# LETTERA

Di Sebastiano Canterzani

## AL SUO AMICO TORQUATO VARENO

Sopra una maniera di cavare i numeri Bernoulliani

*Ricevuta il dì 29 Novembre 1803.*

Ho il piacere di veder ancora questa volta, che a voi fa difficoltà quel che è solito farla a me pure. Così è: amendue i metodi, che l' immortal Eulero dà nel Cap. V della seconda parte del suo Calcolo Differenziale § 121, 122, 123 per formare le equazioni, onde ritrovare i numeri Bernoulliani, non mi sono sembrati mai semplici abbastanza per ricordarsene all' uopo, e non dover ricorrere al libro ogni volta, che s' abbia bisogno di cavare uno di que' numeri. Voi dunque mi chiedete se io sappia qualch' altra strada più comoda, e più facile da aversi in pronto al bisogno, la quale conduca egualmente all' intento. Alla qual vostra dimanda farò come le altre volte ho con voi usato; cioè vi comunicherò il metodo, che soglio io praticare, il quale a me pare, se non più comodo di quei dell' Eulero, certamente più semplice, e quindi più facile da esser tenuto a mente.

Io mi valgo dell' equazione $0 = \frac{2n-1}{2(2n+1)} - \frac{2nA}{2} - \frac{2n(2n-1)(2n-2)B}{2.3.4} - \frac{2n(2n-1)(2n-2)(2n-3)(2n-4)C}{2.3.4.5.6} - \frac{2n(2n-1)\ldots\ldots(2n-6)D}{2.3\ldots\ldots7.8}$ &c. dove A, B, C, D, &c. rappresentano i numeri Bernoulliani, cioè A il primo, B il

B il secondo, C il terzo, e così via discorrendo: $n$ poi è l' indice del numero Bernoulliano, che si vuole, cioè è 1, se si vuole il primo, è 2, se si vuole il secondo, è 3, se si vuole il terzo, e così di mano in mano. L' ordine, che regna nella serie, è chiarissimo. Fuori del primo termine, che è positivo, ed è facil cosa tener a mente come è formato, tutti gli altri sono affetti del segno —, e dall' uno passando al suo seguente crescono due fattori tanto nel numeratore, quanto nel denominatore, essendo sempre $2n$ il primo de' fattori del numeratore, e 2 il primo di quei del denominatore. Mettasi pertanto in luogo di $n$ il numero, che indica quanto sia nell' ordine de' numeri Bernoulliani quello, che si cerca: la formola tosto mostra come questo numero Bernoulliano dipenda da quei, che lo precedono, i quali si troveranno egualmente, mettendo nella formola stessa in luogo di $n$ prima 1, poi 2, indi 3, e così di seguito fino ad $n-1$.

