RIFLESSIONI

CIRCA LA MEMORIA INTORNO LA SALITA DELLE MACCHINE AEREOSTATICHE NELL' ARIA

DI LEONARDO EULERO

FATTE DA GIROLAMO SALADINI

Ricevute il dì 29 Ottobre 1802.

Quando m' accinsi allo scoprimento delle leggi della salita delle Macchine Aereostatiche nell' aria, erami bensì noto che il grand' Eulero, se prestar debbasi fede a' fogli pubblici delle novelle giornaliere, vi meditasse anche esso, e che poco prima di sua morte ne tenesse discorso col Ch. Lexell; ma non sapeva che egli avesse lasciata cosa alcuna scritta su ciò; onde stesi la mia qualunque Memoria, che si ritrova nel primo volume degli Atti della Reale Accademia delle Scienze, e delle belle Lettere di Napoli, cui ho l'onore di appartenere in qualità di Socio pensionario. Senza consultare i pensamenti di questo incomparabile Matematico, che poi ho veduti nelle Memorie della R. Accademia delle Scienze di Parigi per l'anno 1781, ivi ho letto con somma mia soddisfazione in poche righe un' indicazione della soluzione del problema di cui discorriamo, che il figlio Alberto, trascrittala da una lastra di pietra Lavagna, su cui fu dal Ch. Autore delineata, volle presentare alla R. Accademia delle Scienze di quella Nazione, che sembra dover accettare con piacere tutto ciò, che risguarda il progresso d' una invenzione propriamente sua. Comecchè le produzioni degli uomini sommi sieno per lo più di tanta luce rivestite, che sembrar possa non ordinario coraggio l' intraprendere di maggiormente illustrastrarle, specialmente dove la dottrina e l'ingegno ne abbondi; tuttavia mi lusingo di non far cosa totalmente inutile, e da non essere per nissun conto gradita, se in un argomento intralciato che racchiude elementi non ben sicuri, e che sfugge le arti consuete dell' algebra, sviluppi i pensieri brevemente accennati dal Sig. Euler, e gli vada di mano in mano confrontando co' ripieghi, e co' risultati, che sono esposti nella Memoria sovraccennata, in cui trattai di questo argomento. Il testo dell' Autore si espone in lingua latina, come egli lo scrisse.

PROBLEMA

Sit Globi aereostatici radius $= a$, et pondus M, eritquo ejus volumen $= \frac{4}{3}\pi a^3$, denotante π peripheriam circuli, cujus diameter $= 1$. Sit altitudo columnae aereae $= k =$ 24000 ped. circiter, et si ponamus Globum pervenisse ad altitudinem (*fig.* 1) AM $= x$, erit pressio aeris $= e^{-\frac{x}{k}}$ (I).

Sit celeritas Globi in puncto M $= u$, & pondus Globi aerei $=$ N, ob superficiem Æmisphaerii $= \frac{\pi aa}{2}$, erit resistentia in hoc puncto M $= \frac{uu}{4g} \cdot \frac{\pi aa}{2} \cdot \frac{N}{\frac{4}{3}\pi a^3} = \frac{3N}{8a} \cdot \frac{uu}{4g}$, denotante g altitudinem lapsus gravium uno minuto secundo (II).

Principia Mechanica suppeditant hanc aequationem $2udu = \frac{4gdx}{M} \cdot P$, existente dx elemento altitudinis Mm, & P vi sollicitante, quae componitur ex pressione aeris, pondere globi, & resistentia, itaut sit $P = Ne^{-\frac{x}{k}} - M - \frac{3N}{8a} \cdot \frac{uu}{4g} \cdot e^{-\frac{x}{k}}$; unde fit $2udu = \frac{4gdx}{M}\left(Ne^{-\frac{x}{k}} - M - \frac{3N}{8a} \cdot \frac{uu}{4g}\, e^{-\frac{x}{k}}\right)$ sive $2udu = 4gdx\left(\frac{Ne}{M}^{-\frac{x}{k}} - M - \frac{3N}{8\alpha} \cdot \frac{uu}{4g}\, e^{-\frac{x}{k}}\right)$. Sit $\frac{N}{M} = \lambda$, erit $2udu + \frac{3\lambda}{8a} \cdot uue^{-\frac{x}{k}}\, dx = 4gdx\left(\lambda e^{-\frac{x}{k}} - 1\right)$, cujus aequationis integrale, posito $\frac{8a}{3\lambda} = b$ erit

$$uue^{\frac{x}{b}} = \int 4gdx\left(\lambda - 1 - \frac{\lambda x}{k}\right) e^{\frac{x}{b}},$$ quod ita repraesentetur

$$uue^{\frac{x}{b}} = 4\lambda g \int e^{\frac{x}{b}} dx\left(\frac{\lambda - 1}{\lambda} - \frac{x}{k}\right) = \frac{4\lambda g}{k}\int e^{\frac{x}{b}} dx\,(f - x),$$

existente $f = \frac{(\lambda - 1)k}{\lambda}$. Est vero $\int e^{\frac{x}{b}}\, dx\,(f - x) = b(b+f)\left(e^{\frac{x}{b}} - 1\right) - be^{\frac{x}{b}}\, x$. Ergo

$$uue^{\frac{x}{b}} = \frac{4\lambda g b}{k}\left[(b+f)\left(e^{\frac{x}{b}} - 1\right) - e^{\frac{x}{b}}\right]$$ unde fit

$uu =$

$uu = \frac{4\lambda g b}{k}\left[(b+f)(1-e^{-\frac{x}{b}}) - x\right]$ quae expressio determinat celeritatem Globi in quavis altitudine (III).

