METODO PER TROVAR LE RADICI NUMERICHE D' OGNI EQUAZIONE

DI GIUSEPPE CASSELLA

Presentato il dì 3 *Dicembre* 1803.

DA VINCENZO CHIMINELLO.

Per rispondere come conviene al quesito proposto dalla Società Italiana delle Scienze (*a*) è bene di tener presente il quesito medesimo, onde spaziandosi non si abbia da sortir fuori de' limiti, e delle condizioni, ch' esige il Problema.

Propone pertanto la Società il premio

„ A chi meglio, ed interamente esporrà il metodo più „ breve, cioè men faticoso per trovare le radici numeriche „ di un' Equazione di qualunque grado.

La condizione aggiunta di non ammettersi al concorso del premio che sole Memorie inedite; mi ha obbligato di pensare a' seguenti espedienti, che in un generale metodo ho l' onore di proporre alla Società. Procuro di giugnere alla soluzion del Problema in due diverse maniere, che poggiano sullo stesso principio.

Prima maniera.

1. È noto per una generale proprietà dell' Equazioni, che mettendo in una qualsivoglia Equazione in vece dell' ignota il valore di essa, tutt' i termini si distruggono l'un l'altro, e l' Equa-

(*a*) Questa Memoria non è giunta in tempo ond' essere ammessa al concorso aperto col programma 19 Luglio 1802. *Il Segretario* l' Equazione stessa diviene zero. Io etsendo questa proprietà, deduco dagli stessi principj quest' altra legittima, e generale conseguenza: che *sostituendo in una Equazione qualunque in vece dell' ignota* (di qualunque grado) *il di lei valore* (monomio, o polinomio, noto, o in parte noto); *avanzando residuo, ove l' ignota abbia l' istesso grado che quella sostituita; questo residuo deve essere eguale esattamente all' Equazione sostituita*. Gli esempj seguenti metteranno più in chiaro la verità della nostra proposizione, dedotta dalla natura stessa delle Equazioni.

2. Nell' Equazione $\begin{array}{l} x^2 - ax + ab = 0 \\ \quad\; - bx \end{array}$ sostituendo in qualunque modo per x il valore a, così che vaglia l' Equazione $x - a = 0$, il residuo sarà sempre $x - a = 0$, e quindi $x = a$. In fatti sostituendo in questo modo si avrà I.° $\begin{array}{l} a^2 - ax + ab = 0, \\ \quad\;\; - bx \end{array}$ ed

$$a^2 + ab = (a+b)x \text{ cioè } x = \frac{a^2 + ab}{a+b} \text{ cioè } x = a, \text{ ed } x - a = 0.$$

II.° Nella stessa ipotesi di $x - a = 0$ facendo un'altra diversa sostituzione sarà $\begin{array}{l} x.x - ax + ab = 0, \\ \quad\;\; - bx \end{array}$ cioè $\begin{array}{l} ax - ax + ab = 0 \\ \quad\;\; - bx \end{array}$ ossia $ab - bx = 0$, ed $a - x$, ossia $x - a = 0$, come prima. III.° sostituendo in altra diversa maniera si avrà $\begin{array}{l} x^2 - a^2 + ab = 0, \\ \quad\;\; - ba \end{array}$ cioè $x^2 = a^2$, e $x = a$ come negli altri due casi, così del resto.

3. Vale lo stesso nell' Equazioni di più alto grado. Sia l' Equazione $\begin{array}{l} x^3 - ax^2 + abx + abc = 0. \\ \quad\;\; - bx^2 + acx \\ \quad\;\; - cx^2 + bcx \end{array}$ I.° Si supponga $x = a$, onde sia $x - a = 0$, e si sostituisca nella proposta, onde si abbia un residuo dello stesso grado $x - a = 0$: si avrà $\begin{array}{l} a^3 - a^3 + a^2 b + abc = 0, \\ - ba^2 + a^2 c \\ - ca^2 + bcx \end{array}$ cioè $bcx - abc = 0$, ossia $x - a = 0$;

ch'è

ch' è l' Equazione sostituita. II.° Si avrà anche, sostituendo diversamente, $a^3 - a^3 + a^2b - abc = o$, la quale diviene

$$\begin{array}{l} - ba^2 + a^2c \\ - cx^2 + bac \end{array}$$

$- cx^2 + a^2c = o$, ossia $x^2 = a^2$ ed $x = a$, o $x - a = o$, ch'è la stessa Equazione. In questo esempio si è ottenuto il residuo dell' istesso grado dopo una estrazione di radice. Non occorre di applicare diversamente il metodo nell' esempio di questo numero.

4. Il metodo applicato all' Equazioni di più alto grado riesce egualmente felice, anche quando l' Equazione che si sostituisce, sia di grado maggiore del primo. Sia data l' Equazione (M) $x^4 + ax^3 + bx^2 + bcx + bd = o$, e si supponga

$$\begin{array}{l} + cx^3 + acx^2 + adx \\ \qquad + dx^2 \end{array}$$

che valga l' Equazione $x^2 + ax + b = o$, o ch' è lo stesso, $x^2 = - ax - b$. Sostituendo per x^2 le quantità eguali $-ax-b$, ad arbitrio, si avrà $x^2(-ax-b) + ax(-ax-b) + bx^2 + bcx + bd = o$

$$\begin{array}{l} + cx(-ax-b) + acx^2 + adx \\ \qquad\qquad + dx^2 \end{array}$$

ossia $- ax^3 - bx^2 - a^2x^2 - abx + bx^2 + bcx + bd = o$, e

$$\begin{array}{l} - acx^2 - bcx + acx^2 + adx \\ \qquad\qquad + dx^2 \end{array}$$

sostituendo una seconda volta, e riducendo sarà

$-ax.(-ax-b) - a^2x^2 - abx + bd = o$, ossia finalmente,

$$\begin{array}{l} + dx^2 + adx \end{array}$$

$dx^2 + adx + bd = o$ della stessa forma dell' Equazione sostituita, la quale diviene $x^2 + ax + b = o$, ch' è l' Equazione supposta, che divide l' Equazione (M).

5. Facendo altre arbitrarie sostituzioni si giugnerà sempre allo stesso risultato. Nell' Equazione (M) disposta così $x^2 . x^2 + ax . x^2 + b . x^2 + bcx + bd = o$ in vece di x^2 si so-

$$\begin{array}{l} + cx . x^2 + ac.x^2 + adx \\ \qquad + d . x^2 \end{array}$$

stituisca il suo eguale $- ax - b$, si avrà

$(-ax-b)$

$$\begin{aligned}(-ax-b).(-ax-b)+ax.(-ax-b)+b(-ax-b)+bcx+bd=0\,,\\ +cx.(-ax-b)+ac.(-ax-b)+adx\\ +d.(-ax-b)\end{aligned}$$

cioè moltiplicando e riducendo, $-cax^2-a^2cx-bac=0$ (dell' istesso grado, e forma della supposta $x^2+ax+b=0$), che diviene $x^2+ax+b=0$, ch' è la stessa che quella supposta, e che per conseguenza è un fattore dell' Equazione proposta (M). Vale lo stesso facendo diverse altre sostituzioni, anche quando il fattore scelto fosse di grado più alto.

6. Ciò posto, ecco come metto a profitto questa interessante proprietà dell' equazioni nella loro soluzione: nel che mi servo de' termini i più generali. Siano le due equazioni

I.ª $x^m+ax^{m-1}+bx^{m-2}+cx^{m-3}$ ec.

II.ª $x^n+dx^{n-1}+ex^{n-2}+fx^{n-3}$ ec., che moltiplicate insieme danno l' Equazione generalissima

$$\text{(A)}\quad \begin{aligned}x^{m+n}+ax^{m+n-1}+bx^{m+n-2}+cx^{m+n-3}+cdx^{m+n-4}\text{ ec.}\\ +dx^{m+n-1}+adx^{m+n-2}+bdx^{m+n-3}+bcx^{m+n-4}\text{ ec.}\\ +ex^{m+n-2}+aex^{m+n-3}+efx^{m+n-4}\text{ ec.}\\ +fx^{m+n-3}\end{aligned}$$

(Non sarà difficile di portare innanzi i rimanenti termini della formola per li noti metodi dell' Algebra, giacchè i coefficienti de' termini x^{m+n-1}, x^{m+n-2}, ec. seguono leggi costanti). Ora supponendo che uno de' fattori del grado m, che risolva l' Equazione generalissima (A) sia

$x^m+a'x^{m-1}+b'x^{m-2}+c'x^{m-3}$ ec. $=0$, sarà anche

$x^m=-a'x^{m-1}-b'x^{m-2}-c'x^{m-3}$; e fatte le opportune sostituzioni, l' Equazione (A) del grado $m+n$ si abbassa a un grado inferiore $m+n-1$.

7. Di fatti l' Equazione (A), sostituendo l' equivalente solo nel primo membro x^{m+n}, diviene

$$\text{(B)}\quad \begin{aligned}-a'x^{m+n-1}-b'x^{m+n-2}-c'x^{m+n-3}\ -\text{ ec.}\\ +ax^{m+n-1}+bx^{m+n-2}+cx^{m+n-3}\ +\text{ ec.}\\ +dx^{m+n-1}+adx^{m+n-2}+bdx^{m+n-3}\ +\text{ ec.}\\ +ex^{m+n-2}+aex^{m+n-3}\ +\text{ ec.}\\ +fx^{m+n-3}\ +\text{ ec.}\end{aligned}$$

e poi-e poichè si è supposto che $x^{m}+a'x^{m+n-1}+b'x^{m+n-2}+c'x^{m+n-3}$ ec. sia uno de' fattori dell' Equazione generale (A), così facendo $a'=a$, $b'=b$, $c'=c$ ec., l'Equazione (B) passa in quest'altra,

$$
\begin{aligned}
(B') \qquad & +dx^{m+n-1}+adx^{m+n-2}+bdx^{m+n-3}+\text{ec.}\\
& \qquad\qquad +ex^{m+n-2}+aex^{m+n-3}+\text{ec.}\\
& \qquad\qquad\qquad\qquad +fx^{m+n-3}+\text{ec.}
\end{aligned}
$$

nella quale Equazione, ch' è di un grado inferiore della proposta (A), di cui si cercano le radici, io osservo che il coefficiente d del primo termine è il coefficiente del secondo termine dell' Equazione II.ª al n.° 6, la quale conosciuta, si determinerà anche la a, dappoichè nell' Equazione generale (A) è noto il coefficiente del secondo termine eguale alla somma $a+d$. Più il coefficiente $ad+e$ dell'Equazione (B') è eguale al coefficiente simile dell' Equazione (A) meno la quantità b, così del resto. Si osservi che non prosieguo la sostituzione fino ad ottenere un residuo dell' istessa potenza dell' Equazione, che si è sostituita. Per ora mi valgo della sola prima sostituzione.

