto di se altre funzioni di radici inferiori? e ciò sempre supposto che fosse necessario sotto alle radici quinte dei valori di m, n, p, q aver funzioni di radici quarte.

In secondo luogo non so vedere dalla risoluzione delle equazioni inferiori al quinto un' analogia così imperiosa che

mi

mi costringa ad ammettere tale necessità, prima perchè troppo pochi sono i gradi inferiori dai Geometri risoluti, poi perchè anche nell' equazioni di quarto abbiamo veduto che effettivamente la loro generale risolvente è un' equazione di sesto grado, ciascuna delle cui sei diverse radici è idonea a dare il valor del primo fattore $x+m+r+n$ dell' equazione di quarto grado. Questo è il nostro secondo dubbio da noi promesso sulla dimostrazione del Socio Ruffini.

Io non so vedere difficoltà alcuna nel concepire che nel valore di $m\sqrt[5]{Fz}$ possano aver luogo funzioni di radici seste, perchè derivate da equazioni particolari e non da equazioni generali di sesto grado, le quali radici seste comprendano anche sotto di se funzioni di radici inferiori, perchè siccome sotto le radici quarte spettanti all' equazioni biquadratiche, trovandosi le funzioni di radici terze e di radici seconde, col liberare dalla irrazionalità il fattore $x+m+r+n=0$ non sale l' equazione più in là del quarto grado, elidendosi nella formazione dei coefficienti dei termini tutte quelle funzioni di radici terze, e di radici seconde vincolate sotto i primi indici di radici quarte, così parmi che anche nel caso delle nostre radici quinte, avvegnachè contenenti sotto di se indici di radice sesta, cioè di radice seconda, di radice terza, e più altre funzioni di radici quinte e di radici inferiori, non si possa temere dovere ascendere colla liberazione dalla irrazionalità il fattore $x+m+n+p+q=0$ a grado più alto del quinto per la distruzione che nella formazione dei coefficienti dei termini avviene di cotali funzioni di radici, stando però fermo che tali valori compresi sotto le radici quinte derivino, o immediatamente dalla prima risolvente, o anche dalle risolventi ulteriori.

Nè io nè alcun altro Geometra si assoggetterà per avventura a calcoli sì improbi e laboriosi, coi quali si cerchi di verificare questi miei sospetti. Con una equazione particolare però dei coefficienti ne' termini puramente numerici, che

che rendono sopportabile il calcolo, farò vedere che la sua risolvente di sesto grado contiene, oltre le altre, una radice che è una funzione di radice quinta, onde nasce che nel valore di $m =$ radice quinta funzione z, abbiamo sotto di essa altre espressioni di radici quinte; e se ciò accade in una equazione particolare, sembra che il buon raziocinio a più forte ragione, ciò esiga in una equazione generale, e siccome per la generale essendo di sesto grado la risolvente, deve aver luogo la radice sesta, si rende chiaro che sotto alla radice quinta avremo funzioni di radice sesta, che comprendono sotto di se funzioni di radici quinte, riuscendo nel nostro caso particolare podestà seste perfette quelle funzioni che si trovano sotto l'indice di radice sesta, onde non apariscono altro che funzioni di radici quinte.

Sia proposta da risolvere l'equazione $x^5 + 5.2x^3 + 5^2.2^2 = 0$ che confrontata coll'equazione generale di quinto grado $x^5 - 5ax^3 + 5bx^2 + 5cx + d = 0$ somministra $a = -2$, $b = 0$, $c = 0$, $d = 5^2.2^2$: presa ora in mano la canonica di quinto grado notata superiormente, di cui abbiamo supposto un fattore lineare $x + m + p + q + n = 0$, convien ricorrere ai valori generali da noi sopra esposti di m, n, p, q, e modificare questi al caso della nostra equazion particolare, dal che risulta

$$m = \sqrt[5]{\frac{\left(-\frac{r}{2}+\sqrt{\frac{r^2}{4}-gu^2}\right)\left(\frac{r}{2}-\sqrt{\frac{r^2}{4}-g^2u}\right)^2}{u^2}}$$

$$n = \sqrt[5]{\frac{\left(-\frac{r}{2}-\sqrt{\frac{r^2}{4}-gu^2}\right)\left(\frac{r}{2}+\sqrt{\frac{r^2}{4}-g^2u}\right)^2}{u^2}}$$

$$p = \sqrt[5]{\frac{\left(\frac{r}{2}+\sqrt{\frac{r^2}{4}-g^2u}\right)\left(-\frac{r}{2}+\sqrt{\frac{r^2}{4}-gu^2}\right)^2}{g^2}}$$