Vogliasi a cagion d' esempio il sesto numero Bernoulliano. Metto $n=6$. La formola diventa $o = \frac{11}{26} - \frac{12A}{2} - \frac{12.11.10B}{2.3.4} - \frac{12.11.10.9.8C}{2.3.4.5.6} - \frac{12.11.10.9.8.7.6D}{2.3.4.5.6.7.8} - \frac{12.11.10.9.8.7.6.5.4E}{2.3.4.5.6.7.8.9.10} - \frac{12.11.10.9.8.7.6.5.4.3.2F}{2.3.4.5.6.7.8.9.10.11.12}$, onde $F = \frac{11}{26} - 6A - 5.11B - 3.4.11C - 9.11.D - 2.11E$. Metto ora nella formola medesima $n=1$, e risulta $o = \frac{1}{2.3} - \frac{2A}{2}$, onde $A = \frac{1}{6}$: metto $n=2$, e risulta $o = \frac{3}{2.5} - \frac{4A}{2} - \frac{4.3.2B}{2.3.4}$, onde $B = \frac{3}{2.5} - 2A$, e posto in luogo di A il suo valore già trovato $B = \frac{3}{2.5} - \frac{1}{3} = -\frac{1}{30}$: metto $n=3$, e e risulta $o = \frac{5}{2.7} - \frac{6A}{2} - \frac{6.5.4.B}{2.3.4} - \frac{6.5.4.3.2C}{2.3.4.5.6}$, onde $C = \frac{5}{2.7} - 3A - 5B$, e posti in luogo di A, B i loro valori, $C = \frac{5}{2.7} - \frac{3}{2.3} + \frac{5}{30} = \frac{1}{42}$: metto $n = 4$, e risulta $o = \frac{7}{18} - \frac{8A}{2} - \frac{8.7.6B}{2.3.4} - \frac{8.7.6.5.4.C}{2.3.4.5.6.} - \frac{8.7.6.5.4.3.2D}{2.3.4.5.6.7.8}$, onde $D = \frac{7}{18} - 4A - 2.7B - \frac{4.7C}{3}$, e posti in luogo di A, B, C i loro valori $D = \frac{7}{18} - \frac{4}{6} + \frac{14}{30} - \frac{28}{3.42} = -\frac{1}{30}$: finalmente metto $n = 5$, e risulta $o = \frac{9}{22} - \frac{10A}{2} - \frac{10.9.8B}{2.3.4} - \frac{10.9.8.7.6C}{2.3.4.5.6} - \frac{10.9.8.7.6.5.4.D}{2.3.4.5.6.7.8} - \frac{10.9.8.7.6.5.4.3.2.E}{2.3.4.5.6.7.8.9.10}$, onde $E = \frac{9}{22} - 5A - 3.10B - 2.3.7C - 3.5D$, e posti in luogo di A, B, C, D i loro valori $E = \frac{9}{22} - \frac{5}{6} + \frac{30}{30} - \frac{42}{42} + \frac{15}{30} = \frac{5}{66}$. Sostituiti questi valori di A, B, C, D, E nell' equazione $F = \frac{11}{26} - 6A - 5.11B - 3.4.11.C - 9.11D - 2.11E$ cavo $F = \frac{11}{26} - \frac{6}{6} + \frac{55}{30} - \frac{132}{42} + \frac{99}{30} - \frac{110}{66} = -\frac{691}{2730}$.

Ha questo metodo il vantaggio di dare i numeri Bernoulliani affetti di quel segno, che hanno nella famosa formola, che somministra la somma di un qualunque numero $n$ di termini di qualsivoglia serie, dato che ne sia il termine generale; laddove i due metodi Euleriani li danno tutti affetti del medesimo segno. Ma se questo è pur un vantaggio, per lo contrario vi parrà forse un difetto, che non possa nella se-

rie

rie di que' numeri ricavarsene uno senza aver l' incomodo di trovar anche tutti quei, che lo precedono. Sopra di che vi farò notare, che oltrecchè a questa qualunque siasi accusa soggiacciono ancora i due metodi Euleriani di sopra accennati, io non so se esser vi possa una maniera di far nascere un di que' numeri independentemente da' suoi precedenti, la quale non esiga un calcolo e più implicato, e più penoso di quel che si richiede facendo uso della mia formola.

Al qual proposito non vi tacerò, che il celebre Cav. Lorgna nella seconda delle due Memorie, che egli inserì nel Volume terzo della R. Accad. di Torino, come nota il chiarissimo Professore Malfatti in una sua inserita nel quarto tomo della Società Italiana delle Scienze, cava il numero Bernoulliano $n$ esimo dal termine, che ha $x^{2n}$ nell' infinitinomio $\left(1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{2.3}+\frac{x^3}{2.3.4}\text{ ec.}\right)^{-1}$ ponendo in esso $x=1$, e poi moltiplicandolo per $2.3.4\ldots\ldots 2n$. E siccome è possibile di avere in quell' infinitinomio il termine che porta $x^{2n}$, senza avere i precedenti, o certamente senza conoscerne l' importare, così si dovrà dire essere questa una maniera di procacciarsi il numero Bernoulliano $n$ esimo, la quale non obbliga a ricorrere a quei, che lo precedono. Ma convien avvertire, che anche nel caso che $n$ sia un numero non molto grande, il termine che ha $x^{2n}$, in quell' infinitinomio viene sotto un numero grandissimo di forme, le quali consistono in altrettante frazioni, che non senza un calcolo lunghissimo, e tediosissimo si possono sommare, com' è necessario di fare per ottenere il numero Bernoulliano. In fatti posto che $n$ sia solo $=6$, il termine, che ha $x^{12}$, si presenta sotto 77 diverse forme, le quali per conseguenza dimandano gran tempo, e gran pazienza per esser ridotte (essendo frazioni) alla stessa denominazione, e messe così a portata di somministrare il sesto numero Bernoulliano.