8. Evvi, com'è chiaro, una stretta relazione fra i coefficienti simili delle due Equazioni (A), e (B'), la quale relazione ci darà una norma per trovare i fattori di una qualsivoglia Equazione proposta a risolversi, e quindi le radici della medesima o vere, o almeno per approssimazione. Dappoichè fatto il confronto de' termini d' ambe l' Equazioni si verrà in cognizione delle quantità a, b, c, ec. che sono i coefficienti dell' Equazione supposta, uno de' fattori della proposta a risolversi. Intanto per ottenerlo, conviene prima di tutto determinare il massimo esponente sì dell'Equazione data a risolversi, che di quella, la quale si vuole che sia uno de' di lei fattori, ossia delle due Equazioni (A), e (B'); e non sarà difficile dando ad m ed n tali valori, che gli spettano, secondo il bisogno.

9 Così, avendo a risolversi un' Equazione di 4. grado, si farà $m=2$, $n=2$, e l' Equazione (A) diverrà

x^4+

$$\left.\begin{array}{l} x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + cd \\ + dx^3 + adx^2 + bdx + bc \\ + ex^2 + aex + af \end{array}\right\} = 0$$; e siccome le due Equazioni componenti al n.° 6 hanno il massimo esponente 2, così non si avranno che tre termini in cadauna di esse, e per conseguenza divenendo *zero* tanto f che c, l' Equazione superiore diviene

$$(A) \quad \begin{array}{l} x^4 + ax^3 + bx^2 + bdx + be = 0 \\ + dx^3 + adx^2 + aex \\ + ex^2 \end{array}$$. L' Equazione poi (B') n.° 7 diviene

$$(B') \quad \begin{array}{l} dx^3 + adx^2 + bdx + be = 0 \\ + ex^2 + aex \end{array}$$. Ora, supponendo che uno de' fattori che risolva l' Equazione (A) sia $x^2 + ax + b$, facendo il confronto si avrà (sottraendo dai termini dell' Equazione (A) i termini simili dell' Equazione (B')) I.° $(a+d)x^3 - dx^3 = ax^3$, ossia si troverà a. II.° $(b+ad+e)x^2 - (ad+e)x^2 = bx^2$, cioè si trova b. Gli altri due termini, restando i medesimi, non hanno bisogno di confronto. Quindi conchiudo che il fattore che risolve l' Equazione (A) è l' Equazione supposta $x^2 + ax + b = 0$. Ognuno vede che questo metodo suppone che l' ultimo termine dell' Equazione proposta a risolversi si abbia a dividere in due fattori tali, che ci diano l' intento.

10. Dagli anzidetti principj seguono necessariamente i seguenti precetti, che servono per trovare le radici d' una data Equazione o vere, o prossime. I.° Si divida in due fattori l' ultimo termine dell' Equazione data a risolversi. II.° Si passi dall' Equazione (A) all' Equazione (B') n.° 9. colle opportune sostituzioni. III.° Si facciano i confronti de' termini simili delle due Equazioni: questi mi daranno i coefficienti dello scelto fattore, o della scelta Equazione o veri, o prossimi al vero. Questa maniera è attissima per esaminare specialmente se vi siano fattori razionali, ne' quali possa risolversi una data Equazione.

11.

11. Esempio I. Si abbia a risolvere ne' suoi fattori veri, o prossimi l'Equazione numerica $x^4+3x^3+6x^2+5x+3=0$. Paragonati i termini di questa Equazione con quei dell'Equazione (A) n.° 9, si avranno le due Equazioni I.ª $a+d=3$; II.ª $b+ad+e=6$ (gli altri confronti possono trascurarsi). Quindi seguendo i precetti dati. I.° L' ultimo termine 3 si divida ne' fattori 3, e 1, onde sia $b=3$; $e=1$. II.° Si passi all' Equazione (B') n.° 9 onde si abbia

$$\begin{array}{llll} (B') & dx^3 + adx^2 + 3dx + 3 = 0 . \\ & \quad\;\; + \; x^2 \; + \; ax & \end{array}$$

III.° Fatto il confronto de' termini simili, si trovino i valori di a, e di d: così

I.ª $a+d=3$ Equ. (A)	II.ª $3+ad+1=6$ Equ. (A)
$-d=-d$ Equ. (B')	$-ad-1=-ad-1$ Equ. (B')
$a=3-d$	$3=5-ad$

Da' quali risultati facilmente si ricava $ad=5-3=2$: onde non è difficile di vedere che $a=2$, $d=1$. In fatti sapendosi per altro verso, che il terzo termine dell' Equazione (A) è eguale al terzo dell' Equazione (B'), dovrà essere anche $3d+a=5$: sostituendo nella I.ª $3d+3-d=5$, ossia $2d=2$; e $d=1$. (Di seguito si farà sempre questo confronto). Quindi il fattore che risolve l' Equazione $x^4+3x^3+6x^2+5x+3=0$ sarà $x^2+2x+3=0$: e l'altro fattore sarà, com' è chiaro, $x^2+x+1=0$.

12. Esempio II.° Si voglia sperimentare se l' Equazione (A) $x^4+2x^3+3x^2+5x+4=0$ abbia fattori razionali di secondo grado. I.° L' ultimo termine si divida ne' fattori 2, e 2; onde sia $b=2$, $e=2$. II.° Si passi all' Equazione (B') n.° 9, onde si abbia

$$\begin{array}{l} dx^3 + adx^2 + 2dx + 4 = 0 . \\ \qquad\;\; + \; 2x^2 + 2ax \end{array}$$

III.° Fatto il confronto de' termini delle due Equazioni (A) e (B') si avrà $a+d=2$; $ad+2=3$; dalle quali risulta $ad=1$, e d' onde non sarà difficile di ricavare $a=1$, $d=1$. Ma per lo stesso confronto si ha $2d+2a=5$, ossia per la prima $2d+4-2d=5$; quindi $4=5$ assurdo. Il fattore adunque x^2+ax+2, che (fa-

(facendo ex. gr. $a = 1$) diviene $x^2 + x + 2 = 0$ non risolve l' Equazione.

13. L' ultimo termine 4 può dividersi anche ne' fattori 1, 4. Si faccia I.° $b = 4$, $c = 1$. II.° Si passi all' Equazione (B') n.° 9, onde sia

$$\begin{array}{llll} dx^3 & + adx^2 & + 4dx & + 4 = 0 \\ & + x^2 & + ax & \end{array}$$

. III.° Fatto il confronto de' due termini primo, e terzo; lasciando gli altri, sarà I.ª $a + d = 2$; II.ª $4d + a = 5$. Dalla II.ª levando la I.ª si avrà $4d + a - a - d = 5 - 2$, ossia $3d = 3$, e $d = 1$ onde $a = 2 - 1 = 1$. Il fattore pertanto $x^2 + ax + 4$, ossia $x^2 + x + 4 = 0$ sembra che possa risolvere l' Equazione.

Ma siccome si è tralasciato il confronto degli altri termini; così conviene esaminare, se questo fattore soddisfa all' Equazione. Coll' ajuto del nostro metodo si ottiene facilmente l' intento. Sostituendo in vece di x^2 il valore eguale $-x - 4$ nella data Equazione

$x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 5x + 4 = 0$ si avrà

$(-x - 4).x^2 + 2x.(-x - 4) + 3x^2 + 5x + 4 = 0$, cioè

$-x^3 - 4x^2 - 2x^2 - 8x + 3x^2 + 5x + 4 = 0$, ossia

$-x^3 - 3x^2 - 3x + 4 = 0$, e di nuovo sostituendo

$-x.(-x - 4) - 3x^2 - 3x + 4 = 0$, l' Equazione dello stesso grado che ne risulta sarà $-2x^2 + x + 4 = 0$ diversa dal fattore supposto $x^2 + x + 4 = 0$. Quindi si vede chiaro che questo fattore non risolve l' Equazione, e che la proposta non si può dividere ne' fattori razionali di secondo grado. Tentata la sostituzione per un altro fattore $x^2 + ax - 2 = 0$; ovvero $x^2 + ax - 4 = 0$, risolvendo l'ultimo termine ne' suoi fattori $-2x \times -2$, e $-1x \times -4$, si avrà egualmente un risultato incompatibile.

14. Non potendosi avere nè fattori razionali, nè i veri d' una proposta Equazione, l' espediente il più proprio sarà quello di cercare i fattori prossimi; i quali fattori saranno tanto più atti, quanto più si avvicineranno ai veri. Per ottenerli nell' esempio passato, osservo che avendo noi trovato, pel confronto fatto al principio del n.° 12, $a = 1$: e

per

per l' altro confronto un altro valore di a diverso; (cioè I.^{a} $a+d=2$, II.^{a} $4+ad=1$, ossia facendo II.^{a} $ad=-2$, e $d=-\frac{2}{a}$, e sostituendo nella I.^{a} $a-\frac{2}{a}=2$, ed $a^2-2a=2$, ed $a=1\pm\sqrt{3}$, e, supposta per maggior semplicità $\sqrt{3}=2$ per approssimazione, una delle $a=1+2=3$); il valore medio delle due $a=1=3$, cioè $a=2$ sostituito nell' Equazione $x^2+ax+4=0$, che diviene $x^2+2x+4=0$ darà il fattore prossimo, ossia quello che conterrà due radici prossime della proposta Equazione $x^4+2x^3+3x^2+5x+4=0$.

15. Con simile artificio si potrà avere l' altro fattore prossimo della medesima Equazione n.^{o} 12, e per conseguenza le rimanenti due radici. Imperciocchè supponendo il fattore $x^2+ax+1=0$, si passi dall' Equazione (A) all' Equazione (B'), e coll' ajuto d' entrambe si giunga alla determinazione del valore medio della lettera a, la quale determinata darà il fattore prossimo $x^2+ax+1=0$, e quindi le rimanenti due radici prossimamente della medesima Equazione $x^4+2x^3+3x^2+5x+4=0$. Ma di queste approssimazioni più opportunamente a suo luogo, trattando della seconda maniera di potere trovare i fattori, che risolvono la proposta Equazione. Per ora basti di averne soltanto indicato il metodo.