Pro determinanda altitudine maxima, ad quam globus pertingere potest, statuatur celeritas u, ejusque quadratum uu evanescere in puncto H, ponaturque altitudo AH $= h$, quae igitur definitur aequatione $(b+f)\left(1-e^{-\frac{x}{b}}\right) - h = 0$, ex qua fit $b+f = \frac{h}{1-e^{-\frac{h}{k}}} = \frac{h e^{\frac{h}{b}}}{e^{\frac{h}{b}}-1}$. Sit $f = nb$, erit $b+f = (n+1)b$, & quia h prae b est numerus valde magnus, sine sensibili errore statui poterit $e^{\frac{h}{b}} - 1 = e^{\frac{h}{b}}$, quo facto erit $b+f = b(n+1) = h$; ideoque altitudo maxima AH $= b(n+1)$; ubi notatur esse $b = \frac{8e}{3\lambda}$, & $n = \frac{3(\lambda-1)k}{8a}$, $\left[\text{ob}\left(\frac{\lambda-1}{\lambda}\right)k = f = nb = \frac{8an}{3\lambda}\right]$. Pro tempore ascensus aequatio $udx = dt$ praebet

$$dx = dt\sqrt{\frac{4\lambda g b}{k}} \times \sqrt{h\left(1-e^{-\frac{x}{b}}\right) - x},$$ denotante dt elementum temporis. Erit igitur $dt\sqrt{\frac{4\lambda g b}{b}} =$

$$\frac{dx}{\sqrt{h\left(1-e^{-\frac{x}{b}}\right) - x}}.$$ Ponamus $dt = \sqrt{\frac{k}{4\lambda g b}}\int\frac{dx}{\sqrt{h-x}}$,

 erit-

eritque integrando $t = \sqrt{\frac{k}{4\lambda g b}} \times \left(C - 2\sqrt{h - x}\right) =$ $\sqrt{\frac{k}{4\lambda g b}}\left(2\sqrt{h} - 2\sqrt{h - x}\right)$; unde colligitur tempus ascensus per spatium $AM = \sqrt{\frac{kh}{\lambda g b}}\left(1 - \sqrt{\frac{h - x}{h}}\right)$, & tempus totius ascensus erit $\sqrt{\frac{kh}{\lambda g b}}$. Pro determinanda altitudine ea F, ubi celeritas est maxima erit

$$d . \left[(b + f)\left(1 - e^{-\frac{x}{d}}\right) - x\right] . = 0;$$ ideoque

$$\frac{dx}{b}(b+f)\, e^{-\frac{x}{b}} = dx;$$ unde fit $\frac{b + f}{b} = e^{\frac{x}{b}}$. Consequenter $x = bl(b + f) - blb = bl(n + 1)$. Ergo $AF = bl(n+1)$. Hoc valore in expressione celeritatis substituto erit $uu = \frac{4\lambda g bb}{k}\left[(n+1)\left(1 - e^{-l\overline{n+1}}\right) - l(n+1)\right]$. Est vero $e^{-l(n+1)} = \frac{1}{n+1}$; ideoque $uu = \frac{4\lambda g bb}{k}[n - l(n+1)]$: ergo celeritas maxima in F erit $2b\sqrt{\frac{\lambda g}{k}}\,[n - l(n+1)]$, sive $2b\sqrt{\frac{\lambda n g}{k}}$, ob numerum n valde magnum.

Sit $a = 30$ ped., $\lambda = 5$, erit $b = 16$, $n = 1200$; unde fit altitudo maxima $AH = 19200$ ped., altitudo celeritati maximae respondens $AF = 112$ ped., celeritas maxima 64 uno minuto secundo, & tempus ascensus 10' 32".

