MEMORIA

SOPRA UN PROBLEMA STEREOTOMICO

Di Gianfrancesco Malfatti

Ricevuta il dì 4. Ottobre 1802.

Dato un Prisma retto triangolare di qualunque materia come di marmo, cavare da esso tre Cilindri dell' altezza del Prisma e della maggior grossezza possibile correspettivamente, e in conseguenza col minor avanzo possibile di materia avuto riguardo alla voluta grossezza.

Vi sono in Geometria alcuni problemi, la soluzione analitica de' quali non si può presentare senza tedio del lettore attesa la lunghezza e l' improbità de' calcoli, ai quali ha dovuto soggiacere il Geometra nella soluzione del suo problema; laddove dopo aver conosciuto il vero risultato, convertendo l' analisi in sintesi simbolica, ed il problema in teorema, succede parecchie volte che si possa per una via più agevole e piana dare di esso una comoda dimostrazione. Di questa specie è l' enunziato Problema che mi fu proposto non ha guari, e che mi parve sul principio di facile soluzione, osservando che esso riducevasi alla inscrizione di tre circoli nei due triangoli delle basi parallele del Prisma, cosicchè ciascun de' circoli toccasse gli altri due ed insieme due lati del triangolo. Intrapresa per tanto la soluzione di questo secondo Problema, mi vidi contro ogni mia aspettazione ingolfato in prolissi calcoli e scabrose formole, atte a stancar la pazienza d' un uomo meno di me ostinato. Superata però la difficoltà e avuti de' risultati assai semplici, tentai, cangiando il Problema in Teorema, di aprirmi una via più comoda per la dimostrazione; ed ecco come vi son riuscito.

Il triangolo proposto sia ABV: divido per metà gli angoli di questo triangolo colle rette AC, BC, VC. È noto che C è il centro di un circolo inscritto al triangolo che suppongo abbia i punti di contatto in I, L, M, cosicchè diventino i raggi CI, CL, CM ai lati perpendicolari. Essendo gli angoli attorno al punto C eguali a quattro retti, sarà la somma degli angoli ACI, BCI, VCL eguale a due retti. In oltre diventa AI tangente dell' angolo ACI, BI tangente dell'angolo BCI, e finalmente VL tangente dell'angolo LCV; e siccome l' angolo LCV è eguale a due retti meno la somma degli angoli ACI, BCI, chiamato il raggio CI del circolo inscritto $= r$, la tangente $AI = s$, l'altra tangente $BI = t$, e la terza $VL = u$, le dottrine Trigonometriche ci somministrano l' espressione di (1) $u = \frac{r^2 (s+t)}{st - r^2}$. Da tale Teorema risulta $r^2 (s+t) = stu - r^2 u$, cioè $r^2 (s+t+u) = stu$, onde, poichè $s+t+u$ è eguale alla metà del perimetro del triangolo, sarà $s+t+u = \frac{stu}{r^2}$ (2). Dal Teorema Trigonometrico enunziato discendono più corollarj. Nel precedente t (1). Passando ai quadrati nasce $\frac{r^4 s^2 + 2r^4 st + r^4 t^2}{s^2 t^2 - 2r^2 st + r^4} = u^2$, e quindi $r^2 + \frac{r^4 s^2 + 2r^4 st + r^4 t^2}{s^2 t^2 - 2r^2 st + r^4} = r^2 + u^2$, ovvero $r^2 s^2 t^2 - 2r^4 st + r^6 + r^4 s^2 + 2r^4 st + r^4 t^2 = r^2 \frac{(s^2 t^2 + r^2 s^2 + r^2 t^2 + r^4)}{(st - r^2)^2} = r^2 + u^2 = \frac{r^2 (r^2 + s^2)(r^2 + t^2)}{(st - r^2)^2}$; e quindi $\sqrt{r^2 + u^2} = r \frac{\sqrt{r^2 + s^2} . \sqrt{r^2 + t^2}}{st - r^2}$, ossia $\sqrt{r^2 + s^2} \times \sqrt{r^2 + t^2} = \frac{(st - r^2)\sqrt{r^2 + u^2}}{r}$ (3).