16. È così generale il metodo, che deve valere anche quando i fattori siano fratti, cioè quando i coefficienti delle due Equazioni componenti la proposta a risolversi siano o fratti, o misti d' intieri, e di fratti. Dicasi lo stesso delle quantità irrazionali. Sia proposta a risolversi l' Equazione (V) $x^4+\frac{5}{2}x^3+\frac{17}{4}x^2+\frac{49}{8}x+\frac{3}{4}=0$. I.^{o} I divisori dell' ultimo termine, tralasciando gli altri, sono 1, e $\frac{3}{4}$. Formo l' Equazione $x^2+ax+\frac{3}{4}=0$, onde sia $b=\frac{3}{4}$, $e=1$ II.^{o} Passo dall' Equazione (A) all' Equazione (B') e si avrà

(B′) $dx^3 + \begin{matrix} adx^2 \\ + x^2 \end{matrix} + \begin{matrix} \frac{3}{4} dx \\ + ax \end{matrix} + \frac{3}{4} = o$. III.° Facendo il confronto de' due termini sarà (I.^{a}) $a+d = \frac{5}{2}$; (II.^{a}) $\frac{3}{4} d + a = \frac{49}{8}$. Dalla (I.^{a}) si trova $a = \frac{5}{2} - d$; e la (II.^{a}) ci dà $\frac{3}{4} d + \frac{5}{2} - d = \frac{49}{8}$, ossia $6d + 20 - 8d = 49$, e $d = -\frac{29}{2}$. Quindi $a = \frac{5}{2} + \frac{29}{2} = \frac{34}{2} = 17$. Determinata la $a = 17$, e fatto $x^2 + 17x + \frac{3}{4} = o$, sostituito questo fattore nell' Equazione data, trovo che il residuo dell' istessa forma è diverso: lo che m' indica che non sia questo il vero fattore, ma che bisognerà tentarne un altro.

17. L' ultimo termine dell' Equazione proposta a risolversi $\frac{3}{4}$ può nascere dalla moltiplicazione de' due numeri $3, \frac{1}{4}$. I.° Facciasi $b = 3$, $e = \frac{1}{4}$; e si formi l'Equazione $x^2 + ax + 3 = o$. II.° Si passi all' Equazione (B′), che sarà

(B′) $dx^3 + \begin{matrix} adx^2 \\ + \frac{1}{4} x^2 \end{matrix} + \begin{matrix} 3dx \\ + \frac{1}{4} ax \end{matrix} + \frac{3}{4} = o$. III.° Fatto il confronto de' due soli termini dell' Equazioni (A) e (B′), si avranno altre due Equazioni I.^{a} $a + d = \frac{5}{2}$; II.^{a} $3d + \frac{1}{4} a = \frac{49}{8}$. Il valore di $3d = \frac{15}{2} - 3a$ della I.^{a} si passi nella II.^{a}, e si avrà $\frac{15}{2} - 3a + \frac{a}{4} = \frac{49}{8}$; e $15.4 - 24a + 2a = 49$ os-

ossia $a=\frac{11}{22}=\frac{1}{2}$. Pertanto l'Equazione supposta essere un fattore della proposta sarà $x^2+ax+3=0$, cioè $x^2+\frac{1}{2}x+3=0$: la quale sostituita nella proposta a risolversi (V) n.° 16 secondo il nostro metodo, e dandomi lo stessissimo residuo $x^2+\frac{1}{2}x+3=0$, conchiudo ch' essa sia uno de' suoi fattori.

Seconda maniera.

18. La Società richiede, che il metodo che si dà per ritrovare le radici numeriche di qualsivoglia Equazione sia il più breve, o il men faticoso. Quindi se a taluno sembrasse troppo lungo, ed imbarazzante il metodo esposto finora, potrà battere la strada, che ne' seguenti numeri s' indicherà. Poggia il metodo sugli stessi esposti principj, e non n'è che un corollario.

19. E per vero, se un fattore scelto ad arbitrio d' un grado inferiore all' Equazione proposta a risolversi contenga alquante radici, che nell' Equazione stessa si contengono; sostituito questo nell' Equazione, il residuo dell' istesso grado e dell' istessa forma del fattore deve essere eguale precisamente al fattore istesso, che si è scelto. Da questa proposizione già dimostrata, e sviluppata ne' primi numeri di questo scritto seguono necessariamente i seguenti precetti I.° Si scelga una Equazione d' un grado inferiore alla proposta a risolversi, il cui ultimo termine noto sia uno de' fattori dell' ultimo termine della proposta: gli altri coefficienti siano quantità ignote. II.° Si facciano le opportune sostituzioni, finchè si giunga a un residuo dell' istesso grado, e della forma medesima della Equazione scelta. III.° Diviso ciascun termine di questo residuo per l' altro fattore già noto, si faccia il confronto de' termini simili ciascuno a ciascuno. IV.° Si trovino i valori delle ignote con questo confronto, o veri,

o proso prossimi. Si avrà così un fattore che conterrà tante radici della proposta Equazione a risolversi, quante unità contiene il massimo esponente dell' ignota in questo stesso fattore. L'applicazione del metodo, e degli esposti precetti agli esempj, ci farà conoscere alcune vie più brevi, onde adoperando qualche industria, si può giugnere più facilmente all' intento.

20. E per servirci de' termini più generali: sia l' Equazione (A) $x^5+px^4+qx^3+rx^2+fx+th=0$; i coefficienti della x in questa Equazione sono tutte quantità note. Secondo i precetti.

I.° Si scelga l' Equazione $x^3+ax^2+bx+h=0$; (h è uno de' divisori dell' ultimo termine dell' Equazione (A), ch'è noto; a, e b sono da determinarsi); onde sia $x^3=-ax^2-bx-h$.

II.° Si facciano le sostituzioni; onde si abbia

$$\left.\begin{array}{l} x^2.(-ax^2-bx-h)+qx^3+rx^2+fx+th \\ +px.(-ax^2-bx-h) \end{array}\right\}=0$$

cioè riducendo

$$\left.\begin{array}{l} -ax^4-bx^3-hx^2+fx+th \\ +qx^3+rx^2-phx \\ -apx^3-bpx^2 \end{array}\right\}=0$$

e di nuovo sostituendo in vece di $-ax^4$ il valore corrisponte $-ax.(-ax^2-bx-h)$, si avrà

$$\text{(B)}\quad \left.\begin{array}{l} a^2x^3+abx^2+ahx+th \\ -bx^3-hx^2+fx \\ +qx^3+rx^2-phx \\ -apx^3-bpx^2 \end{array}\right\}=0;$$ ch'è il residuo dello stesso grado, e della medesima forma, che l' Equazione scelta per fattore $x^3+ax^2+bx+h=0$.

III. Si divida l' Equazione (B) per t altro fattore; o, che val lo stesso, l' Equazione scelta $x^3+ax^2+bx+h=0$ si moltiplichi tutta per t, onde sia $tx^3+tax^2+tbx+th=0$, colla quale moltiplica non resta punto alterata: indi fatto il confronto si avranno le tre Equazioni I.ª $a^2-b+q-ap=t$; II.ª $ab-h+r-pb=ta$; III.ª $ah+f-ph=bt$.

21.

21. IV.° Per trovare i valori delle due ignote a, e b, osservo, ch'essendo tre l'Equazioni, e due le ignote, il Problema è più che determinato, per cui bisogna che nell'Equazioni finali l'ignota abbia uno stesso valore in due Equazioni. Pertanto si determinano i valori di a, e di b per mezzo delle tre Equazioni: (nell' operare si abbia la cura di disporle come nel seguente calcolo, e 'l metodo si applica facilmente nella soluzione di altre Equazioni di questa natura). Così il valore nella III.^{a} $a-p=\frac{bt-f}{h}$ si sostituisca nelle altre due Equazioni, e si avrà

I.^{a} $(a-p).a-b+q=t$. ossia $\left(\frac{bt-f}{h}\right).a-b+q=t$, e

II.^{a} $(a-p).b-h+r=a$; ovvero $\left(\frac{bt-f}{h}\right).b-h+r=at$.

Ora per la III.^{a} essendo $a=\frac{bt-f}{h}+p$; le due Equazioni diverranno

I.^{a} $\left(\frac{bt-f}{h}\right).\left(\frac{bt-f}{h}+p\right)-b+q=t$ (C):

II.^{a} $\left(\frac{bt-f}{h}\right).b-h+r=\frac{bt^2-ft}{h}+pt$ (D). Equazioni finali, che risolvono il Problema.

22. Ora quantunque la natura della presente soluzione richieda perchè sia completa, che almeno uno de' valori di b sia lo stesso in ambe l'Equazioni (C), e (D), giacchè come si è avvertito il Problema è più che determinato: pure non potendosi sempre verificare questa condizione fia bene distinguere due casi. Primo caso. V.° Quando uno de' valori di b è lo stesso in ambe l'Equazioni (C), e (D) n.° 21; si trovi la massima comune misura tra le medesime, e sarà così determinata una delle b, e per conseguenza l'altra ignota a, e finalmente il fattore scelto $x^3+ax^2+bx+h=0$, il quale conterrà tre radici dell'Equazione proposta a risolversi.

si. Secondo caso. VI.° Ove uno de' valori di b non sia lo stesso in ambe l' Equazioni (C), e (D), converrà venire alle approssimazioni; come più dettagliatamente in seguito.

23. Le riflessioni fatte nel passato numero sull' Equazioni di 5.° grado prese a trattare vagliono egualmente se abbiansi a risolvere Equazioni di più alto grado, com' è noto. Tutte le volte che nel primo caso si ha un valore di b ex. gr. eguale in ambe l' Equazioni, che risultano risolvendo il Problema, si avranno le radici vere dell' Equazione, e la soluzione nè sarà per tutt' i versi completa. Nel secondo caso poi non si hanno le radici che per approssimazione. Nel primo caso il nostro metodo è attissimo nel darci i divisori intieri, fratti, od anche irrazionali di qualunque Equazione, essendovene nel tentativo che se ne faccia. Non trovandosene, nel secondo caso ci darà i fattori prossimi, e per conseguenza le radici per approssimazione: nel che si avrà questo vantaggio che tentati due fattori qualunque dell' ultimo termine dell' Equazione proposta a risolversi, sebbene non si trovino atti alla soluzione completa, serviranno almeno pella ricerca delle radici della stessa per approssimazione.

24. Esempio I.° Sia proposta a risolversi l' Equazione di 5.° grado $x^5+3x^4+6x^3+9x^2+10x+6=0$. Si faccia il confronto coll' Equazione generale (A) n.° 20, e si avranno i seguenti valori $p=3$; $q=6$; $r=9$; $f=10$: $th=6$.

I.° L' ultimo termine 6 si divida ne' fattori 3, 2, e si formi l' Equazione $x^3+ax^2+bx+3=0$, onde sia $h=3$, $t=2$.

II.° Fatte le opportune sostituzioni si passerà all' Equazione (B), e III.° si avranno anche le tre Equazioni al n.° 20, che per ora possono tralasciarsi.