AN-

ANNOTAZIONI

(I) Comecchè la Legge delle densità degli strati aerei dell' atmosfera causata da' pesi comprimenti non sia ancora se discorrasi di tutta l' altezza atmosferica, posta nel lume che si desidera, nè esente sia da gravissime difficoltà; impertanto l' esperienze le più esatte ci assicurano, che dalla superficie della Terra all'altezza di qualche miglio valga la ragion semplice de' pesi comprimenti, prescindendo da qualche alterazione, non già grande, alle volte indotta dal vario grado di calore che domina in diverse altezze: deducesi da ciò agevolmente, che le altezze atmosferiche sieno proporzionali alle differenze de' logaritmi de' numeri, che esprimono la densità dell' aria alla superficie della Terra, e la densità alla data altezza; a queste densità corrispondono le pressioni dell' atmosfera sopraincombente, a cui le altezze del mercurio nel Barometro si proporzionano; quindi saranno altresì le altezze atmosferiche proporzionali alla differenza de' logaritmi delle due sovraccennate pressioni, o delle due indicate altezze barometriche. Se si chiami perciò la densità dell' aria vicino Terra $= a$, e la densità variabile di qualunque altezza $= x$ se si disegni per Δ, sarà $\frac{la - l\Delta}{x}$ quantità costante; per la qual cosa se esperimentando troveremo in una altezza cognita, che diremo $= s$, la differenza de' logaritmi iperbolici delle due altezze barometriche alla superficie della Terra una, l' altra alla data altezza s, nominando questa seconda altezza barometrica Δ', otterremo l'equazione $\frac{la - l\Delta'}{s} = \frac{la - l\Delta}{x}$, da cui $x = \frac{s}{la - l\Delta'} \times (la - l\Delta)$. Come questa equazione discenda dalla condizione, che la densità dell' aria in varie altezze atmosferiche seguiti la ragione sempliplice de' pesi comprimenti, è stato da noi esposto nella citata Memoria sulla salita delle Macchine aereostatiche, che trovasi nel Tomo precedente degli Atti della R. Accademia di Napoli. Si faccia $\frac{s}{l\,a - l\,\Delta'} = k$, sarà $L\frac{a}{\Delta} = \frac{x}{k}$; onde $\Delta = ae^{\frac{-x}{k}}$; e posta $a = 1$; nasce $\Delta = e^{\frac{-x}{k}}$, espressione della densità dell' aria, o dell' altezza barometrica, o della pressione atmosferica nell' altezza x dataci dal Sig. Eulero.

Sia $\Delta' = a - 1$ e sia a numero intiero molto grande, dico che $l\,a - l\,\overline{a - 1} = L\frac{a}{a-1}$ sia prossimamente eguale ad $\frac{1}{a}$. Imperciocchè abbiamo [Compendio di Analisi Tomo 2.° Lib. 1.° Cap. 7.°] $Ly = 2\left[\frac{y-1}{y+1} + \frac{1}{3}\left(\frac{y-1}{y+1}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{y-1}{y+1}\right)^5 \text{ ec.}\right]$; onde sostituendo $\frac{a}{a-1}$ in luogo d' y, otterremo $L\frac{a}{a-1} = 2\left[\frac{1}{2a} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2a}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{2a+1}\right)^5 \text{ec.}\right]$; e perchè si suppone a numero grande, si potrà disprezzare l' unità in paragone di $2a$, come ancora i seguenti termini della serie in confronto del primo; dunque avremo prossimamente $L\frac{a}{a-1} = \frac{1}{a}$: e perciò $k = \frac{s}{La - L\Delta'} = as$. Nella sovraccennata Memoria reco un esattissimo, e celebratissimo esperimento fatto da M. De - Luc alle radici del monte Suleva. All' altezza di piedi parigini 74, 982 il mercurio nel Barometro calò precisamente una linea, quando alle radici del monte conservava l' altezza di pollici 29, ossia di linee 348., sarà pertanto in questo caso $a = 348$ ed $s = 74,982$ piedi parigini; onde sarà $as = 26000$ piedi parigini, che costituiranno il valore di k. Poichè $1 : a :: s : as$; os-

ossia una linea a trecento quarantotto , come 74, 982 piedi parigini a 26000 piedi della stessa misura ; sarà questa l' altezza di tutta l' atmosfera , se fosse densa , come la colonna aerea di 74, 982 piedi , cioè se l' atmosfera aerea conservasse fino alla più alta regione la densità , che ha vicino Terra ; E questo si è il senso , credo io , in cui il Sig. Eulero dice ,, *Sit altitudo columnae aereae* $= k$; che egli fissa di 24000 piedi , e che noi fissiamo di piedi parigini 26000 . Se i piedi 24000 fossero Renani , di cui si serve il Ch. A. nella sua Meccanica , allora l' altezza da lui stabilita sarebbe minore della nostra anche per questo capo nella ragione di 1000 : 1035 . Adoperando a dirittura la formola $\frac{s}{La - L\Delta'}$ senza modificazioni , l' esperienza di M. De - Luc dà similmente il coefficiente $k = 26000$ piedi parigini , come sopra .