Meno operoso sarebbe il calcolo, se in vece della formazione della potestà $(-1)$ esima di quell' infinitinomio, si formasmasse il quoziente della divisione del numeratore pel denominatore della frazione $\dfrac{1}{1+\dfrac{x}{2}+\dfrac{x^2}{2.3}+\dfrac{x^3}{2.3.4}+\dfrac{x^4}{2.3.4.5}-\text{ec.}}$ che a quell' infinitinomio equivale: ma con ciò fare si verrebber pur trovando tutti i numeri Bernoulliani, che precedono quel che si vuole, nè sarebbe più vero, che si trovasse il numero Bernoulliano $n$esimo indipendentemente da' suoi precedenti. Nella necessità poi di cavare tutti i numeri precedenti, la formola che vi ho proposta, riesce certamente d'un uso assai meno incomodo di quello dell' accennata divisione.

Voi quì sarete per avventura curioso di sapere come io trovassi quella formola, e come si provi che i numeri nel modo da me indicato ricavati sieno realmente i Bernoulliani. Ad appagare la qual curiosità mi convien dirvi, che in occasione di far intorno ad alcune serie certe ricerche, che ora più non so quali fossero, arrivai ad incontrare la frazione

$$\frac{\dfrac{\frac{1}{2}}{2.3}+\dfrac{\frac{3}{2}z}{2.3.4.5}+\dfrac{\frac{5}{2}z^2}{2.3.4.5.6.7}+\dfrac{\frac{7}{2}z^3}{2.3.4.5.6.7.8.9}+\dfrac{\frac{9}{2}z^4}{2.3.....10.11}\ \&c.}{1+\dfrac{z}{2.3}+\dfrac{z^2}{2.3.4.5}+\dfrac{z^3}{2.3.4.5.6.7}+\dfrac{z^4}{2.3.4.5.6.7.8.9}\ \&c.}$$

la quale sviluppata in serie vidi che mi dava i numeri Bernoulliani, intanto chè denotando per A, B, C, D, ec. questi numeri, e chiamando $a$, $b$, $c$, $d$, ec. le quantità $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2.3.4}$, $\frac{1}{2.3.4.5.6}$, $\frac{1}{2.3.4.5.6.7.8}$, ec. si aveva quella frazione eguale alla serie $aA+bBz+cCz^2+dDz^3$, &c. Ora in grazia di quest' eguaglianza risulta