IV.° Le tre Equazioni al n.° 20 ci danno le due altre date per b num.° 21, (C), e (D) che sono

$$(C)\quad \left(\frac{2b-10}{3}\right)^2+\frac{6b-30}{3}-b+6=2$$

(D)

(D) $\frac{2b^2 - 10b - 4b + 20}{3} = 6 + 3 - 9$; le quali diverranno

(C) $b^2 - \frac{31b}{4} + \frac{46}{4} = 0$

(D) $b^2 - 7b + 10 = 0$

V.° Tentata ora la comune misura tra le due Equazioni (C), e (D) si trova in ambe l'Equazioni $b = 2$. Essendo poi n.° 21 $a = \frac{bt - f}{h} + p$ Equaz. III.ª, si avrà $a = \frac{2.2 - 10}{3} + 3 = \frac{4 - 10 + 9}{3} = 1$. Quindi conchiudo che l'Equazione $x^3 + ax^2 + bx + 3 = 0$, cioè $x^3 + x^2 + 2x + 3 = 0$ possa essere uno de' fattori, che diconsi razionali dell' Equazione di 5.° grado proposta a risolversi, e conterrà tre radici di quella. Che poi l'Equazione $x^3 + x^2 + 2x + 3 = 0$ sia tale realmente, si prova sostituendola in quella di 5.° grado, dappoichè si ritrova che il residuo dell' istessa forma è l'Equazione medesima $x^3 + x^2 + 2x + 3 = 0$. Non sarà difficile di rinvenire l' altro fattore, seguendo gli stessi principj.

25. Prima di passar oltre gioverà di fare sulla passata soluzione due osservazioni egualmente importanti. La prima, che potendosi una Equazione qualunque dividere in due fattori razionali, che si dicono, del secondo, o del terzo grado, ec., le due Equazioni finali, che risultano date ex. gr. per b, e costanti dovranno sempre contenere almeno uno de' valori di b, che sarà un numero intiero. Posto ciò non sarà difficile di rinvenirlo: dappoichè dividendo ne'suoi fattori gli ultimi due termini delle suddette Equazioni finali, il fattore comune ad ambi i termini sarà il valore ricercato di b; purchè però la determinazione dell' ultimo termine nell' Equazione la prima volta scelta secondo il I.° precetto al n.° 19 sia stata fatta a dovere. Tutto questo ragionamento è analogo alla dottrina dell'Equazioni. Nel nostro esempio passato le due Equazioni sono

(C) $b^2 - \frac{31b}{4} + \frac{46}{4} = 0$, ovvero $4b^2 - 31b + 46 = 0$

(D) $b^2 - 7b + 10 = 0$.

Sciogliendo gli ultimi due termini ne' suoi fattori, saranno del numero 46 due fattori 23, e 2; dell' altro 10 gli altri 5, e 2. Quindi il fattore 2 comune ad ambi i prodotti 46, e 10 sarà il valore di b, che si è sperimentato soddisfare al Problema. Questa osservazione agevolerà moltissimo la ricerca de' fattori razionali d' una Equazione di qualunque grado.

La seconda osservazione è che contenendo le due Equazioni (C), e (D) del passato numero la soluzione dell' Equazioni di quinto grado: tutte le volte che per gli noti artificj dell' Algebra si potessero rendere eguali le due b, com' esige la natura della soluzione, allora saremo sicuri della completa soluzione delle medesime Equazioni. Ma siccome la discussione di questo articolo richiede più lungo discorso di quello comporta il presente scritto; così passo innanzi nel mio ragionamento.

26. Esempio II.° Si cerchino le radici dell'Equazione di 5.° grado $x^5 + 3x^4 - 2x^3 + 3x^2 - x + 6 = 0$ (M). Fatto il confronto de' termini coll' Equazione (A) si avranno i valori seguenti $p = 3$; $q = -2$; $r = 3$; $ſ = -1$; $th = 6$. Secondo i precetti

I.° Il num. 6 si risolva ne' due fattori 3, e 2: e facendo $h = 3$, $t = 2$, si formi l'Equazione $x^3 + ax^2 + bx + 3 = 0$.

II.° III.°, e IV.° Fatte le opportune sostituzioni si avranno le due Equazioni (C), e (D) n.° 21. ridotte

(C) $\left(\frac{bt - ſ}{h}\right)^2 + \frac{b + p - pſ}{h} - b = t - q$

(D) $\frac{tb^2 - ſb - t^2b + ſt}{h} = pt + h - r$: cioè in numeri

(C) $\left(\frac{2b + 1}{3}\right)^2 + \frac{6b + 3}{3} - b = 4$, ossia (C) $4b^2 + 13b - 26 = 0$

(D) $\frac{2b^2 + b - 4b - 2}{3} = 6 + 3 - 3$, cioè (D) $2b^2 - 3b - 20 = 0$

27.

27. Ora poichè non si trova alcuna comune misura fra le due ultime Equazioni (C), e (D) date per b, e costanti, per essere il valore di b diseguale in entrambe; perciò si deve venire alle approssimazioni secondo il precetto VI.° Su di che io ragiono così. Egli è certo che allora l'Equazione scelta, ch'è uno de' fattori, che risolve l'Equazione data (nel nostro caso $x^3 + ax^2 + bx \mp 3 = 0$) è la vera, quando almeno uno de' valori di b è eguale, o lo stesso in ambe l'Equazioni finali per esempio nelle nostre (C), e (D): per cui tanto maggiormente l'Equazione si avvicinerà alla vera, o, ch'è lo stesso, tanto più le radici, che si cercano, saranno prossime alle vere, quanto i due valori di b più si accosteranno tra loro. Ecco pertanto una regola. Conviene scegliere que' valori di b ex. gr. nelle due Equazioni (C), e (D), i quali più si avvicinano tra loro, e trovato il valore medio di essi si metta nell'Equazione $x^3 + ax^2 + bx + 3 = 0$, questo ci darà la soluzione del problema. L'approssimazione poi sarà tanto maggiore, quanto più si conoscerà che i valori di b si accostano tra loro, vale a dire quando si abbiano con approssimazione maggiore i di lei valori. Vedremo tra poco che questi prossimi valori dipendono moltissimo dalla scelta, che si fa, de' fattori dell'ultimo termine dell'Equazione proposta a risolversi.

28. E giacchè si deve venire alle approssimazioni; VI.° per ottenere nel nostro esempio i valori prossimi di b la via più breve che si possa battere è la seguente: metodo che si potrà tenere nella ricerca de' valori prossimi dell'ignota nell'Equazioni di più alto grado, ove lo sviluppo suol essere oltremodo tedioso. Le due Equazioni al n.° 26 sono

(C) $4b^2 + 13b - 26 = 0$

(D) $2b^2 - 3b - 20 = 0$

Nell'Equazione (C) si metta 1 per b, e si avrà (seguendo i nostri principj sviluppati ne' primi numeri) $4.1 + 13b - 26 = 0$,

 cioè

cioè $13b = 26 - 4$, e $b = \frac{22}{13}$, cioè $b = 2$ prossimamente. Si metta $b = 2$ nell' Equazione, e si avrà $4.4 + 13b - 26 = 0$ cioè $13b = 26 - 16$, e $b = \frac{10}{13}$ minore di 2. È facile di vedere che b è media tra 1, e 2. Così facendo $b = 1, 5$ si avrà sostituendo

(C) $4 \cdot (2,25) + 13b - 26 = 0$, cioè $13b = 26 - 9$, ossia $13b = 17$; e $b = \frac{17}{13} = 1,2$ prossimamente. Quindi conchiudo che uno de' valori di b è eguale a 1, 5 prossimamente.

Nell' altra Equazione (D) si metta 1 per b e si avrà $2.1 - 3b - 20 = 0$, cioè $3b = -18$, e $b = -6$ troppo lontana dall' ipotesi fatta $b = 1$: facendo $b = 3$ si avrà $2.9 - 3b - 20 = 0$, cioè $3b = -2$, e $b = -\frac{2}{3}$. Si faccia $b = 4$, si avrà $2.16 - 3b - 20 = 0$; cioè $3b = 12$, e $b = \frac{12}{3} = 4$ secondo l' ipotesi fatta. Quindi una delle $b = 4$ nell' Equazione (D). Si hanno dunque due valori diseguali $b = 1,5$, $b' = 4$: il medio $\frac{b + b'}{2} = \frac{1.5 + 4.0}{2} = 2,75$ sarà il valore ricercato. Ora la III.ª Equazione al n.° 20 $a = \frac{bt - 1}{h} + p$ ci darà il valore di $a = \frac{(2,75).2 + 1}{3} + 3 = 5,2$ prossimamente. Sostituendo pertanto nell' Equazione $x^3 + ax^2 + bx + 3 = 0$ i valori prossimi di b, e di a, si avrà l' Equazione $x^3 + (5,2)x^2 + (2,75)x + 3 = 0$; la quale conterrà tre radici prossime dell' Equazione proposta a risolversi nel n.° 26, (M) $x^5 + 3x^4 - 2x^3 + 3x^2 - x + 6 = 0$.

29. Ma siccome si hanno due altri valori di b diversi, il

il primo $b=-5$, o nell'Equazione (C), il secondo $b'=-2,5$ nell'Equazione (D), de' quali il valore medio è $-3,75$: così si avrà un altro fattore prossimo della proposta Equazione di 5.° grado, ch'è $x^3+ax^2-(3,75)x+3=0$: il valore di a si determina pell' equazione III.^{a}, come nella passata soluzione. Avverto però che sebbene la differenza tra le due b nella prima soluzione è la stessa quantità 2,5 che in questa, pure essendo la prima b positiva, la seconda negativa, ed i valori di a che ne risultano anche diversi, si avranno due Equazioni differenti di terzo grado, che conterranno tre radici per approssimazione differenti le une dalle altre.

30. I valori di a, e di b hanno una strettissima relazione coi fattori, ne' quali si divide l' ultimo termine noto d'una data Equazione: quindi converrà esaurire tutti questi fattori, almeno i numeri intieri, per potere scegliere que' valori di a, e di b, che siano i più atti, e che diano i valori i più prossimi delle radici numeriche della Equazione proposta a risolversi. Anzi la scelta de' fattori non dee essere indifferente, e diviene assolutamente necessaria quando si voglia spingere l' approssimazione più oltre. Così nel nostro esempio dalla sostituzione degli altri due fattori 6, e 1 dell' ultimo termine dell'Equazione si debbono dedurre i valori di b, e di a, ed indi esaminare quali de' valori differenti di b, e di a si approssimano più tra loro, onde si abbia un fattore più prossimo della proposta Equazione. Allora a cagion di esempio il fattore $x^3+ax^2+bx+6=0$ sarà da preferirsi all' altro $x^3+ax^2+bx+3=0$, perchè il primo dà le radici dell' Equazione più prossime che il secondo. Anderei troppo a lungo, se volessi partitamente tutto esaminare.