Il Sig. Abate Frisi Matematico illustre nelle Memorie Enciclopediche di Bologna dell' anno 1783. N.° 38. riporta un' esperienza solenne fatta in Milano . Al piano della Città il mercurio nel Barometro si manteneva a pollici 27, 11 $\frac{1}{5}$; all' altezza di braccia 126 Milanesi il mercurio calò linee 3 $\frac{1}{5}$. Adunque se linee tre e un quinto d' altezza barometrica corrispondono a 126 braccia Milanesi di colonna aerea vicino Terra ; pollici 27, 11 $\frac{1}{5}$, ossia linee 335 $\frac{1}{5}$ porteranno braccia Milanesi 13198 $\frac{1}{2}$ di colonna aerea della stessa densità ; e perchè il braccio Milanese è $\frac{11}{6}$ prossimamente del piede parigino ; quindi braccia 13198 $\frac{1}{2}$ milanesi danno piedi parigini 24000 per il nostro coefficiente k . Se ci serviremo della formola $\frac{s}{la - l\Delta'}$, a dirittura troveremo gli stes-

stessi piedi 24000; onde adoperando l' uno, o l' altro metodo torna al medesimo.

Dalle Tavole del Sig. Lambert, e del P. Gregorio Fontana deduco il coefficiente k similmente di 24000 piedi parigini; ma da quelle del Sig. Bouguer sopra l' altezza de' monti Peruviani rilevasi questo coefficiente maggiore de' piedi 26000.

Ora io dico, che il diverso valore di k non può avere origine dalla diversa gravità specifica del mercurio. Sia l'altezza del mercurio al livello del Mare $= a$, e la gravità specifica di questo a quella d' un altro sia come $1 : n$; dovendo essere l' altezze di due cilindri di mercurio di diversa gravità specifica, e equiponderanti, reciproche alle specifiche gravità, sarà $\frac{a}{n}$ l' altezza del secondo mercurio; e se un cilindretto del primo mercurio abbia per altezza una linea, che chiamo $= 1$, l' altezza del cilindretto del secondo mercurio equiponderante sarà $\frac{1}{n}$. Se dunque il cilindretto del primo mercurio d' una linea d' altezza si equilibra con una colonna aerea $= s$, colla stessa si equilibrerà il cilindretto del secondo mercurio dell' altezza $\frac{1}{n}$; onde sarà $\frac{1}{n} : \frac{a}{n} :: 1 : a :: s : a.s = k$, come nell' ipotesi del primo mercurio.

La varietà adunque, che si osserva nel coefficiente k non può derivare che dalla diversa densità, e dalla maggiore o minore elasticità della colonna s, originate dal diverso stato dell'atmosfera, delle quali cose troppo lungo riuscirebbe quì un rigoroso esame. Se amiamo adunque d' attenerci ad un medio, non ci dobbiamo a mio giudizio scostare molto da' piedi parigini 26000 pel coefficiente k.

(II) Convengono li Meccanici, che la resistenza assoluta, tà, che soffre una superficie piana tutta immersa in un fluido, per cui viaggi con direzione a se stessa perpendicolare, eguagli il peso d' un solido, che abbia per base la superficie anzidetta, e che sia della stessa densità del fluido; ma non convengono circa l'altezza, che a questo solido si dee assegnare; alcuni certamente dottissimi, tra' quali il Ch. A., vogliono che eguagli l' altezza, da cui dee scendere un grave, perchè quella velocità acquisti che ha la superficie viaggiante, altri similmente dottissimi la stabiliscono doppia. Noi ci siamo uniti a' secondi in vigore d' una dimostrazione che rechiamo nella nostra Memoria, e che viene confermata dagli esperimenti esattissimi del Sig. Bossut, il quale rigetta l' opinione de' primi come affatto erronea; chiamata pertanto la velocità della superficie, ossia lo spazio percorso in un secondo $= u$, e l' altezza per cui un grave scende in un secondo $= g$, onde sia la velocità acquistata da un grave in un secondo $= 2g$, dovendo essere per le leggi del Galileo $4gg : uu :: g$ all'altezza della velocità u acquistata da un grave; sarà questa $= \frac{uu}{4g}$; e perciò l'altezza del nostro solido sarà $\frac{uu}{4g}$ secondo il Sig. Eulero; e secondo noi sarà $\frac{uu}{2g}$.

Se una superficie che sia in quiete, venga percossa da un fluido con direzione ad essa perpendicolare, la pression nata da tal percussione, e che soffre la superficie si misura nella stessa maniera; poichè questi due casi si considerano da' Meccanici come lo stesso.