Es-

Essendo $(s+t)^2 = \frac{(st-r^2)^2 u^2}{r^4}$, ovvero $s^2+t^2 = \frac{(st-r^2)^2 u^2}{r^4} - 2st$, si levi da una parte e dall'altra il quadrato u^2, e nasce $s^2+t^2-u^2 = \frac{(st-r^2)^2 u^2}{r^4} - 2st - u^2 = \frac{s^2 t^2 u^2}{r^4} - \frac{2stu^2}{r^2} + u^2 - 2st - u^2$; finalmente dopo le riduzioni (4) $s^2+t^2-u^2 = \frac{s^2 t^2 u^2}{r^4} - \frac{2st^2 u^2}{r^2} - 2st$. Se si prende per date le tangenti s, u, e si vogli l' espressione di t per s, u, basterà nella formola (1) cangiare u in t e t in u. Così se si vogliano date le tangenti t, u coll'espressione di s per t, u, nella suddetta formola (1) si farà il cangiamento reciproco di s in u, onde avremo $t = \frac{r^2(s+u)}{su-r^2}$; $s = \frac{r^2(t+u)}{tu-r^2}$; egual conversione di simboli si faccia nelle formole de' numeri (3), (4), e risulterà (5), $\sqrt{r^2+s^2}.\sqrt{r^2+u^2} = \frac{(su-r^2)\sqrt{r^2+t^2}}{r}$;

(6) $\sqrt{r^2+u^2}.\sqrt{r^2+t^2} = \frac{(tu-r^2)\sqrt{r^2+s^2}}{r}$; e praticando gli stessi cangiamenti nella formola (4), avremo

$$(7).\ s^2+u^2-t^2 = \frac{s^2 t^2 u^2}{r^4} - \frac{2st^2 u}{r^2} - 2su;$$

$$(8).\ t^2+u^2-s^2 = \frac{s^2 t^2 u^2}{r^4} - \frac{2s^2 tu}{r^2} - 2tu.$$

Premessi questi risultati trigonometrici, suppongo che AP $= m$, BQ $= n$, VR $= p$ siano le porzioni nei due lati AB, AV dalli estremi delle quali P, Q, R, eccitate le perpendicolari PK, QO, RS, che incontrano le linee AC, BC, VC ne' punti K, O, S, determinino i raggi PK $= x$, QO $= y$, RS $= z$ dei circoli che si toccano soddisfacendo alle proposte condizioni del Problema. Si congiungano i punti K, O colla retta KO, e dal punto O sino al raggio KB si guidi ON parallela al lato AB. È chiaro dover essere KO egua-

eguale alla somma de' raggi KP, OQ, ossia $KO = x + y$. In oltre diventa KN eguale alla differenza de' medesimi raggi KP, OQ, cioè $KN = x - y$. Egli è forza pertanto che sia $ON = 2\sqrt{xy}$, perchè la somma de' quadrati KN, ON si fa eguale al quadrato di $x + y$, cioè eguale al quadrato di KO. Ma perchè ON è eguale a PQ, e PQ è eguale ad AB meno AP meno BQ, ossia eguale ad AI più BI meno AP meno BQ, eguale $s + t - m - n$, dovrà valere questa prima equazione (a) $2\sqrt{xy} = s + t - m - n$. Con costruzioni simili, combinando i cerchj de' raggi KP, RS, e così i cerchj de'raggj OQ, RS, troveremo dover valere queste due altre equazioni.

(b) $2\sqrt{xz} = s + u - m - p$. ($c$) $2\sqrt{yz} = t + u - n - p$. Ora io dico che se faremo (d) $2m = s + t + u - r + \sqrt{r^2 + s^2} - \sqrt{r^2 + t^2} - \sqrt{r^2 + u^2}$.