31. Il Problema, seguendo questa nostra maniera, è del genere de' più che determinati, come si è avvertito al n.° 21. Volendosi ridurre a determinato non si deve fare altro che accrescere una condizione di più, o, ch'è lo stesso, trovare una Equazione di più delle date. E lo stretto rapporto tra i valori di a, e di b e i fattori dell' ultimo termine dell' Equa-

Equazione proposta a risolversi, ne'quali si avrà attenzione di dividerlo, ci somministra un mezzo quanto attivo, altrettanto utilissimo per le approssimazioni. Suppongasi pertanto uno de' fattori dell' ultimo termine n.° 20. t quantità ignota; e facendo m quantità nota eguale all' ultimo termine della proposta Equazione, onde sia $m = th$, si avrà h altra ignota $= \frac{m}{t}$. Siegue da ciò, che siccome le due finali Equazioni n.° 21 (C), e (D) risolvono un Problema più che determinato, supponendo t, ed h note; così le medesime ridurranno il Problema a determinato facendo t ignota, e conseguentemente $\frac{m}{t}$.

32. Le due equazioni n.° 21 diverranno sostituendo

I.ª (C) $\left((bt-f)\cdot\frac{t}{m}\right)\times\left((bt-f)\frac{t}{m}+p\right)-b+q=t$

II.ª (D) $\left(bt-f\right)\frac{tb}{m}-\frac{m}{t}+r=\left(bt^2-ft\right)\frac{t}{m}+pt$

le quali ridotte divengono

I.ª (C) $\left(\frac{bt^2-ft}{m}\right)^2+\frac{bt^2p-pft}{m}-b+q=t$

II.ª (D) $\frac{t^2b^2-ftb-t^3b+ft^2}{m}=pt+\frac{m}{t}-r$. In ambe queste Equazioni le quantità b, e t sono ignote, m è l'ultimo termine noto dell' Equazione di 5.° grado proposta a risolversi, come si è detto. Se ora si trovi il valore di b nell' Equazione (C), e si sostituisca in (D) si avrà un' altra Equazione data per t, e costanti, che risoluta mi darà un valore di t da mettersi nell' Equazione scelta, la quale risolve il Problema. Ognuno però può facilmente vedere, che in questo caso l' Equazione data per t montando a un grado troppo alto manca a questo metodo quel grado di semplicità, che richiede essenzialmente la Società, onde riesca facile la soluzione dell'Equazioni numeriche. Nel risolvere gli altri Probleblemi che seguono , farò vedere come si può scansare l' imbarazzo della lunghezza de' calcoli con un metodo più facile, che io vorrei si mettesse in opera in tutt' i casi possibili avendo a risolversi specialmente Equazioni di alto grado.

33. Esempio III.° Si cerchino le radici dell' Equazione in termini generali $x^4+px^3+qx^2+rx+fg=0$.

I.° Si scelga il fattore $x^2+ax+f=0$; (f è uno de' fattori dell' ultimo termine fg dell' Equazione); onde sia $x^2=-ax-f$.

II.° Fatte le opportune sostituzioni, onde sia
$x^2.(-ax-f)+px(-ax-f)+qx^2+rx+fg=0$, cioè
$-ax^3-fx^2-pax^2-pfx+qx^2+rx+fg=0$, ovvero
$-ax.(-ax-f)-pax^2+qx^2-pfx+rx+fg=0$; riducendo, ed ordinando si avrà

$$\text{(M)}\quad \begin{array}{l} a^2x^2+afx+fg=0, \\ -pax^2-pfx \\ +qx^2+rx \\ -fx^2 \end{array}$$

residuo dello stesso grado, e della forma medesima del fattore scelto $x^2+ax+f=0$.

III.° Si paragoni il residuo (M) col fattore $(x^2+ax+f)g=0$; si avranno le due Equazioni I.ª $a^2-pa+q-f=g$; II.ª $af-pf+r=ga$.

Essendo due le Equazioni, e una la ignota a, il Problema, com'è chiaro, e anche de' più che determinati (a). Intanto

IV.°

(a) L' Equazione (M) in questo num. 33 senza un nuovo calcolo si sarebbe facilmente dedotta dall' altra (B) al n. 20, sebbene quella sia nata dalla risoluzione d' un' Equazione di quinto grado; conservandosi a questo modo generalmente una specie d' uniformità nel calcolo. Dappoichè fatti i due ultimi termini eguali $th=fg$, onde sia $h=f$, $t=g$, e supposti zero i termini ove si trova x^3 nell' Equazione (B), si eguaglino i termini simili, sostituendo in (B) le convenienti lettere, si avrà

$$\begin{array}{l} a.bx^2+afx+fg=0. \\ -fx^2+fx \\ +rx^2-pfx \\ -pbx^2 \end{array}$$

Avvertendo poi che l' Equazione scelta in questo num. essendo stata $x^2+ax+f=0$, è facile a dedur-

IV.° Il valore di a nella I.ª è $a=\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q+f+g}$, e nella II.ª è $a=\frac{pf-r}{f-g}$. Risolvendo in seguito in due fattori l'ultimo termine della proposta Equazione di 4.° grado, che sono f, e g; sostituendoli nelle due Equazioni possono avvenire due casi.

Primo caso V.° *Se* nella sostituzione risultano eguali tra loro le due a, allora sarà completamente risoluta l'Equazione ne' due suoi fattori; uno de' quali sarà $x^2+ax+f=0$.

Secondo caso. VI.° Se le due a riescono diseguali ch'è il caso più frequente, allora si deve venire alle approssimazioni; e il valor medio delle due a sostituito nel fattore $x^2+ax+f=0$ darà due radici prossime della proposta Equazione. Su di che conviene avvertire, che quanto più si avvicinano tra loro i valori a, che vale lo stesso; quanto la differenza di $a-a'$ (chiamando a, ed a' i due valori diseguali) è più picciola, tanto il fattore $x^2+ax+f=0$ darà due radici più prossime dell'Equazione.

34. La scelta, com'è chiaro, dei due fattori dell'ultimo termine della proposta Equazione dovendo essere fatta con intelligenza per la determinazione delle radici per approssimazione; così gioverà di fare qualche riflessione circa questo particolare. Dalla scelta de' due fattori dipende la determinazione delle due a ed a', le quali quanto più si avvicinano tra loro, tanto si avranno più prossimi i valori della proposta Equazione, come si è detto. E quantunque possa trovarsi, com'è chiaro un metodo generale, che nato dalla na-

re, che b nell' Equazione (B) diviene a nella nostra, e per conseguenza r, ed s nell' Equazione di quinto grado passano in q, ed r in quelle del quarto; perciò sostituendo si avrà

$$\begin{aligned}a^2x^2&+afx+fg=0\\-pax^2&-pfx\\+qx^2&+rx\\-fx^3&\end{aligned}$$

ch'è evidentemente l'Equazione (M) di questo numero.

natura istessa de' coefficienti della proposta Equazione a risolversi ci metta a portata di quanto si cerca; pure il migliore espediente sarà quello di fare le opportune sostituzioni particolari; così che a un colpo d' occhio si possa vedere quali fattori siano i più proprj per risolvere il Problema per approssimazione. Vediamolo in qualche esempio.

35. Esemp. IV.° Si cerchino due radici le più prossime dell'Equazione numerica $x^4 + 3x^3 + 2x^2 + 4x + 12 = 0$. L' ultimo termine 12 si può dividere in tre fattori razionali positivi, ed intieri 1×12; 2×6; 3×4. Secondo i precetti al n.° 33 si faccia

I.° $x^2 + ax + 4 = 0$; onde sia $f = 4$; e $g = 3$.

II.° III.°, e IV.° Fatti tutt' i confronti si avranno le due $a = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - 2 + 7} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{29}{4}}$; $a' = \frac{3.4-4}{1} = 8$

La prima a ha due valori $\frac{3}{2} + \sqrt{\frac{29}{4}}, \frac{3}{2} - \sqrt{\frac{29}{4}}$, che prossimamente sono $\frac{3}{2} + \frac{5}{2}$; $\frac{3}{2} - \frac{5}{2}$; cioè 4, e -1. Quindi due confronti 1.° $a' - a = 8 - 4 = 4$: 2.° $a' - a = 8 + 1 = 9$.

VI.° Essendo diseguali le due a, a', si avranno due radici prossime dell' Equazione prendendo due valori medj delle due a, a', onde si abbiano due Equazioni $x^2 + ax + f = 0$, cioè $x^2 + \left(\frac{8+4}{2}\right)x + 4 = 0$; $x^2 + \left(\frac{8-1}{2}\right)x + 4 = 0$; cioè

I.^{a} $x^2 + 6x + 4 = 0$; II.^{a} $x^2 + \frac{7}{2}x + 4 = 0$. La prima darà le due radici più prossime che la seconda.

36. I secondi fattori del numero 12 sono 6, e 2. Facendo pertanto $x^2 + ax + 6 = 0$ sostituendo si avranno le due a, cioè

I.^{a} $a = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - 2 + 8}$, cioè $a = \frac{3}{2} + \sqrt{\frac{33}{4}}$, $a = \frac{3}{2} - \sqrt{\frac{33}{4}}$,

e per approssimazione $a = \frac{3}{2} + \frac{6}{2} = \frac{9}{2}$; $a = \frac{3}{2} - \frac{6}{2} = -\frac{3}{2}$:

II.^{a} $a' = \frac{3.6-4}{6-2} = \frac{14}{4} = \frac{7}{2}$. Quindi due confronti delle a diseguali 1.° $a - a' = \frac{9}{2} - \frac{7}{2} = 1$: 2.° $a - a' = -\frac{3}{2} - \frac{7}{2} = -5$, e due Equazioni, che conterranno le prossime radici, prendendo il medio valore delle due a, saranno $x^2 + ax + f = 0$; cioè $x^2 + 4x + 6 = 0$; $x^2 + x + 6 = 0$. La prima di queste due cioè $x^2 + 4x + 6 = 0$ conterrà le radici, che si approssimeranno più alle vere di quello che si approssimino le radici della seconda, essendo la differenza delle due a più picciola nella prima Equazione.