Abbiamo inoltre, che la percussione perpendicolare contro la superficie dell' Emisfero (fig. 2) TRK quando suppongasi stesa in un piano, sia quadrupla di quella, che realmente soffre una sfera investita dallo stesso fluido in cui sia immersa, e perciò poste tutte le altre cose le stesse, la resistenza che soffre una sfera che viaggia per un fluido, è eguale a quella che soffrirebbe la metà del circolo massimo della sfera, se viaggiasse per lo stesso fluido colla stessa celerità, e con direzione a se medesima normale. Darò di ciò una breve dimostrazione analitica. La direzione del moto della sfera sia da C verso R. Il latercolo infinitesimo AM della periferia del circolo massimo TRK soffre una resistenza che, in confronto di quella che soffrirebbe, se perpendicolarmente percuotesse il fluido, vien diminuita per tre capi nella stessa ragion del seno tutto al seno dell' angolo d' inclinazione MAO, fatto dal latercolo MA colla direzione del moto; perchè in primo luogo la quantità del fluido che percuote, diminuisce in questa ragione di MA : MO, come è facile a comprendere; in secondo luogo la percussione per la direzione parallela ad RC, a quella che si esercita perpendicolarmente contro MA stà come MA : MO, e finalmente la percussione perpendicolare ad MA dirigendosi per la direzione AC, e contrastando con una eguale per la direzione BC, si diminuisce nella ragione stessa di MA : MO che è quella di AC : CQ; chiamato pertanto il raggio $CA = a$, $CQ = x$, sarà la percussione che soffre MA, ossia la forza che la spinge per direzione parallela ad $RC = \frac{x^3}{a^3}$; si sa inoltre, che $AR = \sqrt{2a^2 - 2ax}$ è il raggio del circolo eguale alla porzione di superficie sferica ARB, la quale perciò si esprimerà per $2\pi . \overline{aa - ax}$; denotando $1 : \pi$ la ragione del diametro alla periferia; onde la zonetta ABMN si esprimerà per $- 2 \pi a dx$; la quale moltiplicata per $\frac{x^3}{a^3}$, ed integrata dà l' espressione della percussione ossia della resistenza sofferta dal segmento sferico $ARB = C - \frac{\pi x^4}{2aa}$; e perchè la resistenza in R è eguale a zero, cioè quando $x = a$; sarà pertanto la resistenza indeterminata $= \frac{\pi}{2aa} \times (a^4 - x^4)$; e quando sia $x = o$, che è il il caso della resistenza di tutto l'Emisfero TRK, sarà essa $= \frac{\pi a a}{2}$, che è appunto la metà del circolo massimo della sfera. Questa si è la misura della resistenza che nasce dalla figura sferica abbracciata dal Ch. A., e indicata con quelle parole „ *ob superficiem Emisphaerii* $= \frac{\pi a a}{2}$; nè perchè la superficie dell' Emisfero sia eguale $\frac{\pi a a}{2}$, il che è falso; essendo essa eguale a $2 \pi a a$; ma perchè si dee ridurre a una superficie piana $= \frac{\pi a a}{2}$. Tale è il risultato della teoria, che prescinde da molte cause disturbatrici; specialmente dall' inciampo del fluido che viene ad urtare la sfera, con quello che dopo l' urto scorre a' fianchi della sfera stessa per farsi strada; dal che facilmente si arguisce, che la resistenza dataci dalla teoria sia più grande del dovere; ed in fatti consultando le celebratissime esperienze del Cavaliere De Borda tanto stimate dallo stesso Bossut, si ritrova la resistenza di cui parliamo, eguale a $\frac{2}{5}$ del cerchio massimo, cioè un decimo più piccola di quella dataci dalla teoria. Non scostandosi moltissimo l' esperienza dalla teoria, di passaggio notiamo che essa non sia del tutto d' abbandonarsi, come alcuni pretendono specialmente negli urti obliqui de' fluidi contro i solidi. Non si tien conto della tenacità dell'aria, nè della frizione, poichè esse nel presente caso sono disprezzabili, e con facilità si possono computare quando si voglia.

Sia ora il peso della sfera, se fosse tutta d' aria egualmente densa che quella, in cui è immersa $= N$; essendo il volume della sfera $= \frac{4}{3} \pi a^3$; sarà $\frac{N}{\frac{4}{3} \pi a^3}$ la densità, ossia la gravità specifica dell' aria.

Da tutte queste premesse s' inferisce, che il cilindro, il cui peso eguaglia la resistenza sia espresso per $\frac{uu}{4g} \cdot \frac{\pi aa}{2} \cdot \frac{N}{\frac{4}{3}\pi a^3} = \frac{3N}{8a} \times \frac{uu}{4g}$, e ciò in una determinata altezza AM, dove la densità dell' aria sia $\frac{N}{\frac{4}{3}\pi a^3}$. Per una altezza poi indeterminata x si supponga che $\frac{N}{\frac{4}{3}\pi a^3}$ sia quella, che ha l'aria prossima alla superficie della Terra, cioè quando sia $x = 0$. Essendo $e^{-\frac{x}{k}}$ l' espressione indeterminata della densità, come sopra abbiamo veduto; sarà $e^{-\frac{0}{k}} = 1 : e^{-\frac{x}{k}} :: \frac{N}{\frac{4}{3}\pi a^3} : \frac{Ne^{-\frac{x}{k}}}{\frac{4}{3}\pi a^3}$ che sarà la densità all' altezza $= x$; dunque finalmente l' espressione della resistenza indeterminata sarà $\frac{3N}{8a} \times \frac{uu}{4g} \times e^{-\frac{x}{k}}$. Seguendo il nostro metodo il cilindro ossia la resistenza si esprime per $\frac{uu}{2g} \cdot \frac{2naa}{5} \cdot \frac{N}{\frac{4}{3}\pi a^3} e^{-\frac{x}{k}}$; cioè tre quinti più grande di quella del Sig. Eulero.

