# SU LA TENSIONE DELLE FUNI DILUCIDAMENTI TEORICI ED ESPERIENZE

DI PIETRO COSSALI

*Ricevute il dì 9 Novembre 1802.*

Proposto essendosi in Milano di munire contro i fulmini la grandiosa mole del Duomo per mezzo del Frankliniano ingegno di acute spranghe metalliche erette sull' altissima aguglia maggiore, e su altre a conveniente distanza di quà e di là con lunga catena, che tra loro stendendosi e rendendole tutte insieme comunicanti, scendesse poi al' basso per andare a seppellirsi in debita distanza dalla fabbrica in umido luogo sotterra; insorsero tosto solleciti obbietti per timore, che gli sforzi che il peso della catena esercitati avrebbe contro i punti, ai quali doveva essere raccomandata sulle cime delle aguglie, cagionar potessero qualche smossa nelle cime stesse, e rovina. Ciò diede all' Ab. Gianella Professore a que' dì di Matematica nelle Scuole di Brera eccitamento e motivo a prender con tutta accuratezza a svolgere la materia della tensione delle funi e delle curve funicularie, o catenarie.

L' argomento era stato fra' geometri a certo segno discusso ai tempi del Galileo; ma questo sublime Genio Matematico vi si era egli stesso ingannato, credendo una Parabola la curva formata da una fune, o catena sospesa da due suoi estremi. E che non la fosse, dimostrato lo aveva e col calcolo, e coll' esperienza insieme Gioachimo Jung, senza però poter innoltrarsi a determinare qual curva veramente essa si fosse. Così ci narra Giovanni Bernoulli nel tomo 3.° pag. 491. Mancava ancora ai geometri la chiave per si-

mi-

mili determinazioni, che addomandano il computo delle azioni elementari; mancava il calcolo infinitesimale. Ma non sì tosto una sì grande chiave fu discoperta, che il problema venne sciolto. I due celebri fratelli e rivali, Giacopo e Giovanni Bernoulli in una matematica conversazione tra loro condotti vennero dai discorsi varj a gettare su di esso l' attenzione; ma comprendendone quanto la bellezza, la difficoltà altrettanto, non ebbero per allora, siccome Giovanni stesso alla pag. 48 del tomo 1.° di sue opere il confessa, tanto di coraggio che gli spignesse ad affrontarlo; ed il partito scelsero di esperimentare la sottigliezza e l' industria dei geometri in universale, facendo loro proporlo per via degli atti di Lipsia: ciò che fu eseguito il Maggio del 1690. Il Leibniz, che possedeva l' aurea chiave per soluzioni sì fatte, pubblicò negli atti stessi, non più che due mesi dopo, cioè nel Luglio, d' essere penetrato al conoscimento della natura della Curva; piacergli però di concedere agli altri lo spazio di un anno, terminato il quale, se niuno aggiunto vi fosse, renduto avrebbe palese il suo ritrovamento. Il felice successo degli studj di Leibniz incitò, ed incoraggì i due fratelli Bernoulli a quella impresa che dianzi atterriti gli aveva; e l' uno e l' altro, prima che spirasse il prescritto termine, riuscirono al bramato scioglimento.

Ma le generali dottrine del Leibniz e dei Bernoulli non bastavano all' affare della Frankliniana armatura del Duomo di Milano: facea mestieri discendere a considerazioni più affini alla pratica. L' unione di queste con le teorie astratte svolte ed estese per tutti i lati, compose all' Ab. Gianella la materia di un volumetto, che l' anno 1775 diede in luce; e che quantunque di due parti fornito, sulla tensione delle funi l' una, l' altra sulla natura e sulle affezioni tutte della Catenaria, amò ciò non dimeno intitolar semplicemente *De Funium Tensione*. E cagione, penso, si fu il voler prendere il titolo dall' oggetto principale dell' opera, che era di determinare le azioni di una catena contro i punti di sos-

sospensione ; dimostrato già essendo da Giovanni Bernoulli apertamente, che tali azioni della fune o catena ABC contro i punti A, C, ( fig. 1.ª ) sono le stesse, che quelle che contro i punti medesimi eserciterebbe un peso P uguale a quello della fune o catena, sospeso dall' angolo D dei due fili supposti non gravi, A D, C D prodotti sino a concorso dalle direzioni dei due estremi elementi della fune ; ed evidente d' altro canto essendo, che queste azioni si uguagliano alle tensioni dei fili per mezzo delle quali il peso agisce.

Il problema per tanto di determinare le tensioni nei due fili AD, CD cagionate dal peso P sospeso dall' angolo loro D, quello si è con cui l' Ab. Gianella dà principio al suo lavoro. Trattasi di risolvere l' azione naturale del peso P giusta la retta verticale D P in due che agiscano nelle direzioni dei fili AD, CD, e li tendano. Giov. Bernoulli nella XXXVI delle sue Lezioni Matematiche *De methodo integralium aliisque* contenute nel tom. 3.° delle sue opere, stimò di poter annoverare tal problema tra le cose da presupporsi all' investigazione della curva catenaria, ed in brevi parole se ne spedì con dire: che il peso P sostentato dai due fili, qualunque sia l' angolo del concorso loro, spiega la sua forza contra i punti A, C con tal proporzione, che la potenza requisita in A sta alla potenza requisita in C, come reciprocamente ( prolungata in E la verticale PD ) il seno dell' angolo CDE al seno dell' angolo ADE, ed il peso sostentato P all' una od all' altra potenza, come il seno di tutto l'angolo ADC al seno dell' uno o dell' altro angolo alternamente alla potenza posto e chiude così. *Hoc in quavis Statica demonstratur*. Non già, che in ogni libro di Statica di quei dì risoluto si trovasse in propj espressi termini il problema di che si tratta ; dir volle, che l' assegnata proporzione delle azioni dal peso P risultanti nei fili, e nei punti di sospensione A, C, era una conseguenza sì naturale ed evidente del general teorema della risoluzione di una forza in qualunque