$q =$

$$q = \sqrt[5]{\frac{\left(\frac{r}{2}-\sqrt{\frac{r^2}{4}-g^2u}\right)\left(-\frac{r}{2}-\sqrt{\frac{r^2}{4}-gu^2}\right)^2}{g^2}}$$

quindi sarà $A = \frac{r}{2} - \sqrt{\frac{r^2}{4} - g^2u}$; $B = \frac{r}{2} + \sqrt{\frac{r^2}{4} - g^2u}$; $C = -\frac{r}{2} + \sqrt{\frac{r^2}{4} - gu^2}$; $D = -\frac{r}{2} - \sqrt{\frac{r^2}{4} - gu^2}$. Cominciando dal confronto dei secondi termini della canonica e della generale, abbiamo trovato valere quest' egualità, $mn + pq = a = u + g$; onde nel caso della nostra modificata che ci proponiamo di risolvere, poichè diventa, $a = -2$ sarà $u + g = -2$, e moltiplicando tutto per g; $g^2 + ug = -2g$, ossia, $g^2 + 2g = -ug$, onde si trae $g = -1 + \sqrt{1 - ug}$, perciò $u = -1 - \sqrt{1 - ug}$, dal che risulta $g^2 = 2 - ug - 2\sqrt{1 - ug}$, $u^2 = 2 - ug + 2\sqrt{1 - ug}$. Il terzo termine della canonica dovendosi confrontare col terzo della proposta e mancando in questo tal termine sarà $b = 0$; laonde avremo $t = -r$ ed $mp^2 = C = -\frac{r}{2} + \sqrt{\frac{r^2}{4} - gu^2}$; $nq^2 = D = -\frac{r}{2} - \sqrt{\frac{r^2}{4} - gu^2}$, rimanendo già $A = \frac{r}{2} - \sqrt{\frac{r^2}{4} - g^2u}$; $B = \frac{r}{2} + \sqrt{\frac{r^2}{4} - g^2u}$. Il paragone dei penultimi termini della canonica e della generale, poichè si fa $c = 0$, ci offre l' equazione $\frac{-AC - BD}{u} \frac{-AD - BC}{g} + g^2 - ug + u^2 = 0$, finalmente quella degli ultimi termini ci dà $\frac{CA^2 + DB^2}{u^2} + \frac{BC^2 + AD^2}{g^2} - 2r(5g - 5u) = 5^2 \cdot 2^2$. Rimessi pertanto i valori delle majuscole

A,

le A, B, C, D nelle equazioni risultanti dal confronto dei penultimi termini, si ottiene

$$\frac{\frac{r^2}{2}+2\sqrt{\frac{r^2}{4}-g^2u}\cdot\sqrt{\frac{r^2}{4}-gu^2}}{u}+\frac{\frac{r^2}{2}-2\sqrt{\frac{r^2}{4}-g^2u}\cdot\sqrt{\frac{r^2}{4}-gu^2}}{g}+4-3ug=0,$$

ovvero colle riduzioni;

$$\frac{-r^2+4\sqrt{1-ug}\cdot\sqrt{\frac{r^2}{4}-g^2u}\cdot\sqrt{\frac{r^2}{4}-gu^2}}{ug}+4-3ug=0,$$

e riducendo eziandio l'equazione degli ultimi termini colla sostituzione dei valori delle majuscole ci nasce

$$\frac{-\frac{r^3}{2}+rg^2u-2r\sqrt{\frac{r^2}{4}-g^2u}\cdot\sqrt{\frac{r^2}{4}-gu^2}}{u^2}+\frac{\frac{r^3}{2}-rgu^2-2r\sqrt{\frac{r^2}{4}-g^2u}\cdot\sqrt{\frac{r^2}{4}-g^2u}}{g^2}-2r(5g-5u)=5^2.2^2$$

cioè

$$\frac{-\frac{r^3}{2}.(g^2-u^2)+rgu.(g^3-u^3)-2r.(g^2+u^2).\sqrt{\frac{r^2}{4}-g^2u}.\sqrt{\frac{r^2}{4}-gu^2}}{u^2g^2}-20r.\sqrt{1-ug}=5^2.2^2,$$

e liberando la equazione precedente dagli irrazionali risulta

$$r^4+14ugr^2-16r^2+25u^3g^3-40u^2g^2+16ug=0.$$

Parimente colla sostituzione dei valori delle majuscole in quella che danno gli ultimi termini, colla riduzione allo stesso denominatore, e indi colla moltiplicazione per il medesimo abbiamo

$$-\frac{r^3}{2}.(g^2-u^2)+rgu.(g^3-u^3)-2r(g^2+u^2).\sqrt{\frac{r^2}{4}-g^2u}\sqrt[5]{\frac{r^2}{4}-gu^2}$$