(III) La gravità alla superficie della Terra è l' unità de' Meccanici, a cui l' altre forze acceleratrici paragonano. Es-

Essa viene espressa con quella celerità, che acquista un grave liberamente cadendo vicino Terra in un secondo, ossia pel doppio di quello spazio percorso da un grave liberamente scendendo verso Terra in un secondo, che si sa essere trenta piedi parigini e due pollici; $2g$ disegnerà un tale spazio, cioè la misura della gravità vicino la superficie della Terra. Se dunque la gravità si dica $= 1$, e qualunque forza $= P$; sarà $2gP$ la velocità acquistata da un corpo in un secondo sollecitato dalla forza P; ossia sarà $2gP$ il doppio spazio di quello, per cui la forza P sollecita il corpo in un secondo; sarà pertanto $2gP$ l' espressione della forza P confrontata colla gravità vicino la superficie della Terra. Ora abbiamo dalle stesse leggi Galileane, che la forza acceleratrice moltiplicata nel differenziale dello spazio percorso in vigore d' essa dal corpo, sia proporzionale alla massa moltiplicata nella metà del differenziale del quadrato della celerità; sarà perciò, chiamata la massa M, $2gPdx = Mudu$; e $4gPdx = 2Mudu$, come pone il Ch. A.

L' Equazione differenziale a cui giunge il Sig. Eulero è la seguente $2udu + \frac{uu}{b} e^{-\frac{x}{k}} dx = 4g\,dx \left(\lambda e^{-\frac{x}{k}} - 1\right)$: per separare le indeterminate opero così; fo $uu = y$, $2udu = dy$, ed $e^{-\frac{x}{k}} = z$, onde $-\frac{x}{k} = lz$, e $dx = -\frac{k\,dz}{z}$; sostituendo avremo $dy - \frac{k}{b} y\,dz + 4g\lambda k\,dz - 4gk\frac{dz}{z} = 0$, e $\frac{dy}{y} - \frac{k}{b}dz = 4gky^{-1} \times \left(\frac{dz}{z} - \lambda dz\right)$.

Si ponga $-\frac{k}{b}dz = \frac{dr}{r}$; onde $-\frac{kz}{b} = lr$; sarà pertanto

$\frac{dy}{y}$

$\frac{dy}{y} + \frac{dr}{r} = 4gky^{-1}\,dz\left(\frac{1}{z} - \lambda\right)$. Sia $\frac{dy}{y} + \frac{dr}{r} = \frac{dt}{t}$, onde $t = yr$, sarà $\frac{dt}{t} = 4gk\frac{r}{t}\,dz\left(\frac{1}{z} - \lambda\right)$; ossia $dt = 4gb\,dr\left(\frac{k}{blr} + \lambda\right)$; ed integrando sarà $t = 4gk\int\frac{dr}{lr} + 4gb\lambda r + C$. L' integrazione adunque della presente equazione differenziale dipende dall' integrazione della formola $\frac{dr}{lr}$; il che avvenne anche a noi, come vedesi nella nostra Memoria; ivi osservammo che fin ora gli Algebristi non sanno ricavare profitto da questa formola a motivo delle quantità infinite, che racchiude il suo integrale; onde fummo costretti a trascurare de' termini per rendere l' equazione di qualche utilità.

Dall' integrale, che dà il Sig. Eulero rilevasi, che anche egli abbia trascurato alcune quantità, che procureremo di rintracciare. La quantità esponenziale $e^{-\frac{x}{k}}$, come dimostrasi nel Compendio d' Analisi Tomo 2.° (n. 7) si scioglie in questa serie $1 - \frac{x}{k} + \frac{x^2}{2k^2} - \frac{x^3}{2.3k^3}$ ec.; se dunque sia k numero molto grande in paragone di x, sara $e^{-\frac{x}{k}} = 1 - \frac{x}{k}$ prossimamente, anzi quando fia bisogno si potrà disprezzare $\frac{x}{k}$ al confronto dell' unità; con questi principii l' equazione differenziale $2udu + \frac{1}{b}uudx\,e^{-\frac{x}{k}} =$

$4gdx$

$4g\,dx\left(\lambda e^{-\frac{x}{k}}-1\right)$ si potrà ridurre prossimamente a $2udu+\frac{1}{b}uudx=4g\lambda dx-4g\lambda\frac{xdx}{k}-4gdx$; la quale integro così; fo $uu=zt$; onde $2udu=zdt+tdz$; e sostituendo $zdt+tdz=4g\lambda dx-4g\lambda\frac{xdx}{k}-4gdx-\frac{tzdx}{b}$. Suppongo $-\frac{tzdx}{b}=tdz$, onde sia $-\frac{dx}{b}=\frac{dz}{z}$, e $z=e^{-\frac{x}{b}}$; sarà in conseguenza di ciò $zdt=4g\lambda dx-4g\lambda\frac{xdx}{k}-4gdx$, e $dt=4gdx\left(\lambda-1-\frac{\lambda x}{k}\right)e^{\frac{x}{b}}$; onde $t+C=uue^{\frac{x}{b}}+C=\int 4gdx\left(\lambda-1-\frac{\lambda x}{k}\right)e^{\frac{x}{b}}$, che è l'integrale del Ch. A.