37. Se ora si paragonino fra loro i risultati nati dalle due diverse ipotesi fatte ne' due passati numeri, si vedrà bene che nella scelta da farsi pella determinazione dell' ultimo termine dell' Equazione, che dev' essere uno de' fattori della proposta, i due fattori 2, e 6 (n.° 36) sono da preferirsi agli altri due 3, e 4 (n.° 35), ne' quali si può dividere il numero 12 ultimo termine dell' Equazione di quarto grado proposta a risolversi. Così delle due Equazioni che risultano dopo i confronti $x^2 + 6x + 4 = 0$, $x^2 + 4x + 6 = 0$, la seconda contiene due radici più prossime alle vere, che la prima: dappoichè la seconda dà $a - a' = 1$, la prima $a' - a = 4$, vale a dire che le due a nella seconda si avvicinano più tra loro, che nella prima. Chi volesse spingere le approssimazioni più oltre, e vedere quali fattori siano da preferirsi agli altri, dovrebbe esaurire non solo tutt' i fattori intieri, ma anche i fratti, gli irrazionali, ec., bene inteso che in questa guisa non si dividerà l' Equazione ne' suoi due fattori, che si dicono, razionali d' un grado inferiore alla proposta. Nel nostro esempio si avrebbero ad esaminare anche i due fattori 1, e 12: indi i tre negativi -3×-4; -2×-6; -1×-12. In seguito gli altri $+24 \times \frac{1}{2}$; $36 \times \frac{1}{3}$ ec. La cosa essendo facile a comprendersi non ha bisogno di ulteriore dilucidazione.

ne. Sarà questo uno de' modi i più facili d' investigare per approssimazione le radici d' una data Equazione.

38. Essendo il Problema così trattato ne' passati numeri del genere dei più che determinati, potrà ridursi a determinato, servendoci dell' artificio adoperato nel numero 31. In effetto supponendo g uno de' fattori dell' ultimo termine dell' Equazione di 4.° grado proposta a risolversi al num.° 35, e t l'ultimo termine noto della medesima; sarà $t=gf$, ed $f=\frac{t}{g}$: quindi sostituendo nelle due Equazioni al num.° 33 art. IV, si avranno due altre Equazioni, ove i valori delle a sono dati per l' ignota g, e costanti. E nella ipotesi la più rigorosa di $a=a'$ (come dovrebbe essere) si avrà la seguente Equazione $\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q+\frac{t}{g}+g}=\frac{pt-rg}{t-g^2}$ (M), che per proseguire le nostre riflessioni sulla natura di questa soluzione, più particolarmente si tratterà nel seguente numero. Intanto ella l' Equazione (M) mi dà subito i due valori di a; e nelle diverse ipotesi di g mi darà anche senza molto imbarazzo, e sollecitamente il loro confronto. In fatti, supponendo $g=2$ uno de' fattori dell' ultimo termine 12 dell' Equazione di 4.° grado num. 35, il primo membro dell' Equazione (M) mi dà la prima $a=\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q+\frac{t}{g}+g}=\frac{3}{2}\pm\sqrt{\frac{9}{4}-2+8}$ $=\frac{3}{2}\pm\sqrt{\frac{33}{4}}$, e prossimamente $a=\frac{9}{2}$; $a=-\frac{3}{2}$: il secondo membro poi darà l' altra $a'=\frac{pt-rg}{t-g^2}=\frac{3\cdot 12-4\cdot 2}{12-4}=$ $\frac{3.3-2}{3-1}=\frac{7}{2}$: gli stessi risultati che ne' passati numeri. Colla introduzione adunque d' una nuova ignota è sorto un altro mezzo anche facile di fare comodamente il confronto per la investigazione delle radici d' una data Equazione per approssimazione.

39. Ora esaminando più da presso l' Equazione (M) del num. 38. osservo ch' essa contiene in se la completa soluzione dell' Equazioni di 4.° grado. Ma conviene determinare la g supposta ignota. Pertanto ella diverrà $\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q+\frac{t}{g}+g}$ $=\frac{pt-rg}{t-g^2}-\frac{p}{2}$, e fatt' i quadrati d' ambi i membri sarà

$$g+\frac{t}{g}-q=\left(\frac{pt-rg}{t-g^2}\right)^2-p\cdot\left(\frac{pt-rg}{t-g^2}\right);\ \text{cioè}$$

$$\left(g+\frac{t}{g}-q\right)\cdot\left(t^2-2tg^2+g^4\right)=\left(pt-rg\right)^2-\left(p^2t+prg\right)\cdot\left(t-g^2\right)$$

la quale diviene

$$\begin{aligned}t^2g-tg^3+g^5+\frac{t^3}{g}-2t^2g-qg^4&=r^2g^2-ptrg+p^2tg^2-prg^3,\\ -qt^2+2tqg^2&\end{aligned}$$

che ordinata per l' ignota q sarà

$$\text{(V)}\qquad \begin{aligned}g^6-qg^5-tg^4+2tqg^3-t^2g^2-qt^2g+t^3&=0\\ +prg^4-r^2g^3+ptrg^2&\\ -p^2tg^3&\end{aligned}$$

40. Sull' Equazione (V) io fo questo ragionamento. Se ella contiene in se la completa soluzione dell' Equazione di 4.° grado n.° 33, dappoichè è nata dalla ipotesi di $a=a'$, o di $a-a'=0$, conterrà anche la soluzione della medesima Equazione di 4.° grado per approssimazione. Due casi possono dunque avvenire: o si può trovare uno de' valori di g nell' Equazione (V) esattamente, e sarà completamente risoluta l' Equazione di 4.° grado: in deficienza, si abbia una delle g per approssimazione, ed allora si avrà anche la a per approssimazione, e non si avranno che le prossime radici della medesima Equazione di 4.° grado. Ora io dico che tutte le volte che l' Equazione si può risolvere in fattori razionali, dovendo allora la g essere un numero intiero, si avrà sempre la completa soluzione della medesima. Che se poi nell' Equazione (V) non si trovi alcuna delle g eguale a un numero intiero, si cerchi il di lei valore per approssimazione, e così

sì si avranno le prossime radici ricercate. Questo raziocinio si può, e si dee estendere nella ricerca delle radici dell' Equazioni di più alto grado.

41. La teoria esposta nel passato numero applicata alla pratica nel nostro Esempio num. 35. fa che l' Equazione (V) num. 39 diventi $g^6 - 2g^5 - 100g^3 * - 288g + 144.12 = 0$. Per non portare a lungo i nostri calcoli coi tediosi tentativi (i quali per altro si debbono sempre adoperare, tutte le volte che altronde non si possa venire a capo del valore della g, che si cerca); giacchè ci è noto essere una delle g eguale prossimamente al numero 2: si sostistuisca questo numero nell' Equazione numerica (V), e seguendo il nostro metodo si avrà

$8.8 - 2.4.8 - 100.8 - 288g + 144.12 = 0$, e dividendo tutto per 8 si avrà

$8 - 2.4 - 100 + 18.12 = 36g$, cioè

$- 100 + 18.12 = 36g$; e dividendo di nuovo per 4 sarà $-25 + 18.3 = 9g$, ossia $\frac{54-25}{9} = g$. Si avrà dunque $g = \frac{29}{9} = 3$ prossimamente. Quindi io deduco che l' ipotesi fatta di $g=2$ vale, e si accosta molto alla vera. Posta $g=2$, si avranno le due $a = \frac{9}{2}$, ed $a' = \frac{7}{2}$, come nelle passate soluzioni. È manifesto dunque, che non potendosi avere uno de' valori di g esattamente, il nostro metodo ci dà due valori di a prossimamente, e per approssimazione due radici dell' Equazione di 4.° grado proposta, contenuta nell' Equazione $x^2 + 4x + 6 = 0$.

42. Volendosi spingere più oltre l' approssimazione, non si deve che cercare un valore di g nell'Equazione del passato numero 41 più prossimo al vero, e sostituirlo nell' Equazione I.ª e II.ª al n. 33 per avere i valori di a, a'; i quali accostandosi più ai veri, e per conseguenza più tra loro, ci da-

daranno un'altra Equazione $x^2 + ax + \frac{t}{g} = 0$, le cui due radici, com'è manifesto, si accosteranno vie maggiormente alle vere. Ciascuno facilmente comprende, che un altro valore di g dell' Equazione di sesto grado nel num. 41 ci dà un consimile risultato; in modo che avendosi un altro valore di a diverso dal ritrovato ne' passati numeri, si avrà una nuova Equazione dell' istessa forma, ma di coefficienti diversi $x^2 + ax + \frac{t}{g} = 0$, la quale risolvendo anch'essa il Problema, conterrà due altre radici, ma diverse, che anch' esse si approssimeranno alle vere nella proposta Equazione di quarto grado. Ma delle sei Equazioni di secondo grado della forma $x^2 + ax + \frac{t}{g} = 0$ (giacchè essendo sei i valori di g nell' Equazione (V), altrettanti saranno i valori medj di a, e per conseguenza sei l' Equazioni che ne risultano) quale sarà quella, che risolverà il Problema più prossimamente? Certamente quella, ove il valore di g si accosta più al vero, o gli è più prossimo: dappoichè esso darà le a più prossime tra loro. Il nostro ragionamento anderebbe troppo a lungo, se si volesse esaminare ogni cosa a parte a parte. Ecco pertanto, oltre ai passati, un altro mezzo attissimo di poter indagare le radici prossime d' una data Equazione di 4.° grado. Non si hanno che a ritrovare i prossimi valori di g nell' Equazione (V) di sesto grado al num. 39, i quali sostituiti in ambe l' Equazioni al num. 35 daranno una copia di valori di a prossimi tra loro; de' quali bisogna prendere un medio: l' Equazione della forma $x^2 + ax + \frac{t}{g} = 0$ darà due prossimi valori della proposta Equazione di 4.° grado. Lo stesso metodo servirà nella soluzione dell' Equazioni d' un grado superiore al quarto.

43. Il raziocinio, che si è fatto ne' passati numeri per giugnere a una Equazione data per g, e per coefficienti dell' Equa-

Equazione di 4.° grado proposta a risolversi, vale anche se vogliasi avere un' altra Equazione indipendentemente da g data per a, e per coefficienti dell' Equazione medesima.

Dappoichè le due Equazioni n.° 33 sono I.^{a} $a^2-pa+q-g=\frac{t}{g}$;

II.^{a} $\frac{at}{g}-ag=\frac{pt}{g}-r$: che ordinate per g sono

I.^{a} $a^2g-pag+qg-g^2=t$; II.^{a} $at-ag^2=pt-rg$: cioè

I.^{a} $g^2-a^2g+t=0$; II.^{a} $g^2-\frac{rg}{a}-t+\frac{pt}{a}=0$.

$$\begin{array}{l} +pag \\ -qg \end{array}$$

Risolute ambe quest' Equazioni, e eguagliando tra loro i valori di g sorgerà un'altra Equazione (S) data per a, la quale risolverà il Problema o compiutamente, o per approssimazione, seguendo lo stesso ragionamento, che si è fatto nello sviluppo dell' Equazioue (V) data per g.