$-20ru^2g^2\cdot\sqrt{1-ug}=5^2\cdot 2^2\cdot g^2\cdot u^2$. Ora siccome $g^2-u^2=(g-u)(g+u)=-4\sqrt{1-ug}$; $g^3-u^3=(g-u)\cdot(g^2+ug+u^2)=8-2ug\sqrt{1-ug}$; $g^2+u^2=4-2ug$; se farem uso di tai valori, ed introdurremo in quest' ultima equazione il valore di

$$\sqrt{\frac{r^2}{4}-g^2u}\cdot\sqrt{\frac{r^2}{4}-gu^2}=\frac{r^2-4ug+3u^2g^2}{4\sqrt{1-ug}}$$ che si trae

dall' equazione dei penultimi termini, ed eseguite le opportune riduzioni, ci si presenta da ultimo la seguente equazione

$$r^3+(-25u^2g^2+40ug-16)r+5^2\cdot 2^2\cdot ug\sqrt{1-ug}=0.$$

Per rendere più agevole il calcolo, col convertire in formole più semplici le equazioni superiori trovate col confronto dei due ultimi termini ed espresse colle sole incognite r, ug, faremo la seguente sostituzione, $5^2ug=z+5\cdot 2^2$. Coll' uso di questo valore di ug, e delle sue podestà troveremo finalmente trasformate le suddette nelle seguenti

$$5^4\cdot r^4+(7\cdot 5^2\cdot 2\cdot z-5^3\cdot 3\cdot 2^3)r^2+z^3+5\cdot 2^2\cdot z^2=0;$$

$$5^2\cdot r^3-z^2\cdot r+(5\cdot 2^2\cdot z+5^2\cdot 2^4)\cdot\sqrt{5-z}=0$$

La prima di queste potendosi maneggiare alla maniera delle quadratiche, colla sua risoluzione avremo

$$5r=\pm\sqrt{-7z+5\cdot 3\cdot 2^2+\sqrt{-z^3+29z^2-105\cdot 2^3z+225\cdot 2^4}};$$

tal valore introdotto poi nell' ultima equazione di r^3 ec., ci darà finalmente una nuova equazione in z mista di razionali e di irrazionali, dai quali essa liberata, e presentato il risultato nella maniera più semplice, ritroveremo nascere la risolvente ricercata, come segue

B. $(-z^3+5^5\cdot 2^4)^2+(z-5)841\cdot 5^4\,2^8=0$.

ossia A. $z^6-5^5\cdot 2^5\cdot z^3+841\cdot 5^4\cdot 2^8\cdot z+571\cdot 5^5\cdot 2^{10}=0$.

Se farem' uso di un simil calcolo anche per l' equazione generale $x^5-5ax^3+5bx^2+5cx+d=0$ avremo una risolvente in z di questa forma $(-z^3+Mz+N)^2+Pz+Q=0$, come io stes-

stesso ho sperimentato, ovvero $z^6 - 2Mz^4 - 2Nz^3 + M^2z^2 + (2M.N + P)z + N^2 + Q = o$, nella quale manca il secondo termine, i simboli tra loro indipendenti non sono che quattro, il che la esclude dal numero delle generiche di sesto grado, nelle quali, colla mancanza del secondo termine, i simboli indipendenti debbono essere cinque, e la mette nella classe delle equazioni particolari di sesto grado; dal che viene avvertito il Geometra di cercar prima di tutto se tale equazione accetti qualche divisor razionale, di grado inferiore. Al caso che ciò non succeda, parmi che non si debba concludere essere irresolubile la proposta di quinto grado, ma che si deggia passare alla risolvente di tale equazione di sesto, che, fatto il calcolo, si troverà ascendere al grado ventesimo, ma avente un quadrato d'incognita per radice, il che la rende di decimo grado. Questa non può avere per coefficienti dei suoi termini altro che funzioni dei quattro simboli indipendenti tra loro, M, N, P, Q, laddove dovrebbero essere nove per classificarla generale, quindi il divisor potrebbe in questa trovarsi; rimarrebbe con ciò risoluta l' equazione della prima risolvente, e conseguentemente l' equazione proposta di quinto grado. Non potendosi nemmeno in quest' ultima, rinvenire tal divisore, e perchè sarò io costretto a giudicare impossibile la ricercata risoluzione, senza l' esame previo delle ulteriori risolventi, che divengono poi la terza, la quarta ec. risolvente della proposta equazione.? La nostra particolare ci farà forse conoscere la necessità di tali esami.