Integrando attualmente sarà $uue^{\frac{x}{b}}+C=4\lambda gbe^{\frac{x}{b}}-4gbe^{\frac{x}{b}}-\frac{4g\lambda b}{k}(x-b)e^{\frac{x}{b}}$, e posto $u=0$, quando sia $x=0$ sarà $C=4\lambda gb-4gb+\frac{4g\lambda b^2}{k}$; onde $uu+4gbe^{-\frac{x}{b}}\left(\lambda-1-\frac{\lambda b}{k}\right)=4gb\left(\lambda-1-\frac{\lambda x}{k}+\frac{b\lambda}{k}\right)$, e posto $\frac{\lambda-1}{\lambda}k=f$ sarà $uu=\left[\frac{4gb\lambda}{k}\times(f+b)\left(1-e^{-\frac{x}{b}}\right)-x\right]$ appunto come il Sig. Eulero.

Ognu-

Ognuno comprende, che questa equazione abbia soltanto luogo, e unicamente per una certa tal quale approssimazione, quando l'altezza x sia assai picciola per riguardo a k; ma se x sia considerabile, allora si potrà con fondamento dubitare delle conseguenze, che indi si deducono. Ed in fatti nell' esempio che egli reca, ritrova di piedi 112 l' altezza dove termina l' accelerazione, e la massima celerità, che ivi ha il globo porta 64 piedi per secondo; se ora le formole da noi stabilite nella citata Memoria si conformino ne' coefficienti a quelle del Sig. Eulero, cioè se si faccia $\frac{1}{c} = k = 24000$ piedi, e non a 26000; e $\frac{2\,C}{5}$ si trasmuti in $\frac{C}{2}$, come ancora $\frac{uu}{U}$ in $\frac{uu}{2\,U}$, la nostra formola dell' altezza per la massima celerità $\frac{1}{c}\,L\,\frac{1}{1 - \frac{1}{k}\,L\,k\,\frac{na-m}{m}}$ da' piedi 136 che è maggiore quasi d' un sesto di quella del Sig. Eulero. Si noti, che in questa formola na è lo stesso dell' N, ed m dell' M del Sig. Eulero, ed il $k = 1500$.

La formola poi nostra della massima celerità è $\sqrt{\frac{na-m}{ga}} = \sqrt{\frac{N-M}{ga}}$; ma abbiamo $\frac{N}{M} = \lambda = 5$; dunque $M = \frac{N}{5}$, e perciò $N - M = \frac{4\,N}{5} = \frac{4}{5} \times \frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times 27000$ piedi cubici d' aria della densità $= 1$; $ga = \frac{11\,.\,15}{7}$ piedi cubici d' aria della stessa densità, dunque $\frac{na-m}{m} = 3840$, e $\sqrt{\frac{na-m}{ga}} = u = 62$ piedi lineari per la velocità massima, che è minore di due piedi di quella del Sig. Eulero.

Se

Se in picciole altezze i risultati del Sig. Eulero non differiscono gran fatto da' nostri, il contrario avviene quando si tratti di altezze maggiori, e non disprezzabili al paragone di $k = 24000$ piedi.

Si vegga ciò nella altezza massima a cui giunge il globo. Secondo la determina il Ch. A. essa è di piedi 19200; la nostra formola per questa altezza è $\frac{1}{c} L \frac{na}{m}$, e sostituendo le specie del Sig. Eulero si trasmuterà in $k L \frac{N}{M}$, ossia pel suo esempio, piedi $24000 \times L.5$. Essendo il logaritmo iperbolico di $5 = 1,609437$; fatta la moltiplicazione nascono piedi 39000 in circa per la massima altezza, cioè più del doppio dell' Euleriana.

Nè tampoco il risultato del Sig. Eulero si può conciliare co' suoi stessi principii co' quali s' accorda benissimo il nostro. Avvegnachè non havvi dubbio alcuno, che il globo non debba salire almeno a quella altezza, in cui la gravità specifica dell' aria e la sua si eguagliano; nè più basso potrebbe fermarsi sicuramente. Essendo pertanto N il peso del globo se fosse tutto d' aria, come quella alla superficie della Terra, ed M il peso del globo, e supponendo il Sig. Eulero $\lambda = \frac{N}{M} = 5$, sarà M un quinto d' N, cioè sarà la gravità specifica del globo un quinto della gravità specifica dell' aria vicino Terra; dunque dovrà indubitatamente il globo giungere all' altezza, dove l' aria sia cinque volte più rara di quella alla superficie terrestre. Denotando $e^{-\frac{x}{k}}$ la pressione dell' atmosfera all' altezza x, come pone il Sig. Eulero, ed essendo le densità aeree proporzionali alle pressioni, sarà nel presente caso $e^{-\frac{x}{k}} = \frac{1}{5}$ per la massima altezza; e rie risoluta l' equazione si ritrova essa $= kls = 39000$ in circa, come trovammo col nostro metodo.