$$
\begin{array}{lllllllll}
o = \dfrac{\frac{1}{2}}{2.3} & + \dfrac{\frac{3}{2}z}{2.3.4.5} & + \dfrac{\frac{5}{2}z^2}{2.3.4.5.6.7} & + \dfrac{\frac{7}{2}z^3}{2.3\ldots8.9} & + \dfrac{\frac{9}{2}z^4}{2.3\ldots10.11} & + \dfrac{\frac{11}{2}z^5}{2.3\ldots12.13} & + \dfrac{\frac{13}{2}z^6}{2.3\ldots14.15} & + \dfrac{\frac{15}{2}z^7}{2.3\ldots16.17} & \&c. \\
-aA & \dfrac{-aAz}{2.3} & \dfrac{-aAz^2}{2.3.4.5} & \dfrac{-aAz^3}{2.3.4.5.6.7} & \dfrac{-aAz^4}{2.3\ldots8.9} & \dfrac{-aAz^5}{2.3\ldots10.11} & \dfrac{-aAz^6}{2.3\ldots12.13} & \dfrac{-aAz^7}{2.3\ldots14.15} & \&c. \\
 & -bBz & \dfrac{-bBz^2}{2.3} & \dfrac{-bBz^3}{2.3.4.5} & \dfrac{-bBz^4}{2.3.4.5.6.7} & \dfrac{-bBz^5}{2.3\ldots8.9} & \dfrac{-bBz^6}{2.3\ldots10.11} & \dfrac{-bBz^7}{2.3\ldots12.13} & \&c. \\
 & & -cCz^2 & \dfrac{-cCz^3}{2.3} & \dfrac{-cCz^4}{2.3.4.5} & \dfrac{-cCz^5}{2.3.4.5.6.7} & \dfrac{-cCz^6}{2.3\ldots8.9} & \dfrac{-cCz^7}{2.3\ldots10.11} & \&c. \\
 & & & -dDz^3 & \dfrac{-dDz^4}{2.3} & \dfrac{-dDz^5}{2.3.4.5} & \dfrac{-dDz^6}{2.3.4.5.6.7} & \dfrac{-dDz^7}{2.3\ldots8.9} & \&c. \\
 & & & & -eEz^4 & \dfrac{-eEz^5}{2.3} & \dfrac{-eEz^6}{2.3.4.5} & \dfrac{-eEz^7}{2.3.4.5.6.7} & \&c. \\
 & & & & & -fFz^5 & \dfrac{-fFz^6}{2.3} & \dfrac{-fFz^7}{2.3.4.5} & \&c. \\
 & & & & & & -gGz^6 & \dfrac{-gGz^7}{2.3} & \&c. \\
 & & & & & & & -hHz^7 & \&c.
\end{array}
$$

la qual condizione dovendosi verificare indipendentemente dal valore di $z$, sarà giocoforza che ciascuna delle diverse potestà di $z$ riesca moltiplicata per zero. Ma facilmente si scorge che la potestà $z^{n-1}$ riesce moltiplicata per

$$\frac{\frac{2n-1}{2}}{2.3\ldots2n(2n+1)} \quad \frac{-aA}{2.3\ldots(2n-2)(2n-1)} \quad \frac{-bB}{2.3\ldots(2n-4)(2n-3)} \quad \frac{-cC}{2.3\ldots(2n-6)(2n-5)} \cdots \frac{-tT}{2.3} - uU$$

dove U denota il numero Bernoulliano $n$esimo, e T il suo precedente, $u$ la quantità $\frac{1}{2.3\ldots(2n-1)2n}$, e $t$ la sua precedente $\frac{1}{2.3\ldots(2n-3)(2n-2)}$. Laonde dovendo questo coefficiente di $z^{n-1}$ essere $= o$, resterà egli eguale a zero anche diviso che venga per $u$, il che fatto, se in luogo delle quantità $a, b, c, d, \ldots t, u$ si metteranno i loro valori risulterà

o =

$$0 = \frac{2n-1}{2(2n+1)} \frac{-2nA}{2} \frac{-2n(2n-1)(2n-2)B}{2.3.4.} \frac{-2n(2n-1)(2n-2)(2n-3)(2n-4)C}{2.3.4.5.6.} \cdots \frac{-2n(2n-1)T}{2.3} - U$$

che è la formola, che v' ho proposta.

Che poi sieno veramente i Bernoulliani que' numeri A, B, C, D., &c., che si cavano da questa formola ponendo in essa in luogo di $n$ successivamente i numeri naturali 1, 2, 3, 4, &c. potrete accertarvene nel modo seguente. L' Eulero al §. 114 della seconda parte del suo calcolo differenziale trova che la frazione

$$\frac{1 + \frac{u^2}{2.4} \frac{+u^4}{2.4.6.8} \frac{+u^6}{2.4.6.8.10.12} \frac{+u^8}{2.4.6.8.10.12.14.16} \;\&c.}{1 + \frac{u^2}{4.6} \frac{+u^4}{4.6.8.10} \frac{+u^6}{4.6.8.10.12.14} \frac{+u^8}{4.6.8.10.12.14.16.18} \;\&c.}$$

sviluppata in serie somministra $1 + aAu^2 + bBu^4 + cCu^6 + dDu^8$ &c., dove $a, b, c, d$, ec. sono quelle quantità stesse, che di sopra ho per queste medesime lettere denotate, e A, B, C, D, ec. sono i numeri Bernoulliani. Il che posto troverete, che l'eguaglianza di quella frazione a questa serie fa nascere l'equazione