que libro di Statica insegnato, che aver potevasi come insieme insegnata, e dimostrata. Di fatto, giusta l' accennato general teorema, per determinar le due azioni dal peso P risultanti nelle direzioni dei due fili AD, CD, altro non si ha a fare ( espressa per una determinata retta verticale qual DR la naturale azione del peso P ) che costruire intorno ad essa un paralellogrammo, due lati del quale sieno nelle direzioni dei due fili AD, CD, ciò che si otterrà prolungando essi fili in Q, S, e poi dal punto R menando RH, RK paralelle alle direzioni AQ, CS dei fili. Il paralellogrammo DHRK è il paralellogrammo di risoluzione della forza del peso P espressa per DR; DK è l' azione per essa risultante lungo il filo AD, e nel punto A; DH l' azione risultante lungo il filo CD, e nel punto C. Per natura del paralellogrammo il lato DK = HR, e nel triangolo DHR i lati sono come i seni degli angoli a loro opposti, e di più l' angolo HDR = EDC, l' angolo HRD = RDK = ADE, e l' angolo DHR = 180 — ADC, e sen. DHR = sen. ADC: onde raccogliendo tutto ne segue

$$DK = \text{tens. del filo } AD = \frac{P \text{ sen. } CDE}{\text{sen. } ADC}$$

$$DH = \text{tens. del filo } CD = \frac{P \text{ sen. } ADE}{\text{sen. } ADC}.$$

Questa risoluzione della gravità di P, questa determinazione delle due tensioni dei fili per giudizio di Giovanni Bernoulli sì immediatamente, e chiaramente presentata dal general teorema di risoluzione delle forze da non aver bisogno di particolare dimostrazione, siccome fu dai matematici a pieni voti adottata, così dall' Ab. Gianella pur anche posta venne a base di tutto il suo trattato. Ma di suo proposito essendo, che non contento della generica determinazione delle formole esprimenti le tensioni dei due fili, passasse ad esaminarne i varj casi, nel discorrere per diversi supposti dell' angolo filare ADC, si finse anche quello che codesto angolo fosse uguale a due retti, rimanendo il filo teso in linea

di-

diritta tra i punti A, C senza soffrire dal peso P inflessione veruna. In tale supposto essendo l' angolo ADC uguale a due retti, e conseguentemente il suo seno = o, le tensioni dei fili AD, CD dalle formole esibite sono

$$\text{Tens. di } AD = \frac{P \text{ sen. } CDE}{o} \;\ldots\; \text{Tens. di } CD = \frac{P \text{ sen.} ADE}{o}$$

cioè ambedue riescono infinite. L'Ab. Gianella dedusse quinci essere ripugnante il supposto di un filo disteso fra due punti in perfetta linea retta, non potendo darsi un filo infinitamente teso: *hinc fit ut filum nullum affixum duobus punctis congruere unquam possit cum recta inter ea ducta, cum filum nullum infinite intendi possit.*

Ben altra conseguenza ne tirò l' Ab. Frisi: imputando a colpa della Bernoulliana risoluzione l' assurdo risultato d' una tensione infinita, pensò che per toglierlo era mestieri dar di falce alla radice, rigettando l' addotta risoluzione; ed a piegare e vincere gli animi preoccupati a di lei favore prese ad assegnarne a difetto il non porgere l' ultima risoluzione della forza del peso P, tale porgendola soltanto le rette dal punto P cadenti perpendicolarmente sulle direzioni dei fili nei punti $m$, $n$ non già le oblique RH, RK. E di questo modo si aprì tutt' insieme la via a nuova risoluzione. Vuole egli dunque, che esprimendo DR la forza verticale del peso P, la retta DN determinata sulla direzione del filo AD per la perpendicolare RN esprima la tensione di esso filo AD; e la retta DM sulla direzione del filo CD determinata per la perpendicolare RM la tensione del filo CD. Laonde essendo nel triangolo DRN, l' angolo RDN = ADE, ed essendo per natura di esso triangolo rettangolo 1 : DR : : cos. PDN : DN ne segue, sostituendo P a DR, ed ADE a PDN,

DN = tens. del filo AD = P cos. ADE, e similmente

DM = tens. del filo CD = P cos. CDE.

Queste sono le formole delle tensioni che alle Bernoulliane comunemente adottate ma a suo giudizio erronee, contrappone il Frisi nel Cap. IV dell' Architettura Statica, che forma il libro secondo delle sue *Instituzioni* per gli Architetti, e per gli Ingegneri.

Sfuggesi di fatto per mezzo di queste formole il paradosso della tensione infinita nel caso, che il filo ADC stia in perfetta linea retta disteso tra i punti A C, non avendo in esse luogo l' angolo filare, o sia dei due fili tra loro ADC. Ma ciò stesso non deve egli render le formole medesime sospette di difetto, mancando d' inchiudere un elemento che intuitivamente si concepisce sì essenziale? Ad esame della lor verità, dall' estremo del filo ADC in perfetta linea retta disteso tra i punti A, C, o sia dell'angolo ADC $= 180$, gettiamoci all' altro estremo dei punti A, C infinitamente fatti l'uno all'altro vicini, e dell' angolo in conseguenza ADC condotto all' evanescenza, e con esso vieppiù le parti sue, gli angoli ADE, CDE. In tal supposto divenendo cos. ADE $= 1$, cos. CDE $= 1$, sarà la tensione del filo AD $=$ P, e del pari la tensione del filo CD $=$ P; ed in conseguenza la somma delle due tensioni $= P + P = 2P$, ciò che a prima vista si conosce falso e ripugnante, intendendo ognuno ad evidenza, che nel caso in cui i fili AD, CD si portino a contatto, sì che ciascuno penda in retta verticale, cadaun viene stirato con una forza uguale alla metà del peso P; ed è impossibile che il peso P nella direzione della sua gravità eserciti una forza, o somma di forze a se doppia. Questo sì enorme effetto che nell' esposto estremo caso si dispiega, annuncia che nella novella risoluzione in generale il peso P è due volte adoperato, e risoluto. E che sia così, basta un po di attenzione a convincersene ocularmente. Vien adoperato tutto e risoluto una volta, quando condotta sopra AQ la perpendicolare RN si risolve nelle due forze RN, DN; e vien tutto adoperato e risoluto una seconda volta, allorchè condotta sulla CS la perpendicolare RM si risolve nelle due forze RM, DM. Li due triangoli RDN, RMD non appartengono al medesimo parallelogrammo; che tale non è lo spazio

zio RMDN ; ma sono metà di due paralellogrammi diverse : il triangolo RMD del paralellogrammo RMUD, ed il triangolo RDN del paralellogrammo RNTD. Delle quattro forze RN, ND, RM, MD dalla doppia risoluzione del peso P ricavate non è tenuto conto, che delle due ND, MD, le altre due RN, RM son lasciate di vista, e rimangono perdute. La perdita di queste nasconde, dirò così, il vizio del raddoppiato uso dell' intero peso P, sino che sono esse di qualche grandezza; ma il vizio esce all'aperto, e si dà manifestamente a vedere, allorchè ristretti via via gli angoli RDN, RDM fino ad annullarsi, elleno pure che ne sono i seni, vanno al nulla.