Tra le radici della nostra risolvente (A) di sesto grado, ha luogo la seguente

$$z = 2^2 - 2^3.\sqrt[5]{2} - 2^2.\sqrt[5]{2^2} - 11.2\sqrt[5]{2^3} + 7.2\sqrt[5]{2^4}$$

come ognuno potrà conoscere introducendo tal valore, nella suddetta risolvente (A) di sesto grado che fa nascere $o = o$. Ecco pertanto un divisor irrazionale coll'indice di radice quinta

$$z - 2^2 + 2^3\sqrt[5]{2} + 2^2\sqrt[5]{2^2} + 11 . 2\sqrt[5]{2^3} - 7 . 2\sqrt[5]{2^4} = 0$$

del qual possiamo servirci per ritrovare i valori di m, n, p, q e conseguentemente quello di una delle radici della proposta equazione di quinto grado $x^5 - 5 . 2x^3 + 5^2 . 2^2 = 0$; imperciocchè limitandoci al solo valore di m, sopra espresso colle funzioni di r, g, u cioè

$$m = \sqrt[5]{\frac{\left(-\frac{r}{2}+\sqrt{\frac{r^2}{4}-gu^2}\right)\left(-\frac{r}{2}-\sqrt[5]{\frac{r^2}{4}-g^2u}\right)^2}{u^2}},$$

e sostituiti in tale espressione i valori di r, g, u dati per q, diventerà $m = \sqrt[5]{Fz}$; e siccome un valore di z è stato sopra trovato con quattro indici di radice quinta oltre il termine razionale, tal funzione z sarà funzione delle suddette radici quinte, onde m sarà eguale a $\sqrt[5]{}$ di funzioni di altre radici quinte, le quali nel nostro caso non ricevono sotto di se nè indici di radici quarte nè di terze nè di seconde. Lo stesso si dee concludere per gli altri valori di n, p, q, e ciò non ostante se libereremo dagli irrazionali l'equazione $x + m + n + p + q = 0$, verranno talmente cambiate tra loro combinate e attemperate le funzioni di radici quinte, comprese sotto l'indice primo di radice quinta, che da ultimo non risulterà che l'equazione proposta, $x^5 + 5 . 2x^3 + 5^2 . 2^2 = 0$, nè vi sarà alcun pericolo, che tali funzioni di radici quinte comprese sotto il primo vincolo di radice quinta facciano ascendere l'equazione in x a grado più alto del quinto. Oltrecciò servendoci del sovraesposto valore di z o valendoci di ciascuno degli altri cinque, che abbraccia la risolvente in z di sesto grado, sempre ci ridurremo allo stesso fattore $x + m + n + p + q = 0$ della proposta nostra equazione.

Avendo fatta la osservazione, che l'equazione (A) in z di sesto grado riceve il divisor lineare $z + 5 . 2^2 = 0$, dopo

la

la divisione del quale, rimanendo per quoziente una equazione di quinto grado, per il rintracciamento dell' altra nostra radice

$$z = 2^2 - 2^3 \sqrt[5]{2} - 2^2 \sqrt[5]{2^2} - 11 \cdot 2 \sqrt[5]{2^3} + 7 \cdot 2 \sqrt[5]{2^4},$$