$$\begin{aligned}
0 = {} & \frac{u^2}{2.4} \frac{+u^4}{2.4.6.8} \frac{+u^6}{2.4.6.8.10.12} \frac{+u^8}{2.4.6.8.10.12.14.16} \;\&c.\\
& \frac{-u^2}{4.6} \frac{-u^4}{4.6.8.10} \frac{-u^6}{4.6.8.10.12.14} \frac{-u^8}{4.6.8.10.12.14.16.18} \;\&c.\\
& -aAu^2 \frac{-aAu^4}{4.6} \frac{-aAu^6}{4.6.8.10} \frac{-aAu^8}{4.6.8.10.12.14} \;\&c.\\
& -bBu^4 \frac{-bBu^6}{4.6} \frac{-bBu^8}{4.6.8.10} \;\&c.\\
& -cCu^6 \frac{-cCu^8}{4.6} \;\&c.\\
& -dDu^8 \;\&c.
\end{aligned}$$

della quale deve al solito ogni termine esser eguale a zero. Avrete dunque dal termine $n$ esimo

$$0 = \frac{1}{2.4..2n} \frac{-1}{4.6...(4n+2)} \frac{-aA}{4.6...(4n-2)} \frac{-bB}{4.6...(4n-6)} \frac{-cC}{4.6...(4n-10)} \cdots \frac{-tT}{4.6} - uU$$

o sia

$$0 = \frac{2n}{2^{2n}.2.3.4...(2n+1)} \frac{-aA}{2^{2n-2}.2.3...(2n-1)} \frac{-bB}{2^{2n-4}.2.3...(2n-3)} \frac{-cC}{2^{2n-6}.2.3...(2n-5)} \cdots$$



...

$\ldots \dfrac{-tT}{2^2.2.3} - uU$; e quì dividendo tutto per $u$, indi mettendo in luogo delle quantità $a$, $b$, $c$, $d$ . . . . . $t$, $u$ i loro valori otterrete la formola

$$o = \frac{2n}{2^{2n}(2n+1)} \frac{-2nA}{2^{2n-2}.2} \frac{-2n(2n-1)(2n-2)B}{2^{2n-4}.2.3.4} \frac{-2n(2n-1)(2n-2)(2n-3)(2n-4)C}{2^{2n-6}.2.3.4.5.6} \ldots$$

$$\ldots \frac{-2n(2n-1)T}{2^2.2.3} - U,$$

che è alquanto diversa dalla mia, ma che diventerà eguale alla mia di mano in mano che nell' una e nell' altra in vece di $n$ sostituirete i numeri naturali 1, 2, 3, 4, ec. In fatti ponendo $n = 1$ questa vi darà $o = \dfrac{2}{4.3} \dfrac{-2A}{2}$, cioè $o = \dfrac{1}{2.3} - A$, e la mia pure $o = \dfrac{1}{2.3} - A$: sostituendo ora il valore trovato di A nelle due formole, la mia vi diventerà $o = \dfrac{2n-1}{2(2n+1)} \dfrac{-2n}{2.2.3} \dfrac{-2n(2n-1)(2n-2)B}{2.3.4}$ ec., quest'altra $o = \dfrac{2n}{2^{2n}(2n+1)} \dfrac{-2n}{2^{2n-2}.2.2.3} \dfrac{-2n(2n-1)(2n-2)B}{2^{2n-4}.2.3.4.}$ ec., l'una e l' altra delle quali facendo $n = 2$ vi darà $o = \dfrac{-1}{30} - B$; e così via discorrendo.

Ed ecco che senza volerlo vi ho proposta un' altra formola generale, che colla successiva sostituzione de' numeri naturali 1, 2, 3, ec. in luogo di $n$ somministra un dopo l' altro i numeri Bernoulliani. Ma la mia parmi più semplice, e perciò più facile da aversi a mente. Voi ne giudicherete. Desideroso di aver in qualche maniera soddisfatto alla vostra inchiesta chiudo senz' altro col salutarvi cordialmente.

OBLI-