Egli è per altro vero, che se il numero $\lambda = \frac{N}{M}$ sia di poco maggiore dell' unità, vale a dire se il globo pesi poco meno d' un egual volume di quell' aria, che abbiamo prossima alla Terra; in tal caso la formola nostra può ridursi prossimamente a quella del Sig. Eulero; imperciocchè ridotta la nostra formola a $kL\lambda$, servendoci cioè delle specie del Sig. Eulero, e fatto $\lambda = 1 + \omega$, disegnando ω una picciola frazione; dovendo essere $L\lambda = 2 \times \left(\frac{\lambda - 1}{\lambda + 1} + \frac{1}{3}\left(\frac{\lambda - 1}{\lambda + 1}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{\lambda - 1}{\lambda + 1}\right)^5 \ldots\right)$ fatta la sostituzione avremo $L\lambda = 2\left(\frac{\omega}{2+\omega} + \frac{1}{3}\left(\frac{\omega}{2+\omega}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{\omega}{2+\omega}\right)^5 \ldots\right)$ $= \omega$ per essere ω quantità assai picciola; onde $kL\lambda = \omega k$ prossimamente. Ora abbiamo la formola del Sig Eulero per la massima altezza $= f + b = \frac{\lambda - 1}{\lambda} k + b$, la quale, se sia $\lambda = 1 + \omega$, si trasmuta in $\omega k + b$ prossimamente; e perchè b è numero picciolissimo in riguardo a k, perciò $f + b$ non differisce molto da ωk.

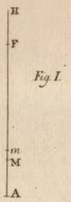
Nell' esempio della nostra Memoria abbiamo $N = 453$, $M = 337$, onde $\lambda = \frac{453}{337} = 1 + \frac{116}{337}$; e perciò $\omega = \frac{116}{337}$, e $\omega k = \frac{116}{337} \times 24000 = 8000$ piedi in circa; e $k\,L\,\frac{453}{337}$ dà piedi 7000 in circa.

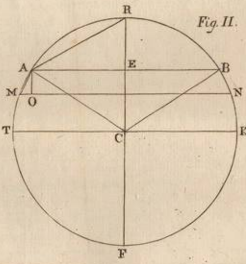
Se in vece di $k = 24000$ si ponga $= 26000$, come da noi è stato stabilito, ritroveremo speditamente l' altezza mas-

massima della salita in Tese parigine, prendendo nelle tavole volgari il logaritmo di $\frac{N}{M}$, come nel nostro esempio sarebbe di $\frac{453}{337}$, in decime millesime; poichè le quattro cifre esprimenti il logaritmo volgare in decime millesime, indicheranno il numero delle Tese per la massima altezza; con questo metodo ritroviamo pel nostro esempio, 1284 Tese di massima altezza ossia piedi parigini 7704: *veggasi l'annotazione 1.ª*

Alla massima altezza da noi stabilita incontrasi l' aria di tale specifica gravità, che eguaglia quella della Macchina aereostatica; onde avviene che la salita sua sia uno di quei prodigiosi moti ritardati della natura, in cui nel tempo stesso estinguesi celerità e forza; perloche il globo giunto placidamente alla regione aerea adattata al suo peso, ivi tranquillamente si ferma senza essere sottoposto a moleste verticali oscillazioni; le quali cose sono state da noi dimostrate nella citata Memoria. Eccoci al termine delle nostre qualunque riflessioni circa la risoluzione ultima probabilmente tra le innumerabili, che posero sul capo del grande Eulero corona di gloria immortale. Abbiamo non senza qualche compiacenza veduto in molte cose convenire con noi; dove avviene altrimenti, temiamo sommamente un qualche vizio nelle traccie che seguimmo; forse ancora l' Euleriana compendiosa risoluzione attendeva l' ultima mano dell' illustre Autore.

Tutte le risoluzioni da me fin quì vedute, e la bellissima stessa del Sig. Meusnier, sono confinate tra' limiti d' industriose approssimazioni per le difficoltà, che s' incontrano nella $\int \frac{dx}{lx}$, a cui finalmente sempre si arriva, qualunque strada tengasi. Se esse si sapranno una volta superare dagli


H
F
Fig. I.
m
M
A


R
Fig. II.
A
E
B
M
O
N
T
C
K
F

Algebristi, maggiore esattezza otterremo nelle determinazioni di un Problema, che potrebbe interessare oltre la volgare credenza.

SU

(a) Veggasi la mia Memoria intorno ai Globi Aereostatici stampata in Bologna l'Anno 1800, ed il *Saggio sopra la Teoria-pratica delle Macchine Aereostatiche*, stampato in Bologna lo stesso anno.