Fatte avea queste riflessioni, allora quando l' Autore mi mandò in dono il primo volume delle sue opere in tre raccolte, che di fresco era uscito in luce l' anno 1782. E siccome nel secondo dovevano contenersi le sue dottrine di Meccanica; così, dovere stimandolo di quella amicizia che accordato mi aveva, non tardai ad avvertirlo sull' effetto delle sue formole delle tensioni nel caso, che approssimati a combaciamento i fili AD, CD svaniscono gli angoli di essi con la verticale intermedia e tra di loro, lasciando a lui stesso il penetrare dal mostruoso effetto alla viziosa cagione. Mi rispose egli che nel volume, di cui si era cominciata l' impressione, ritoccata avendo la materia, veduto avrei trattato il caso e sciolto l' obbietto. Io intanto ho data esecuzione all' idea, che già concepito aveva di sottoporre al giudizio irrefragabile dell' esperienza le tensioni delle funi. Vo a descrivere il modo.

## APPARECCHIO ESPERIMENTALE.

Sono F, F due tavole perpendicolarmente stanti sul pavimento mercè l' essere ciaschedüna inchiodata a squadra ad un pezzo di tavola giacente sul pavimento stesso, e l' essere l' angolo di tale squadra rassodato per mezzo di due triangoli rettangoli di legno inchiodati con l' uno de' cateti dietro la tavola verticale, con l' altro sul pezzo orizzontale verso i lembi delle larghezze dell' una, e dell' altro. GH, IK sono due liste di legno della grossezza di linee 8 strette contro le tavole F, F con viti segnate U, i maschi delle quali insinuati per fori delle tavole, e poi delle liste ricevuti sono e tirati dalle rispettive femmine al di dietro. In simil modo alle liste GH, IK affisse stanno a destra ed a sinistra le due tavole L, L, le due M, M, e le due N, N. Si mostrano nelle liste GH, IK verso il mezzo loro due buchi rotondi, ed altri in convenienti distanze concepir se ne debbono di quà e di là, sotto le tavole coperti, per poter trasportare le stesse tavole tutte verso il centro della figura conservando tra tavola e tavola, e a destra ed a sinistra, gli intervalli che nella figura appariscono, che sono tutti di linee 6. Servono questi intervalli per fermare perpendicolarmente al piano verticale della figura e per conseguenza in direzione orizzontale i braccj *ab*, i due *cd*, i due *ef*, che sono pezzi di legno di noce, grossi un pollice e mezzo in quadro, forniti di una coda a vite maschio, la quale inserita all' altezza che piace, nell' intervallo fra tavola e tavola, è presa al di là delle tavole dalla sua vite femmina, col giro della quale il pezzo di legno vien premuto contro le tavole, e costituito all' angolo retto sul piano loro.

Li due braccj segnati *ab* portano due rotelle del diametro di pollici $4\frac{1}{4}$. Sono cavate da una lastra di ottone di una linea di grossezza, descrivendo due cerchj concentrici con la differenza di lin. $1\frac{1}{2}$ ne' raggj, ed un altro piccolo di sole linee 2 di raggio, dividendo quinci l' aja in sei settori, e votando questi dalla circonferenza larga linea $1\frac{1}{2}$ sino al cerchietto di linee 2 di raggio, con lasciar tra setto-

re

re e settore una listerella d'ottone a forma di raggio, della larghezza di una linea. Nell' esterno della circonferenza si è scavato in giro un canaletto profondo e largo $\frac{1}{3}$ di linea. Nel centro del cerchietto, centro pur della rotella, si è piantato il perno d' acciajo di una linea di diametro nel mezzo, ma terminante in acutissime punte. Queste mettono in due forellini aperti nelle due gambe volte all' insù d' una molla di ottone; la cui parte di mezzo a squadra con le due gambe, sta fermata con vite sulla faccia superiore del braccio *ab* alla distanza di pollici 4 dal piano verticale delle tavole. Mercè la diligenza nello scegliere una lastra di ottone, che fosse in sua estensione la più omogenea ed equabile, mercè l' esattezza in disegnare le parti da tagliar via e da lasciare, mercè la perizia dell' artefice in tutto il lavoro, e massimamente nel giusto impiantamento del perno, e la sua industria e pazienza in riparare con saggi e leggieri tocchi di lima a quella qualunque eterogeneità, o differenza di grossezza, o densità, di cui niuna lamina va senza, le due rotelle riuscite sono in tutto il giro loro sì ben contrappesate, che stanno in ogni punto, sebbene d' altro canto, e per la loro leggerezza e per l' acutezza delle punte del perno sieno insieme mobilissime.

I due braccj notati *ef* sostengono due uguali bilancette delle migliori, che comunemente si usino a pesar oro. Il filo *g* a cui la bilancetta è appesa, passa per un piccolissimo buco attraverso il braccio in distanza di pollici 4 dal piano verticale della figura, e salito sopra il braccio si stende pel tratto di pollici $2\frac{1}{2}$ lungh'esso in una linea segnata nel mezzo, poi per altro forellino discende con la parte *h*, alla quale attaccando il peso *p* uguale o di poco maggiore del peso della bilancetta, si ottengono ad un tempo due beneficj: l' uno di sostenere la bilancetta; l' altro di avere un filo a piombo, per giudicare nell'

nell' esperienza; quando il filo $g$ resti perpendicolare, e quando sia tirato fuori di tal situazione.