(e) $2n = s + t + u - r + \sqrt{r^2 + t^2} - \sqrt{r^2 + s^2} - \sqrt{r^2 + u^2}$.

(f) $2p = s + t + u - r + \sqrt{r^2 + u^2} - \sqrt{r^2 + s^2} - \sqrt{r^2 + t^2}$,

sarà soddisfatto pienamente alle tre suddette equazioni (a),(b),(c).

Cominciamo dal verificare coi nostri valori la prima equazione (a), si uniscano insieme i due valori di m e di n, e risulta $2m + 2n = 2s + 2t + 2u - 2r - 2\sqrt{r^2 + u^2}$, ovvero $m + n = s + t + u - r - \sqrt{r^2 + u^2}$, e quindi $s + t - m - n = r - u + \sqrt{r^2 + u^2}$. Con simile discorso proveremo risultare dai nostri valori $s + u - m - p = r - t + \sqrt{r^2 + t^2}$, $t + u - n - p = r - s + \sqrt{r^2 + s^2}$. Nei valori di m, n invece di $s + t + u$ porremo l' equivalente $\frac{stu}{r^2}$ (2), e per comodo fatto $\frac{stu}{r^2} - r = A$, $\sqrt{r^2 + s^2} = S$, $\sqrt{r^2 + t^2} = T$, $\sqrt{r^2 + u^2} = V$, diventa $2m = A - V + S - T$, $2n = A - V - (S - T)$. Si moltiplichino insieme queste due equazioni, e avremo $4mn = (A - V)^2 - (S - T)^2 = A^2 + V^2 - S^2 - T^2 - 2AV + 2ST$.

I pri-

I primi quattro termini costituiscono la parte razionale dell' equazione, gli altri due la parte irrazionale. Rimessi pertanto nella prima i valori di A, V, S, T, ci nasce $A^2 + V^2 - S^2 - T^2 = \frac{s^2 t^2 u^2}{r^4} - \frac{2stu}{r} + r^2 + r^2 + u^2 - r^2 - s^2 - r^2 - t^2 = \frac{s^2 t^2 u^2}{r^4} - \frac{2stu}{r} + u^2 - s^2 - t^2 - \frac{s^2 t^2 u^2}{r^4} + \frac{2stu^2}{r^2} + 2st\,(4) = -\frac{2rstu + 2stu^2 + 2r^2 st}{r^2} = \frac{st}{r^2}(-2ur + 2u^2 + 2r^2)$.

La parte irrazionale colla introduzione de' valori di A, S, T diventa $(2stu + 2r)\sqrt{r^2+u^2} + 2\sqrt{r^2+s^2}.\sqrt{r^2+t^2} = (-2stu + 2r)\sqrt{r^2+u^2} + \frac{2(st - r^2)\sqrt{r^2+u^2}}{r}\,(3) = \frac{(-2stu + 2rst)}{r^2}\sqrt{r^2+u^2}$.

Quindi nasce, moltiplicando l' equazione per $\frac{r^2}{st}$; $\frac{4r^2 mn}{st} = -2ru + 2u^2 + 2r^2 (-2u + 2r)\sqrt{r^2+u^2} = \left(\overline{(r-u) + \sqrt{r^2+u^2}}\right)^2$. Ma sta AI : IC :: AP : PK; BI : IC :: BQ : QO; ovvero analiticamente $s : r :: m : x = \frac{rm}{s}$; $t : r :: n : y = \frac{rn}{t}$, che dà $xy = \frac{r^2 mn}{st}$, e $4xy = \frac{4r^2 mn}{st}$. Sarà quindi $4xy = \left(r - u + \sqrt{r^2+u^2}\right)^2$, e perciò $2\sqrt{xy} = r - u + \sqrt{r^2+u^2} = s + t - m - n$. Il che si dovea dimostrare.