Per iscansare il tedio che si può incontrare nella lunghezza del calcolo, facendo il confronto delle due Equazioni I.^{a} e II.^{a}, per giugnere alla finale Equazione (S) si potrà adoperare il seguente artificio. Si trovino i valori di g^2 nella I.^{a}, e nella II.^{a} Equazione, e si eguaglino tra loro, onde sia $a^2g-pag+qg-t=\frac{rg}{a}+t-\frac{pt}{a}$; indi trovata di nuovo g si avrà

$(a^3-pa^2+qa-r)g=2ta-pt$, ossia $g=\frac{2ta-pt}{a^3-pa^2+qa-r}$

Si sostituisca nella I.^{a} Equaz. quest' ultimo valore di g, e si avrà

$$\left(\frac{2ta-pt}{a^3-pa^2+qa-r}\right)^2+\left(pa-a^2-q\right)\cdot\left(\frac{2ta-pt}{a^3-pa^2+qa-r}\right)+t=0; \text{ ossia}$$

$$(2ta-pt)^2+(pa-a^2-q)\times(2ta-pt)\times(a^3-pa^2+qa-r)+(a^3-pa^2+qa-r)^2\times t=0$$

cioè

$$4t^2a^2-4pt^2a+p^2t^2+(3pta^2-2ta^3-2tqa-p^2at+ptq).(a^3-pa^2+qa-r)$$
$$+(a^3-pa^2+qa-r)^2\times t=0, \text{ ossia finalmente (S)}$$
$$(a^3-pa^2+qa-r)^2+(a^3-pa^2+qa-r).(3pa^2-2a^3-2qa-p^2a+pq)+4ta^2-4pta+p^2t=0$$

Equa-

Equazione, ch' è visibilmente di sesto grado, egualmente che l' altra (V) data per g. Quindi vale per questa, quanto si è ne' passati numeri detto nello sviluppo di quella.

44. Tralascio altre riflessioni, che facilmente si presentano nello sviluppo delle passate Equazioni, per venire all' ultima maniera, che credo la più opportuna, e la più semplice, onde si possono risolvere l' Equazioni di tutt' i gradi con maggior semplicità, se non completamente, almeno colla maggior possibile approssimazione: maniera, che come notai al num. 32 vorrei che si scegliesse a preferenza di qualunque altra. Per esporla in un esempio; prendo a trattare l' Equazione di 4.° grado al n.° 35: vale lo stesso delle altre Equazioni di un grado più alto. Risoluta l' Equazione col nostro metodo si è giunto al n.° 43 alle due finali Equazioni

$$\text{I.}^a \quad g^2 \begin{array}{l} - a^2 g \\ + pag \\ - qg \end{array} + t = 0, \qquad \text{II.}^a \quad g^2 - \frac{rg}{a} - t + \frac{pt}{a} = 0$$

e dappoichè le due verificate nello stesso tempo contengono la soluzione del Problema; perciò si troveranno con brevità i valori delle ignote a, e g con diverse ipotesi, come nel quì aggiunto esempio. L' Equazione n.° 35, $x^4 + 3x^3 + 2x^2 + 4x + 12 = 0$, sostituendo alle lettere i numeri ci dà le due Equazioni

$$\text{I.}^a \quad g^2 \begin{array}{l} - a^2 g \\ + 3ag \\ - 2g \end{array} + 12 = 0; \qquad \text{II.}^a \quad g^2 - \frac{4g}{a} - 12 + \frac{36}{a} = 0.$$

Ora l'ultimo termine 12 si può dividere ne' fattori 4, e 3: facendo dunque $g = 4$, sarà I.ª $16 - 4a^2 + 12a - 8 + 12 = 0$, e II.ª $16 - \frac{16}{a} - 12 + \frac{36}{a} = 0$; cioè I.ª $-a^2 + 3a + 5 = 0$; II.ª $4a - 16 + 36 = 0$. Dalla II.ª si ha $a' = -5$, e dalla I.ª si ha un valore prossimo di $a = -1$: e 'l valore medio sarà $\frac{a + a'}{2} = -\frac{6}{2} = -3$. Si metta $a = -3$ nelle due

Equa-

Equazioni, e si determini g, onde sia I.ª $g^2 - 20g + 12 = 0$; II.ª $g^2 + \frac{4}{3}g - 24 = 0$: dalle quali Equazioni si avranno i valori prossimi di g, cioè dalla I.ª $g = +1$, dalla II.ª $g = 4$; e 'l medio valore $g = \frac{4+1}{2} = \frac{5}{2}$. In seguito si faccia $g = \frac{5}{2}$, e sostituito nelle due Equazioni, sarà I.ª $\frac{25}{4} - \frac{5a^2}{2} + \frac{3.5}{2}a - 5 + 12 = 0$, II.ª $\frac{25}{4} - \frac{4}{a} \cdot \frac{5}{2} - 12 + \frac{36}{a} = 0$. Onde la I.ª ci dà $a = \frac{9}{2}$ prossimamente, come la II.ª $a = \frac{9}{2}$ prossimamente. Io non vo innanzi nelle sostituzioni, giacchè dalla ipotesi di $g = \frac{5}{2}$ mi vengono due valori di a presso che eguali.

45. È facile ora di sapere uno de' fattori prossimi, che risolve l'Equazione proposta $x^4 + 3x^3 + 2x^2 + 4x + 12 = 0$, sapendo essere $g = \frac{5}{2}$, $a = \frac{9}{2}$. Dappoichè essendo $x^2 + ax + \frac{t}{g} = 0$ l'Equazione che si è scelta per la sostituzione, si avrà $x^2 + \frac{9}{2}x + 12 \times \frac{2}{5} = 0$ ossia $x^2 + \frac{9}{2}x + \frac{24}{5} = 0$ per l'Equazione, che conterrà due radici prossime della proposta a risolversi. Nel num. 36 si è trovata l'Equazione $x^2 + 4x + 6 = 0$, che per approssimazione risolve la medesima Equazione di quarto grado: i quali due fattori, come è chiaro, poco differiscono tra loro. Giova intanto fare sulla presente soluzione alcune riflessioni, che ci si presentano, le quali riguardano specialmente l'attività del metodo, che trattiamo.

46. E 1.° Con una qualunque ipotesi di uno de' fattori dell'ultimo termine della proposta Equazione, nel nostro esempio $g = 4$, si è arrivato a determinare dopo alcune operazioni tanto il valore prossimo di a, quanto quello di g da mettersi nell'Equazione $x^2 + ax + \frac{t}{g} = 0$: ciò che rende mol-

molto più breve la maniera di giugnervi, a differenza di quella adoperata ne' numeri 35, e seguenti ne' quali siamo pervenuti con stento maggiore a risultati consimili. II.° Se si voglia spingere più là l' approssimazione, si farà facilmente, solo che si abbia la cura di mettere nell' Equazione suddetta o i veri valori di g, e di a, i quali si trovano ne' primi tentativi della soluzione delle due Equazioni I.ª e II.ª n.° 44, ovvero di prendere i più prossimi. Riesce facile in questo modo di trovare le radici della proposta Equazione: dappoichè secondo la natura del Problema, essendo due l' Equazioni finali, e una la ignota, non si hanno che a risolvere Equazioni di grado molto inferiore alla proposta; e trattandosi di approssimazioni si ha una soluzione ben generale di tutte l' Equazioni, dipendendo la soluzione dell' Equazioni di più alto grado dalla soluzione di quelle di grado inferiore. III.° Si troveranno anche i fattori razionali, ne' quali potrà dividersi l' Equazione proposta, sebbene non si scelgano sul principio i divisori che convengono: e se si adoperi maggiore industria, anche i divisori irrazionali di una forma più semplice.

47. Chiuda questa Memoria la soluzione di una Equazione numerica di ottavo grado secondo quest' ultima maniera. L' andamento del metodo è lo stesso che quello adoperato ne' passati numeri. L' Equazione a risolversi sia (A) $x^8 + 2x^5 \cdots + 3x + 3 = 0$. Si scelga per fattore l' Equazione $x^2 + ax + \frac{3}{g} = 0$, ($a$, e g sono ignote) onde sia $x^2 = -ax - \frac{3}{g}$. Sostituendo si avrà

$$x^2 \cdot x^2 \cdot x^4 + 2x^3 \cdot x^2 + 3x + 3 = 0\text{, cioè}$$

$$x^4 \cdot \left(-ax - \frac{3}{g}\right) \cdot \left(-ax - \frac{3}{g}\right) + 2x^3 \cdot \left(-ax - \frac{3}{g}\right) + 3x + 3 = 0\text{; ossia}$$

$$x^4 \cdot \left(a^2x^2 + \frac{6ax}{g} + \frac{9}{g^2}\right) - 2ax^4 - \frac{6x^3}{g} + 3x + 3 = 0\text{, cioè di nuovo sostituendo}$$

x^2.

$$x^2\cdot\left(-ax-\frac{3}{g}\right)\cdot\left(a^2x^2+\frac{6ax}{g}+\frac{9}{g^2}\right)-2ax^2\cdot\left(-ax-\frac{3}{g}\right)+\frac{6ax^2}{g}+\frac{18x}{g^2}+3x+3=0$$

ossia

$$\left(-ax^3-\frac{3x^2}{g}\right)\cdot\left(a^2x^2+\frac{6ax}{g}+\frac{9}{g^2}\right)+2a^2x^3+\frac{12a}{g}x^2+\frac{18x}{g^2}+3x+3=0$$

la quale ridotta diviene

$$\left(a^2x^2-\frac{3x^2}{g}+\frac{3ax}{g}\right)\cdot\left(-a^3x-\frac{3a^2}{g}+\frac{6ax}{g}+\frac{9}{g^2}\right)-2a^3x^2-\frac{6a^2x}{g}+3x+3=0$$
$$+\frac{12a}{g}x^2$$
$$+\frac{18x}{g^2}$$

che fatta la moltiplicazione, ed ordinata diviene

$$\begin{array}{llll}
a^6x^2-2a^3x^2 & & & \\
+\frac{54a^2x^2}{g^2}-\frac{12ax^2}{g} & +\frac{3a^5x}{g} & -\frac{6a^2x}{g} & +3=0 \\
-\frac{15a^4x^2}{g} & -\frac{36a^3x}{g^2} & +3x & \\
-\frac{27x^2}{g^3} & +\frac{81ax}{g^3} & +\frac{18x}{g^2} &
\end{array}$$

Equazione della forma stessa di quella, che si è supposta $x^2+ax+\frac{3}{g}=0$.