Chiamo *interni* il braccetto di ciascuna bilancetta, e l' occhietto suo, e lo scudetto appeso, che guardano verso il centro della figura; ed esterni il braccetto, l' occhietto, e lo scudetto, che mirano al di fuori. Agli occhietti interni è attaccato il filo A D C che gravato in D del peso P serve ad esperimentare sulle tensioni. Due sono gli effetti del peso P: l' uno di tirare le bilancette verso il centro della figura, l' una verso l' altra, e per conseguenza i fili $g$ fuori del perpendicolo; l' altro d' inclinare le bilancette medesime, abbassando i loro braccetti interni. Per contrariare il primo effetto si aggruppano agli occhietti esterni delle bilancette i fili $k$, si fanno passare sopra le rotelle, e giù cadere in $l$, ed alla estremità loro si sospende uno scudino $m$ che si carica poi a poco a poco del conveniente peso. A distruggere il secondo effetto bisogna caricare gli scudetti delle bilancette esterni. Allora le due azioni del peso P dall' una, e dall' altra parte saranno equilibrate dal peso degli scudini $m$, e loro carichi, e dai contrappesi posti negli scudetti esterni delle bilancette, quando i fili $g$ che sostengono le bilancette si troveranno in esatto perpendicolo, il che sarà qualora traguardando con un sol occhio posto di qua dei fili a piombo $h$, si vedranno quelli in preciso riscontro con questi; ed i fili $k$, e i punti inferiori dei due occhietti esterni a cui essi attaccati sono, ed i punti inferiori insieme dei due occhietti interni ai quali è attaccato il filo ADC sieno tutti nella medesima retta orizzontale. Ad esame di ciò impiantati sono fra la seconda, e terza tavola a destra ed a sinistra i due braccj $c\,d$. Su di questi stendeva un rigone di noce grosso linee quattordici per ogni lato, e con la somma diligenza tirato in linea retta; a ridurlo orizzontale mi valeva di un livelletto dilicatissimo a bolla d' aria posato nel mezzo, alzando ed abbassando negli intervalli fra tavola e tavola, ne' quali inseriti sono i braccj, sinchè la ovale bol-

la

la d' aria fosse perfettamente nell' aja della sua elissi d' ottone alla metà del livelletto; e la superficie superiore del rigone fosse ad un tempo all' altezza dei fili *k*.

A misurare l' angolo filare ADC, e gli angoli dell' uno e dell' altro filo con la verticale alzata dal punto D, aveva apparecchiata la tavola QR perpendicolarmente impiantata su d' uno scanno avente per piedi le quattro viti notate *v*; ed alla sommità della quale aperto nel mezzo un buco, e quindi tragittato un cordoncino, sospesa aveva all' un degli estremi, cioè di quà una piastra circolare d' ottone del diametro di pol. 14. lin. 10, che è un bell' Astrolabio, ed al raggio di pollici 6 ha una divisione in gradi assai esatta; all' altro estremo di là della tavola un sufficiente contrappeso. Volendo avere anche i minuti primi di cinque in cinque fatto aveva lavorare un *Nonio* adatto in un segmento di ottone, comprendente l'estensione di undici gradi, ma divisa in parti dodici. Moveva in quà, in là lo scanno, e maneggiava le viti di esso *v*, ed abbassava od alzava la piastra circolare, sino a tanto che si combinasse, che il filo DP tenuto a perpendicolo dal peso P riscontrasse tutt'insieme un altro filo a piombo sospeso alla parte posteriore della tavola e cadente giù lungo il mezzo della fenditura ST, ed il raggio pure a perpendicolo *DB* della piastra circolare; e che la punta D dell'angolo filare coincidesse col punto di centro di essa piastra.

Due modi aveva in pronto a variare, comunque piacevami l' angolo filare ADC: il primo prendendo un filo più corto o più lungo, e alzando od abbassando la piastra circolare, il secondo trasportando verso il mezzo le tavole tutte, e ristringendo tutta la figura.

Le due tavole segnate U non sono. che un sussidio a maggior precauzione con dare all' apparecchio maggior base sul terreno, ed impedire qualunque piegamento del medesimo nel mezzo, facendolo posare su i bracci segnati *n r*.

ESPE-

## ESPERIENZE.

Descritto l'apparecchio, ed il modo insieme di far le esperienze veniamo all'esposizione di esse, ed al calcolo loro, e confronto con la Bernoulliana teoria, e con la Frisiana. Chiamerò *stiramento orizzontale* quello, che trae la bilancetta verso il mezzo dell'apparecchio, di modo che il filo $g$ che la sostiene, esca dal perpendicolo e dal riscontro col filo a piombo $h$, divergendo da esso verso l'interno della figura.

Chiamerò *stiramento verticale* quello, che fa inclinare al basso il braccetto interno della bilancetta con lo scudetto appeso.

Misura del primo è il peso dello scudino $m$ unitamente a quello, di cui fa mestieri caricarlo per richiamare la bilancetta alla sua debita situazione, cioè il giudice di essa ed il filo $g$ a preciso riscontro col filo a piombo $h$. Misura del secondo è il quanto di peso convien porre nello scudetto della bilancetta esterno.

È chiaro, che se (fig. 2) CL sia la direzione del filo CD, e la retta orizzontale CY esprima lo stiramento orizzontale, e la retta verticale YZ rappresenti il verticale: la tensione del filo, e l'azione nella direzion di esso sul punto C dee valutarsi per la retta CZ, che per essere ipotenusa del triangolo rettangolo CYZ, è $= \sqrt{(\overline{CY}^2 + \overline{YZ}^2)}$. Laonde per avere in peso la tensione del filo, quale la esperienza la dimostra, e che perciò dirò *Esperimentale*, bisognerà fare i quadrati dei pesi in numero di grani esprimenti gli stiramenti orizzontale, e verticale, e dalla somma di tali quadrati estrarre la radice.

Il filo adoperato nelle esperienze era un sottil filo di seta. Distinguerò coll'appellazione del filo destro la sua parte DC posta a mano destra, di stiramento verticale destro il suo stiramento verticale, di stiramento orizzontale destro il il suo stiramento orizzontale. Ed all' opposto alla parte del filo AD situata a mano sinistra darò il nome di filo sinistro, e di stiramenti sinistri ai suoi stiramenti verticale, ed orizzontale.

Chiamo in fine angolo filare l'angolo ADC tra le due parti del filo.