Passiamo ora a verificare che coi posti valori si ottien l' equazione $2\sqrt{xz} = s + u - m - p$. Essendo $2m = s + t + u - r + \sqrt{r^2+s^2} - \sqrt{r^2+t^2} - \sqrt{r^2+u^2}$. $2p = s + t + u - r + \sqrt{r^2+u^2} - 2\sqrt{r^2+s^2} - \sqrt{r^2+t^2}$, sarà $2m + 2p = 2s + 2t + 2u - 2r - \sqrt{r^2+t^2}$ cioè $m + p = s + t + u - r - \sqrt{r^2+t^2}$, e però $s + u - m - p = r - t + \sqrt{r^2+t^2} = 2\sqrt{xz}$. Per provare anche la verità di questa equazione, servendosi de' superiori simboli majuscoli, sa-

sarà $2m = A + S - T - V$, $2p = A + V - S - T$ cioè: $2m = A - T + S - V$, $2p = A - T - (S - V)$. Colla moltiplicazione si ottiene $4mp = A^2 + T^2 - S^2 - V^2 - 2AT + 2SV$ $= \frac{s^2 t^2 u^2}{r^4} - \frac{2stu}{r} + r^2 + r^2 + t^2 - r^2 - s^2 - r^2 - u^2 =$ $\left(\frac{2stu}{r^2} - 2r\right)\sqrt{r^2+t^2} + 2\sqrt{r^2+s^2}.\sqrt{r^2+u^2} = \frac{s^2t^2u^2}{r^4}$ $- \frac{2stu}{r} - \frac{s^2t^2u^2}{r^4} + \frac{2st^2u}{r^2} + 2su(7) - \left(\frac{2stu}{r^2} + 2r\right)$ $\sqrt{r^2+t^2} + \frac{2us - 2r^2}{r}\sqrt{r^2+t^2} = \frac{su}{r^2}\Big(-nrt + 2t^2 + 2r^2$ $- (2t + 2r)\sqrt{r^2+t^2}\Big) = \frac{su}{r^2}\left(r - t + \sqrt{r^2+t^2}\right)^2$, da cui si cava $\frac{4r^2mp}{su} = 4xz = \left(r - t + \sqrt{r^2+t^2}\right)^2$ cioè $2\sqrt{xz} = r - t + \sqrt{r^2+t^2} = s + p - x - z$. In simil maniera ragionando, coll' uso dei valori di n, p ritroveremo verificarsi la terza equazione $2\sqrt{yz} = r - s + \sqrt{r^2+s^2}$. La pratica poi per determinare la grandezza delle quantità AP, BQ, VR che rendono noti i raggi dei circoli ricercati del Problema, è agevolissima. Imperciocchè essendo $2m = s + t + u - r + \sqrt{r^2+s^2} - \sqrt{r^2+t^2} - \sqrt{r^2+u^2}$, ove $s + t + u$ rappresenta il semiperimetro del triangolo, e segnato con X il punto dove il cerchio inscritto al triangolo taglia la secante AC, siccome si fa $AX = \sqrt{r^2+s^2} - r$, alla retta AB prodotta verso B per compiere il semiperimetro si aggiunga $Ba = u$, e di più $ab = AX$; tutta la Ab si fa eguale a $s + t + u - r + \sqrt{r^2+s^2}$. Dalla Ab si levi la somma delle due secanti BC, $VC = bE$, egli è chiaro essere $AE = 2m$, onde divisa essa per metà in P, e da P sino alla secante AC innalzata la perpendicolare PK, questo è il raggio del primo circolo richiesto dal problema che tocca i due lati del triangolo. Con eguale facilità determineremo il raggio

gio QO e la retta BQ . Perchè essendo $2n = s + t + u - r + \sqrt{r^2 + t^2} - \sqrt{r^2 + s^2} - \sqrt{r^2 + u^2}$, se alla BA prodotta verso A aggiungeremo $Ac = u$, e inoltre $cd = By = \sqrt{r^2 + t^2} - r$, indi leveremo da tutta la dB la somma delle due secanti AC, VC, che sia dF, sarà $BF = 2n$, e divisa essa per metà in Q, e alzata da Q sino alla secante BC la normale QO, questa sarà il raggio del circolo che tocca i due lati del triangolo AB, BV, e il primo circolo che ha il centro in K.