48. Ora per fare il confronto si moltiplichi per g l' Equazione $x^2+ax+\frac{3}{g}=0$, onde sia $gx^2+agx+3=0$, e fatto il confronto de' termini simili di questa con quei del residuo, si avranno le due Equazioni

I.ª $a^6+\frac{54a^2}{g^2}-\frac{15a^4}{g}-\frac{27}{g^3}-2a^3+\frac{2a}{g}=g$

II.ª $\frac{3a^5}{g}-\frac{36a^3}{g^2}+\frac{81a}{g^3}-\frac{6a^2}{g}+\frac{18}{g^2}+3=ag$: le quali due debbonsi verificare nello stesso tempo, e verificate daranno la soluzione della proposta Equazione. Il nostro metodo a rigore richiederebbe, che supposta $g = 3$ a cagion d'esempio, ovvero 1 (che sono i due fattori dell' ultimo termine 3 dell'Equazione), e sostituita in ambe l'Equazioni, si venisse di seguito alla determinazione della a risolvendo due Equazioni, una di 5.°, l'altra di 6.° grado. Lo che quanta pena porterebbe, lo sperimenterà chiunque volesse farne la prova. Gioverà pertanto di tenere un' altra strada.

49. Si supponga $g=1$, ed a anche $=1$. Si sostituiscano nel seguente modo nelle due Equazioni; onde sia

I.ª $1+54-15-27-2+12a=1$

II.ª $3-36+81a-6+18+3=a$.

Si determinino le a tanto nella I.ª, che nella II.ª Equazione, e si avrà I.ª $54-44+12a=0$; ed $a=-\frac{10}{12}=-\frac{5}{6}$.

II.ª $24+80a-42=0$, ossia $a=\frac{18}{80}=\frac{9}{40}=\frac{1}{4}$ circa. Il risultato del calcolo non conviene coll'ipotesi di $g=1$, $a=1$.

Secondo: restando $g=1$, si determinino le a tanto nella I.ª, che nella II.ª Equazione; così. Sia $a=2$ nella I.ª, e sarà $3.8+54.4-15\,8.2-27-2.8+12a=1$; cioè

$8+27-30-\frac{27}{8}-2+\frac{12}{8}a=\frac{1}{8}$, ossia $3.8-28+12a=0$

e finalmente $a=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$, diversa da $a=2$. Ma per evitare i fratti si può prendere $a=2$. Nella II.ª poi si faccia $a=2$, e si avrà

$3.8.4-36.8+81.2-6.4+18+3=a$, ossia

$3.8.4-36.8+159=a$, vale a dire $85-96=\frac{a}{3}$, ed $a=-33$, molto lontana dalla supposta 2. Quindi può supporsi $a=1$ nella II.ª Equazione; e prendendo il valore medio sarà $a=\frac{2+1}{2}=\frac{3}{2}$.

50. Si cerchino i valori di g con questa nuova determinazio-

zione di $a=\frac{3}{2}$ nella I.ª e nella II.ª Equazione al n.° 48. Si avrà

$$\text{I.}^a\ \frac{9}{4}.\frac{9}{4}.\frac{9}{4}+54.\frac{9}{4}.\frac{1}{g^2}-15.\frac{9}{4}.\frac{9}{4}.\frac{1}{g}-\frac{27}{g^3}-2.\frac{9}{4}.\frac{3}{2}+12.\frac{3}{2g}=g$$

e facendo $g=2$ si avrà

$$\text{I.}^a\ \frac{9}{4}.\frac{9}{4}.\frac{9}{4}+\frac{27.9}{2}.\frac{1}{4}-\frac{15.9.9}{4.4.2}-\frac{27}{4.2}-\frac{2.9.3}{4.2}+\frac{12.3}{2.2}=g$$

e riducendo

$$\text{I.}^a\ \frac{9.9.9}{4.4.4}+\frac{243}{8}-\frac{15.81}{4.4.2}-\frac{27}{8}-\frac{54}{8}+\frac{36}{4}=g,$$ o anche

$\frac{9.9.9}{4.4.4}+\frac{162}{8}-\frac{15.81}{4.4.2}+\frac{36}{4}=g$; vale a dire

$\frac{9}{4.4.4}+\frac{1}{4}-\frac{15}{4.4.2}+\frac{1}{9}=\frac{g}{81}$, cioè $\frac{9}{4}+\frac{16}{4}-\frac{30}{4}+\frac{16}{9}=\frac{16g}{81}$

e finalmente $g=\frac{16}{9}\times\frac{81}{16}-\frac{5}{4}\times\frac{81}{16}=9-6$ prossimamente $=3$. Quindi si potrà prendere $g=2$ nella I.ª

Nella II.ª poi, posto $a=\frac{3}{2}$, si avrà

$$\text{II.}^a\ \frac{3.27.9}{8.4g}-\frac{36.27}{8g^2}+\frac{81.3}{2g^3}-\frac{6.9}{4g}+\frac{18.}{g^2}+3=\frac{3g}{2}$$

e facendo $g=2$, come nella I.ª

$$\text{II.}^a\ \frac{3.9.27}{8.4.2}-\frac{36.27}{8.4}+\frac{81.3}{2.8}-\frac{54}{4.2}+\frac{18}{4}+3=\frac{3g}{2}$$

cioè, dividendo tutto per 27,

$$\text{II.}^a\ \frac{27}{8.4.2}-\frac{36.2}{8.4.2}+\frac{18.2}{8.4.2}-\frac{8.2}{8.4.2}+\frac{18}{4.27}+\frac{1}{9}=\frac{g}{2.9}$$

cioè riducendo

$$\text{II.}^a\ -\frac{25}{8.4.2}+\frac{9}{2.27}+\frac{1}{9}=\frac{g}{2.9}\ \text{e}\ g=-\frac{9.2.25}{8.4.2}+\frac{9.9.2}{9.3.2}+\frac{9.2}{9}=$$

$-\frac{225}{32}+3+2=-7+5=-2$ prossimamente. Quindi l'ipotesi di $g=2$ è lontana dal vero.

51.

51. Si faccia in seguito $g=3$, e si sostituisca nella medesima II.ª Equazione, onde sia

$$\text{II.ª}\quad \frac{3.27.9}{8.4.3}-\frac{36.27}{8.3.3}+\frac{81.3}{2.3.3.3}-\frac{6.9}{4.3}+\frac{18}{3.3}+3=\frac{3g}{2},$$

e dividendo tutto per 27 sarà

$$\text{II.ª}\quad \frac{3.9}{8.4.3}-\frac{4}{8.}+\frac{3.3}{2.3.3.3}-\frac{2}{4.3}+\frac{2}{3.3.3}+\frac{1}{3.3}=\frac{g}{2.9};\ \text{cioè}$$

$$\text{II.ª}\quad \frac{3.3}{8.4}-\frac{2}{3}+\frac{13}{2.3.3.3}+\frac{3.2}{2.3.3.3}=\frac{g}{9.2};\ \text{e riducendo}$$

$$\frac{3.3}{8.4}+\frac{19}{2.3.3.3}-\frac{36}{2.3.3.3}=\frac{g}{9.2}.\ \text{Quindi}$$

$$g=\frac{3.3.9.2}{8.4}-\frac{17.9.2}{2.3.3.3}=\frac{81}{16}-\frac{17}{3}=5-6\ \text{prossimamen-}$$

te, cioè $g=-1$ per approssimazione: anch' essa diversa dalla supposta $g=3$.

In seguito fatta $g=4$. Sarà

$$\text{II.ª}\left(\frac{3.9.27}{8.4}\right).\frac{1}{4}-36.\frac{27}{8}.\frac{1}{4.4}+81.\frac{3}{2}.\frac{1}{4.16}-6.\frac{9}{4}.\frac{1}{4}+\frac{18}{4.4}+3=\frac{3}{2}g$$

e riducendo

$$\text{II.ª}\quad \frac{3.9.27}{8.4.4}-\frac{18.27}{4.4.4}+\frac{81.3}{16.4.2}-\frac{6.9}{4.4}+\frac{18}{4.4}+3=\frac{3}{2}g$$

e seguendo lo stesso metodo, che nelle passate soluzioni, sarà

$$\text{II.ª}\quad \frac{12}{8.16}-\frac{15}{8.4}+\frac{12}{81}=\frac{3g}{2.81},\ \text{ossia}\ \frac{12}{81}-\frac{18}{8.4}=\frac{3g}{2.81};\ \text{e}$$

$$g=\frac{12}{81}.\frac{81.2}{3}-\frac{18}{8.4}.\frac{2.81}{3}=\frac{24}{3}-\frac{9.27}{8}=8-27$$

prossimamente; vale a dire $g=-19$ molto più lontana dalla supposta $g=4$.

52. Egli è manifesto che il valore di g è medio tra 2, e 3, e che l' ipotesi la più propria è quella di $g=3$. Quindi

pren-

prendendo il medio valore di g, si avrà $g = \frac{3+2}{2} = \frac{5}{2}$. L' Equazione adunque, la quale contiene due radici prossime dell' Equazione di 8.° grado proposta a risolversi, sarà $x^2 + ax + \frac{3}{g} = 0$, cioè $x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{6}{5} = 0$.

Volendo spingere più oltre l' approssimazione, si debbono cercare i valori di a nelle due Equazioni al n.° 48 coi nuovi valori di $g = \frac{5}{2}$; e così di seguito si determineranno con approssimazione maggiore i valori di g coi nuovi valori di a. L' Equazione di secondo grado che risulta da questa nuova combinazione de' valori di a e di g, ci darà due radici più prossime della proposta Equazione.

53. In due maniere, tralasciando le altre, potrà rendersi più breve il calcolo delle approssimazioni nella ricerca delle radici della passata Equazione, ed in quelle dell'Equazioni consimili di alto grado. La prima è di tentare i limiti, oltre a' quali non possono sortire le radici tanto nella I.ª quanto nella II.ª Equazione nel nostro esempio, per potere aver così le prossime radici in ambe l' Equazioni; farne in seguito il confronto, onde scegliere le due, che più si accostano fra loro. La seconda è di supporre sul principio una Equazione di esponente più alto, e di determinare in seguito gli esponenti supposti ignoti, seguendo lo stesso metodo, che si è adoperato nel passato esempio. L' Equazioni che risultano, seguendo questo modo di operare, sebbene siano in maggior numero, pure avranno un grado inferiore, e saranno più trattabili. Così nel nostro esempio al n.° 47, e seguenti, in vece di scegliere l' Equazione $x^2 + ax + \frac{3}{g} = 0$, come si è fatto, potrà scegliersi l' altra di grado più alto $x^3 + ax^2 + bx + \frac{3}{g} = 0$. Si avranno a questo modo tre Equazioni, e tre ignote a determinarsi a, b, g; e lo stesso arti-

artificio, che si è adoperato nel risolvere le due Equazioni al n.° 44, si adopererà nel risolvere le tre altre, che nasceranno seguendo quest' altro metodo, anche più facilmente: quantunque le tre Equazioni si potranno ridurre anche a due, le quali forse si potranno risolvere con maggior semplicità. L' industria vale molto, com' è noto, nelle materie analitiche; ed alcuni incidenti faranno determinare chi maneggia il calcolo a un mezzo a preferenza dell'altro nelle occorrenze, che si presentano.

ME-