## ESPERIENZA I.

*Ad angolo filare ottusissimo diviso quasi ugualmente.*

Peso tendente P - - - - - - - - = Grani... 80.
Stiramento Verticale destro - - - = Grani... 32.
Stiramento Orizzontale destro - = Grani... 311,5.
Stiramento Verticale sinistro - - = Grani... 35.
Stiramento Orizzontale sinistro - = Grani... 315,5.
Ang. del filo destro con la Verticale = 83.° 25'
Seno di esso = 9934062
Complemento del medesimo - - = 6.° 35'
Seno di questo = 1146482
Ang. del filo sinistro con la Verticale = 82.°
Seno di esso = 9902680
Complemento del medesimo - - = 8.°
Seno di questo = 1391731
Angolo filare - - - - - - - - = 165.° 25'
Seno di esso = seno 14.°35' = 2517879.

*Tensione del filo destro.*

Esperimentale $= \sqrt{(\overline{32}^2 + \overline{311,5}^2)} =$ Grani... 313,1

Bernoulliana $= 80 \times \frac{9902680}{2517879} =$ Grani... 314,6. Diff. + 1,5

Frisiana $= 80 \times 0,1146482 =$ Grani ... 9,2. Diff. − 303,9

*Tensione del filo sinistro.*

Esperimentale $= \sqrt{(\overline{35}^2 + \overline{315,5}^2)}$ = Grani ... 317,4

Bernoulliana $= 80 \times \frac{9934062}{2517879}$ = Grani ... 319,6. Diff. + 2, 2

Frisiana $= 80 \times 0,1391731$ = Grani ... 11,1. Diff. — 306,3

## ESPERIENZA II.

*Ad angolo filare molto ottuso diviso alquanto disugualmente.*

Peso tendente - - - - - - - - - = Grani ... 96.
Stiramento Verticale destro - - - = Grani ... 40.
Stiramento Orizzontale destro - - = Grani ... 159,5
Stiramento Verticale sinistro - - - = Grani ... 56.
Stiramento Orizzontale sinistro - - = Grani ... 162,5
Ang. del filo destro colla Verticale - = 76.° 50'
Seno di esso = 9737116.
Complemento del medesimo - - = 13.° 10'
Seno di questo = 2277844.
Ang. del filo sinistro con la Verticale = 70.° 10'
Seno di esso = 9406835.
Complemento del medesimo - - = 19.° 50'
Seno di questo = 3392853.
Angolo filare - - - - - - - - - = 147.°
Seno di esso = seno 33.° = 5446390.

*Tensione del filo destro.*

Esperimentale $= \sqrt{(\overline{40}^2 + \overline{159,5}^2)}$ = Grani ... 164,4.

Bernoulliana $= 96 \times \frac{9406835}{5446390}$ = Grani ... 165,8. Diff. + 1,4

Frisiana $= 96 \times 0,2277844$ = Grani ... 21,9. Diff. — 142,3

Ten-

*Tensione del filo sinistro.*

Esperimentale $= \sqrt{(\overline{56}^2 + \overline{162,5}^2)} =$ Grani ... 171,8

Bernoulliana $= 96 \times \frac{9737116}{5446390} =$ Grani ... 171,6. Diff. — 0,2

Frisiana $= 96 \times 0,3392853 =$ Grani ... 32,6. Diff. — 139,2

## ESPERIENZA III.

*Ad angolo filare alquanto ottuso diviso ugualmente.*

Peso tendente - - - - - - - - = Grani ... 294.
Stiramento Verticale, e destro, e sinistro = Grani ... 150,5
Stiramento Orizzontale, e destro, e sinistro = Grani ... 215,5
Angolo di ciascun filo con la Verticale - - = 56.°
Seno di esso = 8290376
Complemento del medesimo - - - - - - = 34.°
Seno di questo = 5591929
Angolo filare - - - - - - - - - - - - - = 112.°
Seno di esso = seno 68.° = 9271839.

*Tensione del filo e destro e sinistro.*

Esperimentale $= \sqrt{(\overline{150}^2 + \overline{215,5}^2)} =$ Grani ... 262,5

Bernoulliana $= 294 \times \frac{8290376}{9271839} =$ Grani ... 262,8. Diff. + 0,3

Frisiana $= 294 \times 0,5591929 =$ Grani ... 164,4. Diff. — 98,1

## ESPERIENZA IV.

*Ad angolo filare alquanto ottuso diviso alquanto disugualmente.*

Peso tendente - - - - - - - - - - = Grani . . . 42.
Stiramento Verticale destro - - - = Grani . . . 16.
Stiramento Orizzontale destro - - = Grani . . . 25. 5
Stiramento Verticale sinistro - - = Grani . . . 25.
Stiramento Orizzontale sinistro - - = Grani . . . 26. 5.
Ang. del filo destro con la Verticale = 57.° 20'
Seno di esso = 8418249
Complemento del medesimo - - - = 32.° 40'
Seno di questo = 5397507
Ang. del filo sinistro con la Verticale = 44.° 30'
Seno di esso = 7009093
Complemento del medesimo - - - = 45.° 30'
Seno di questo = 7132505
Angolo filare - - - - - - - - = 101.° 50'
Seno di esso = seno 78.° 10.' = 9787483

*Tensione del filo destro.*

Esperimentale $= \sqrt{(25^2 + 26{,}5^2)}$ = Grani . . . 30.2
Bernoulliana $= 42 \times \frac{7009093}{9787483}$ = Grani . . . 30 . . . Diff. — 0,2
Frisiana $= 42 \times 0{,}5397507$ = Grani . . . 22,6. Diff. — 7,6

*Tensione del filo sinistro.*

Esperimentale $= \sqrt{(25^2 + 26{,}5^2)}$ = Grani . . . 36,4
Bernoulliana $= 42 \times \frac{8418249}{9787483}$ = Grani . . . 36,1. Diff. — 0,3
Frisiana $= 42 \times 0.7132505$ = Grani . . . 30 . . Diff. — 6,4

ESPE-

## ESPERIENZA V.

*Ad angolo filare un po' minor del retto disugualmente diviso.*

Peso tendente - - - - - - - = Grani . . . 42.
Stiramento Verticale destro - - = Grani . . . 16,5
Stiramento Orizzontale destro - - = Grani . . . 19,5
Stiramento Verticale sinistro - - = Grani . . . 25,5
Stiramento Orizzontale sinistro - - = Grani . . . 19.
Ang. del filo destro con la Verticale = 50.° 55'
Seno di esso = 7762298
Complemento del medesimo - - - = 39.° 5'
Seno di questo = 6304500
Ang. del filo sinistro con la Verticale = 37.° 5'
Seno di esso = 6029760
Complemento del medesimo - - - = 52.° 55'
Seno di questo = 7977593
Angolo filare - - - - - - - - - - = 88.°
Seno di esso = 9993908.