Poichè $2p = s + t + u - r + \sqrt{r^2 + u^2} - \sqrt{r^2 + s^2} - \sqrt{r^2 + t^2}$, prodotta la VA dalla parte di A si prenda $Ae = t$ e si aggiunga $ef = VZ$ onde abbiasi $Vf = s + t + u - r + \sqrt{r^2 + u^2}$. Da questa si levi fG eguale alle due secanti AC, BC. Si divida VG per metà in R, sino alla VC si alzi la perpendicolare RS; il cerchio descritto col centro S e col raggio SR toccherà i due lati AV, VB, e gli altri due circoli che hanno i centri in K, O.

La facilità di questa pratica ci compensa bastantemente della fatica sofferta nel tener dietro ad una non breve dimostrazione de' nostri tre teoremi, la quale per altro coll' ajuto delle dottrine trigonometriche in confronto della soluzione per la via ordinaria analitica del nostro Problema, ci ha di molto appianata la strada.

Se il triangolo AVB è isoscele, si fa chiaro riuscire eguali i cerchj alla base, che anno i centri in K, O, e che la retta KO diventa parallela ad AB, essendo il loro contatto in L ove la OK taglia la VI, che dal vertice V si cala normale alla base. Per determinare la grandezza di questi raggi eguali, guidata la secante AC al centro del circolo inscritto, si divida per metà l' angolo retto AIC che incontra in K la AC. Da questo punto calo la perpendicolare KP su la base AB; e questo è il raggio d' un de' due cerchi eguali. Perchè condotte le altre normali KT, KL alle rette AV, VI, l' eguaglianza degli angoli KIP, KIL rende eguali le rette KP, KL; e perchè è diviso l'angolo A per metà colla retta AC, si fan pure eguali le rette KP, KT, onde il cerchio descritto col centro K e col raggio KP tocca i due lati AV, AB ne' punti T, P, e la retta AI in L, la quale prodotta in O cosicchè sia LO = LK, diventa O il centro dell' altro cerchio eguale che tocca il primo in L, e insieme i due lati AB, BV. Determinaremo poi il terzo cerchio colla regola generale. Producasi dalla parte di A la BA, e si prenda AF = AI cui si aggiunga FG = VZ intercetta tra il vertice V e il cerchio inscritto al triangolo. Da tutta la GV si levi GH = alla doppia secante AC, e divisa per metà in R la residua HV, s'alzi su d'essa la normale RS sino alla VI, e diventa S il centro ed. SR il raggio del terzo cerchio che soddisfa alla condizione del Problema.

Se il triangolo è equilatero la pratica per la soluzione del problema, riuscendo eguali tutti e tre i cerchi, è agevolissima: si divida per metà tutti gli angoli del triangolo colle rette AC, BC, VC che concorrono nel centro del cerchio inscritto. La retta VC si produca fino alla base in I, e si prenda IS=AI, poi col centro in C col raggio CS si descriva un circolo che taglia le rette dividenti ne'punti K, O; saranno S, K, O i centri dei circoli eguali ricercati, onde abbassate da questi punti le normali su i lati si determineranno i punti di contatto R, T, P, Q, M, Z dei cerchj coi lati del triangolo, e resterà a provarsi che si tocchino tra loro, e che le rette SK, KO, SO sono il doppio del raggio RS. Questa pratica semplicissima nel triangolo equilatero è del Cittadino Luigi Gozzi mio scolaro e giovane molto dedito agli studj, e di molta aspettativa per le facoltà matematiche, ed idrostatiche alle quali si è applicato. Eccone la dimostrazione. Per l'eguaglianza degli angoli AVC, VAC essendo eguali i lati AC, VC, e per la costruzione eguali pur i raggi CS, CK, sarà CK parallela ad AV; si produca essa sino alla base in N, e poichè si è fatto AI = IV, l'angolo NVI riuscendo eguale all'angolo CAI, si fan simili ed eguali i trian-