non ho avuto bisogno che di passare alla risolvente di tale equazione di quinto grado, che arrivando al sesto mi dà un valore lineare rispetto alla nuova incognita, secondo cioè resta ordinata tale risolvente di sesto grado, dal quale risalendo, vengo in fine condotto a conoscere il suddetto valore di z; e cotal nuova risolvente riguardo a quella radice diverrebbe la seconda risolvente, avendo relazione alla equazione in x di quinto grado. Ma nella supposizione che io non avessi fatta tal riflessione, o che realmente la risolvente (A) non avesse accettato alcun divisore, secondo il mio divisamento mi sarebbe stato mestieri coll' uso dei sei fattori contenenti nel secondo termine di ciascun d' essi cinque simboli indipendenti tra loro, col prefiggere, giusta la prescritta regola, ad essi le radici immaginarie dell' unità elevata al sesto grado, determinare la nuova risolvente della prima (A), la quale avrei veduto ascendere al grado ventesimo avente però un quadrato d' incognita per radice. Nel caso della nostra equazione particolare, col diligente esame mi sarei accorto potere essa dividersi in due fattori di grado decimo, che per ragione di essere le radici un quadrato d' incognite, risultan maneggiabili come quelli di quinto. Preso pertanto un d'essi ed eguagliato a zero, mi sarebbe stato d' uopo il passare alla nuova sua risolvente, la quale finalmente avrebbemi presentato un divisore razionale di grado inferiore al quinto e di radice estraibile, senza irrazionalità, colla quale tornando indietro, mi si sarebbe reso cognito il valore del quadrato che serviva di radice alla risolvente antecedente, il qual valore avrei trovato essere un quadrato perfetto, onde estratta pur questa radice, e resi cogniti anche gli altri quattro simboli dei sei fattori componenti la prima risolvente in z, sarebbe be da ultimo risultata l'equazione sopra mentovata

$$z=2^2-2^3\sqrt[5]{2}-2^2\sqrt[5]{2^2}-11.2\sqrt[5]{2^3}+7.2\sqrt[5]{2^4}.$$

L'anzidetta riflessione mi ha agevolato il ritrovamento di quel valore di z, perchè non ho avuto bisogno che di ricorrere ad una seconda risolvente, laddove sarei stato costretto a passare ad una terza, senza tal riflessione; egli è però certo che per una generale equazione in x di quinto grado, mancando tal divisore nella prima risolvente, sono obbligato a cercarne qualcuno nelle risolventi ulteriori, le quali son tutte equazioni particolari e non generali, nè da quest' obbligo mi trovo disimpegnato, se non nel caso, che siami solidamente dimostrata la impossibilità di trovare tal divisore.

Coll' uso del divisore lineare $z+5.2^2=0$ accettato dalla risolvente (A) riesce agevolissimo il determinare i simboli m, n, p, q componenti il primo fattore $x+m+n+p+q=0$ della proposta equazione di quinto grado, perchè tal valore di z ci fa nascere $ug=0$, e nel valore di r, sostituito quello di $z=-5.2^2$ e quello delle sue podestà che in esso si ritrovano, ci si rende noto lo stesso r, e quindi noti gli altri simboli m, n, p, q, che daranno finalmente $x=-\sqrt[5]{2^2}+\sqrt[5]{2^3}-\sqrt[5]{2^4}$: a questa stessa radice ci condurrà qualunque altro dei valori di z che son compresi nella nostra risolvente di sesto grado.

Concludiamo pertanto che per dimostrare la impossibilità della risoluzione nella equazione generale di quinto grado, non mi sembra sufficiente l'argomento di cui si serve il ch. Ruffini, della necessità delle tre radici eguali che debbano essere comprese nella prima risolvente in z di sesto grado; e parmi che sarebbe stata più irresistibile la sua dimostrazione, se si fosse raggirata sulla impossibilità di ritrovare non solo nella prima risolvente in z, ma nemmeno nelle risolventi ulteriori un divisore di grado al quinto inferiore. Il perchè finchè

non

non mi sarà dimostrato la impossibilità di arrivare con tal progresso di risolventi ad un valore espresso nella maniera indicata, e finchè non mi sarà dimostrata la incongruenza del mio raziocinio, di cui ho fatto uso nel corso di questa Memoria, resterò sempre col dubbio, che sia del tutto inconcussa la dimostrazione di tale impossibilità che intende di aver dato l'egregio nostro Socio Ruffini.

Per altro la sua molta dottrina, e la occupazione assidua, che egli ha più volte manifestata nell'esame della natura delle equazioni, mi fa sperare che toglierà qualunque forza a questi miei dubbj, ad un per un dileguandoli, stabilendo anche per la dubbiosa mia mente una base solida alle sue sublimi Teorie, e trionfando di tutte le difficoltà con cui alcun'altro per avventura potesse venirgli incontro. Dal che per me pure verrebbe con mio sommo piacere assicurata la gloria all'Italia, di avere di per se sola, colla forza dei genj nutriti nel suo seno espleta interamente la dottrina delle nostre equazioni.