*Tensione del filo destro.*

Esperimentale $= \sqrt{(\overline{16,5}^2 + \overline{19,5}^2)}$ = Grani . . . 25,5
Bernoulliana $= 42 \times \frac{6029760}{9993908}$ = Grani . . . 25,3. Diff. + 0,2
Frisiana $= 42 \times 0,6304500$ = Grani . . . 26,5. Diff. + 1

*Tensione del filo sinistro.*

Esperimentale $= \sqrt{(\overline{25,5}^2 + \overline{19}^2)}$ = Grani . . . 31,8
Bernoulliana $= 42 \times \frac{7706298}{9993908}$ = Grani . . . 32,6 Diff. + 0,8
Frisiana $= 42 \times 0,7977593$ = Grani . . . 33,5. Diff. + 1,7

ESPE-

## ESPERIENZA VI.

*Ad angolo filare alquanto sotto il retto disugualmento diviso.*

Peso tendente - - - - - - - - = Grani . . . 42
Stiramento Verticale destro - - - = Grani . . . 16.
Stiramento Orizzontale destro - - = Grani . . . 16, 5
Stiramento Verticale sinistro - - = Grani . . . 25, 5
Stiramento Orizzontale sinistro - = Grani . . . 16, 5
Ang. del filo destro con la Verticale = 45.°
 Seno di esso = 7071068
Complemento del medesimo - - = 45.°
 Seno di questo = 7071068
Ang. del filo sinistro con la Verticale = 31.° 55′
 Seno di esso = 5286853
Complemento del medesimo - - - = 58.° 5′
 Seno di questo = 8488139
Angolo filare - - - - - - - - - - - = 76.° 55′

*Tensione del filo destro.*

Esperimentale $= \sqrt{(\overline{16}^2 + \overline{16,5}^2)}$ = Grani . . . 22,9
Bernoulliana $= 42 \times \frac{5286853}{9740419}$ = Grani . . . 22,8. Diff. — 0,1
Frisiana = $42 \times 0,7071168$ = Grani . . . 29,7. Diff. + 6,8

*Tensione del filo sinistro.*

Esperimentale $= \sqrt{(\overline{25,5}^2 + \overline{16,5}^2)}$ = Grani ... 30,3
Bernoulliana $= 42 \times \frac{7071068}{9740419}$ = Grani . . . 30,5. Diff. + 0,2
Frisiana = $42 \times 0,8488139$ = Grani . . . 35,6. Diff. + 5,3

ESPE-

## ESPERIENZA VII.

*Ad angolo filare acuto diviso molto disugualmente .*

Peso tendente - - - - - = Grani . . . 294
Stiramento Verticale destro = Grani . . . 230
Stiramento Orizzontale destro = Grani . . . 45,5
Stiramento Verticale sinistro = Grani . . . 67.
Stiramento Orizzontale sinistro = Grani . . . 53,5
Ang. del filo destro con la Verticale - = 13.°
  Seno di esso = 2249511
Complemento del medesimo - - - = 77.°
  Seno di questo = 9743701
Ang. del filo sinistro con la Verticale = 38.°
  Seno di esso = 6156615
Complemento del medesimo - - - - = 52.°
  Seno di questo = 7880107.
Angolo filare - - - - - - - - - - = 51.°
  Seno di esso = 7771460.

*Tensione del filo destro*

Esperimentale $= \sqrt{(\overline{230}^2 + \overline{45,5}^2)}$ = Grani . . . 234,4
Bernoulliana $= 294 \times \frac{6156615}{7771460}$ = Grani . . . 233,3. Diff. — 1, 1
Frisiana $= 294 \times 0,9743701$ = Grani . . . 286,5. Diff. + 52,2

*Tensione del filo sinistro .*

Esperimentale $= \sqrt{(\overline{67}^2 + \overline{53,5}^2)}$ = Grani . . . 85,7
Bernoulliana $= 294 \times \frac{2249511}{7771460}$ = Grani . . . 85,1. Diff. — 0,6
Frisiana $= 294 \times 0,7880107$ = Grani . . . 231,7. Diff. + 196,6

ESPE-

## ESPERIENZA VIII.

*Ad angolo filare più acuto ugualmente diviso.*

Peso tendente - - - - - - - - - = Grani . . . 294
Stiramento Verticale, e destro, e sinistro = Grani . . . 147,5
Stiramento Orizzontale, e destro, e sinistro = Grani . . . 50,5
Ang. di ciascun filo con la verticale - - = 19.°
Seno di esso = 3255682
Complemento del medesimo - - - - - = 71.°
Seno di questo = 9455185
Angolo filare - - - - - - - - - - = 38
Seno di esso = 6156615

*Tensione del filo, e destro, e sinistro.*

Esperimentale $= \sqrt{(\overline{147,5}^2 + \overline{50,5}^2)}$ = Grani . . . 155,9
Bernoulliana $= 294 \times \frac{3255682}{6156615}$ = Grani . . . 155,6. Diff.−0,3
Frisiana $= 294 \times 0,9455185$ = Grani . . . 278. Diff.+122

## ESPERIENZA IX.

*Ad angolo filare assai acuto ugualmente diviso.*

Peso tendente - - - - - - - - - = Grani . . . 294
Stiramento Verticale, e destro, e sinistro = Grani . . . 148
Stiramento Orizzontale, e destro, e sinistro = Grani . . . 26,5
Ang. di ciascun filo con la Verticale - = 10.°5':
Seno di esso = 1750803
Complemento del medesimo - - - - = 79.°55'
Seno di questo = 9845541
Angolo filare - - - - - - - - - = 20.° 10'
Seno di esso = 3447522

Ten-

*Tensione del filo, e destro, e sinistro.*

Esperimentale $= \sqrt{(\overline{148}^2 + \overline{20,5}^2)} =$ Grani . . . 150,3

Bernoulliana $= 294 \times \frac{1750803}{3447822} =$ Grani . . . 149,3 . Diff. $-1$

Frisiana $= 294 \times 0,9845541 =$ Grani . . . 289,4 . Diff. $+139,1$

Le differenze delle tensioni giusta la dottrina Frisiana dalle esperimentali sono sì grandi ed enormi, che non si può non giudicarla apertamente condannata dall' esperienza, del pari che dalla ragione. E sì piccole per l' opposto sono le differenze delle tensioni per la Bernoulliana teoria calcolate dalle esperimentali, che e la esperienza conferma la teoria, e la teoria prova l' accuratezza dell' esperienza.