go-

goli VNI, ACI; dunque IC=NI ed eguale in conseguenza le residue AN, VC, il che rende pur eguali i triangoli AKN, SKC e quindi eguali le rette AK, KV. Ma per la similitudine de' triangoli AKT, VAI, siccome AI è la metà di AV, così KT sarà la metà di AK, cioè la meta di KS, e perciò i circoli che si descrivono co'centri in K, S devon toccarsi nel punto di mezzo della KS, il che dee pure avvenire nei circoli descritti coi centri S, O. Perchè poi l'angolo KSO è eguale all'angolo del triangolo equilatero, sarà pure equilatero KSO, onde la retta KO che resta divisa per metà in L dalla SI avrà il punto di contatto dei due cerchj alla base nello stesso punto L.

Per dirigere poi generalmente la pratica dell'artefice, che ha bisogno di dividere il prisma in tre pezzi ciascun de'quali contenga il suo rispettivo cilindro, basterà nelle due basi dai punti di contatto dei circoli corrispondenti tirare ai lati le tangenti dei circoli inscritti. Queste sono le direzioni secondo le quali si deve segare il prisma fermandosi però dov' esse concorrono tra loro, dentro l'aja dei triangoli.

Per incidenza aggiungo una dimostrazione elegantissima somministrataci da uno de'nostri trigonometrici teoremi, della regola che usano i pratici per misurar l' aja d'un triangolo, dati i lati senza il ritrovamento precedente della perpendicolare. La nota regola è questa: si prende la metà del perimetro, poi la metà del perimetro meno un lato, la metà del perimetro meno un altro lato, la metà del perimetro meno il terzo lato: si moltiplicano queste quattro quantità insieme, e si dice che la radice quadrata di questo prodotto è eguale all'aja del triangolo.

Non m'è riescito di vedere nessuna dimostrazione semplice della suddetta regola: eccone una semplicissima. Si inscriva al triangolo un cerchio che ha il centro in C, e da C su i lati del triangolo si calino i raggi perpendicolari CI, CL, CM. Usando li stessi simboli del nostro Problema onde sia $AI=s$, $BI=t$, $VL=u$, e il raggio $CI=r$, diventa $s+t+u$

Fig. I.

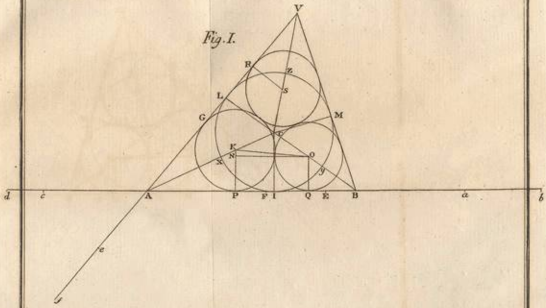


Fig. II.

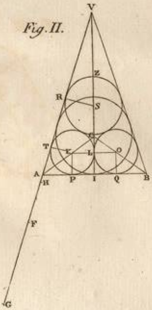
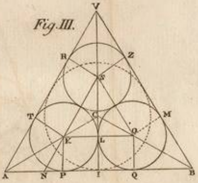


Fig. III.



la metà del perimetro del triangolo, la metà del perimetro meno il lato BV$=s$, la metà del perimetro meno il lato AV$=p$, la metà del perimetro meno il lato AB $= u$. Dunque secondo la regola dev' essere $\sqrt{(s+t+u)stu}$ = all' aja del triangolo. Il che si dimostra così: pel numero superiore (2) abbiamo $stu = r^2 (s+t+u)$, e quindi $\sqrt{(s+t+u)stu} = \sqrt{(s+t+u)r^2(s+t+u)} = r(s+t+u)$. Ma perchè $s+t+u$ è eguale alla metà del perimetro si fa $r(s+t+u)$ = all' aja del Triangolo; dunque $\sqrt{s+t+u)stu}$ sarà eguale all' istessa aja.