Così a favor dell' una, e contro l' altra persuaso, e convinto ho ricevuto il 2.° volume delle Opere del Frisi. Pure siccome promesso egli aveva, che trovato vi avrei lo scioglimento dell' obbietto propostogli, spettante il caso in cui, accostati a toccamento i due fili, le tensioni che riuscir debbono uguali ciascuna alla metà del peso tendente, riescono secondo i principj di lui uguali ciascheduna a tutto l' intero peso; così non ho potuto non sentirmi da curiosità sollecitato a leggere la novella spiegazione. Ecco per tanto tutto ciò, che egli dice, cangiando solo le lettere delle rette per acconciare il detto alla nostra figura 1.ª, *si angulus acutus* ADC *successive, & per gradus omnes minuatur, ac denique rectis* AD, CD *congruentibus evanescat, aequales demum fient* DR, DM, DN, *et qua vi* DM *sive* DR *funis* CD *tendetur, ea etiam simul tendetur funis* AD, *& si funes ex pluribus filis componantur, vis tensionis in filo unoquoque habebitur, vim* DR *per numerum filorum qui binos simul funes* AD, CD *componunt dividendo*. Riconosce cioè egli qual conseguenza necessariamente scendente dal suo metodo di determinare le tensioni delle due funi, che nel caso di pender esse verticalmente l'una lungo l'altra, portati a contatto i punti A, C, ciascheduna delle due tensioni, tanto quella della fune CD espressa per DM, quanto quella della fune AD espressa per DN, deve separatamente diventar uguale a tutta intera la forza DR del peso tendente P. Ma quantunque assurda quanto mai esser possa tal conseguenza, la stabilisce egli qual fondatissima, ed incontrastabile verità. Nè si avvede poi di sopraccaricarla con ciò che soggiunge, di una contraddizione. Di fatto, posto che la tensione della fune AD sia $= P$, se, ad esempio si finga, che sia composta di quattro fili, ciascuno de' fili soffrirà la tensione $= \frac{1}{4} P$; ed altrettanto dir si deve dei fili componenti la fune CD, supponendo che siano pur quattro. D'altro canto per ciò che soggiunge, dividendo il peso P per gli otto fili componenti le due funi insieme, risulta a tensione di ciascun filo $\frac{1}{8} P$. Ma vi ha di peggio; poichè, se ivi si rimonti a rileggere il piantamento delle generali formole, vi si trova, confrontando con quelle stabilite nelle sopraccitate sue Istituzioni, indotto un cangiamento che non si può salvare da errore. Imperciocchè laddove colà stabilisce la tensione della fune $CD = P \cos. CDE$, quivi la pianta $= P \frac{DM}{DR} = P . \cos. CDR$; nel che fare è manifesto, che egli suppone $\cos. CDE \left(= \frac{DM}{DR}\right) = \cos. CDR$, ciò che è falsissimo, essendo $\cos. CDR = \cos. (180^\circ - CDE) = -\cos. CDE$; ed il simil fa rispetto alla fune AD, mutando la formola della sua tensione $P . \cos. ADE$ in $P . \cos. ADR$. Codeste nuove formole $P . \cos. CDR$, $P . \cos. ADR$ nel caso di coincider le funi CD, AD con la verticale DE, e di esser per conseguenza gli angoli CDR, $ADR = 180^\circ$, darebbero a ragione di $\cos. 180 = -1$, le tensioni di ciascuna fune $= -P$:

$= - P$: assurdo tanto maggiore, e più enorme del primo, quanto che all'assurdo della quantità P aggiunge l'altro di qualità di tension negativa, vale dire di rilassamento nelle funi gravate dal peso tendente P.

Or poichè consultata, e la ragione, e l'esperienza, siccome abbandonar è mestieri la Frisiana, così fa d'uopo abbracciare la teoria Bernoulliana, sarà pregio dell' opera il rischiararla e purgarla d'ogni accusa. Si è veduto sopra, come nel caso dall' Ab. Gianella finto, che la fune caricata del peso P si mantenga tra i due punti A, C distesa in linea retta, senza nulla piegarsi in due, le formole Bernoulliane esprimenti le tensioni dall' una, e dall' altra parte della fune diventano infinite. Questo è un paradosso, ed il Frisi lo sentenziò un assurdo. Ma, quanto a me pare, il paradosso, o l' assurdo dipende dal modo di concepire. Se si concepisca che il peso P produca esso dall' una, e dall' altra parte della fune una tensione infinita, egli si è questo un paradosso non solo, ma veracemente un assurdo, anzi un assurdo triplice. Poichè in primo luogo assurdo si è, che la finita gravità del peso P produca un' azione infinita, e non una sola ma due, cioè una tensione a destra, un' altra a sinistra infinita. In secondo luogo, perchè si è una contraddizione, che il peso medesimo P abbia valore a produrre tali azioni, e tensioni infinite senza valore a cagionare nella fune la menoma inflessione. Perchè in terzo luogo senza inflessione di sorta veruna non ha luogo l' idea di tensione, in cambio di essa subentrando quella sola che si avrebbe d' una verga inflessibile, o rigida appoggiata su i due punti A, C, alla quale appendendo il peso P, o questo, se fossero essi punti uno dell' altro più alto, scenderebbe allo in giù per la verga medesima sino al punto più basso; od essendo i punti di appoggio ugualmente alti, e la verga orizzontale, altro il peso P non farebbe che premer essa verga, e i due punti di appoggio verso terra, non mai stirare la verga stessa nella sua linea. Ed egli è appunto sostituendo codesta idea, che svanisce ogni assurdo, ogni paradosso. Cioè l'infinita tensione perde ogni reale ed apparente ripugnanza, se concepiscasi, non già come un prodotto del peso P, ma sibbene come una qualità, che implicitamente nella fune si presuppone nel suppor, che ad onta della forza del peso P non riceva la menoma inflessione, non altrimenti che se fosse una verga della somma rigidità, ed inflessibilità assoluta. Di fatto tensione infinita comprende l'idea d'impossibilità di ulterior tensione, e questa importa impossibilità d'inflessione, o di nascimento di qualsiasi piccolissimo angolo per forza di un peso qualunque, così che la fune supposta infinitamente tesa deve ugualmente che una rigidissima verga, o portare conservandosi in perfettissima linea retta, il peso, o scavezzarsi. In somma le formole Bernoulliane nel caso finto presentano un infinito, perchè il supposto del caso stesso lo involge. E con tutta verità dir si può, che trasportate sono fuori della propria sfera, fuori del fondamento proprio, e della propria teoria; poichè il fondamento loro è l'angolo nella fune piegata in due, il quale vien tolto dal supposto di essa fune in linea retta inflessibilmente distesa; e la teoria loro consiste nel risolvere la forza del peso P nelle sue azioni per le direzioni delle due parti della fune, compiendo il paralellogrammo, di cui esse direzioni son lati, e la direzion verticale della gravità del peso è diagonale, della quale teoria ogni concetto resta escluso dal supposto; perchè, nè si può intendere che la forza del peso verticale agisca in direzione ad essa perpendicolare, qual'è l'orizzontale della fune, nè si ha più immagine di paralellogrammo da compiere.

Purgata la Bernoulliana teoria dall' accusa di condurre ad un infinito misterioso, anzi assurdo, dovere si è purgarla eziandio dall' altra accusa che il Frisi le appone, e stima di quella prima cagione, di difetto cioè nella fondamental risoluzione, non essendo portata all' ultimo suo grado. Scrive egli nel 2.° tomo della nuova raccolta delle sue Opere sotto il teor. 3.° pag. 21. *Qui duarum funium tensio-*

*nem*

*nem ex solis rectis* RH, RK (Fig. 3.) *metiri voluerunt ingeniosi auethores minime adverterunt quod, cum propositae vis cujusvis quantitatem, directionemque data aliqua recta exprimendo, aequipollentes sint binae vires binis lateribus paralellogrammi cujusvis expressae, quod rectam illam pro diagonali habeat, nunquam ultima est resolutio, nisi cum angulus resolutarum virium est rectus, quodque in casu anguli* HDK *acuti ex vi* DH, *qua funis* CD *tenditur, semper aliqua habetur portio* DG, *quae simul ad tendendum funem* AD *impenditur; in casu autem anguli ottusi quae vis ad unum tendendum funem impenditur, ea sui portione aliqua simul impenditur ad funem alium relaxandum*. Se con tale avvertimento ha inteso l' autore a dimostrare, che promovendo la Bernoulliana risoluzione della forza DR nelle due DH, DK, per recarla a suo termine colla risoluzion seconda di DH in HG, DG, e di DK in KL, DL, essa Bernoulliana risoluzione giugne in ultimo a coincider con la sua, essendo, attesa l' uguaglianza dei due triangoli HDG, RKN, $DG = KN$, e dei due KSD, RHM, $DL = HM$ e perciò $DK + DG = DN$, $DH + DL = DM$: se questo è stato del Frisi l' intendimento, io rifletto che sciolta la forza DH nelle due HG, DG, e la DK nelle due KL, DL, se adoperar si vogliano le due DG, DL, fa insieme mestieri far uso delle due HG, KL, e non più delle DH, DK, onde non hanno luogo le addizioni $DK + DG$, $DH + DL$. Ma qual ragione poi di codesta nuova risoluzione delle forze DH, DK per mettere in computo la cospirazione, o contrasto loro, ed il reciproco aumento o diminuimento, se tale considerazione è già compresa nella diversità della diagonale del paralellogrammo per esse dato a compiere? Si osservi di grazia che acuto essendo l' angolo HDK di risoluzione, o sia delle due direzioni, nelle quali la forza DR sciogliere si deve, essa diagonale DR è rapporto ai lati DH, DK più lunga, che nel caso di essere l' angolo di risoluzione HDK retto, ed all' opposto più corta che in questo, nel caso di es-

se-

sere l'angolo HDK ottuso: e perchè ciò? Appunto per la cospirazione, e mutuo vantaggio delle due forze nel primo caso, e pel contrasto e reciproco detrimento nel terzo. La Bernoulliana risoluzione adunque non ha verun bisogno di altra nuova risoluzione, ed è in se stessa completa, e senza ulterior passo al suo ultimo punto. Il Frisi ha confuso insieme due casi, o problemi: distinguiamoli, e finiamo di dilucidare a fondo questa materia. Quando data la direzione e quantità di una forza come DR, sia data un' altra sola direzione ad angolo con essa come DS, lungo la quale cerchisi la di lei azione non vi ha dubbio che per aver questa in giusto valore, senza difetto, od eccesso, devesi dal punto R sulla DS condurre la perpendicolare RM, perchè ogni altra retta da R tirata sulla DS comprenderebbe, secondo l'angolo o acuto od ottuso, una forza cospirante, o contraria a quella segnata sopra DS, e che le si dovrebbe con altra risoluzione aggiugnere, o detrarre. Così supponendo che DS sia un piano inclinato, e si cerchi la forza con la quale un corpo per la gravità DR discenderà al lungo di esso, condotta la perpendicolare RM, resta determinata in DM la gravità relativa cagionante la discesa, impiegandosi l'altra forza RM nella pressione del piano. Ma allorchè data la direzione e quantità di una forza DR, sono date dal punto D due direzioni una di quà, una di là, secondo le quali si brama sapere le sue simultanee azioni, la risoluzione non è ella segnata dai dati stessi? E che altro si ha a fare, che compiere il paralellogrammo? Se, non essendo l'angolo retto, ma acuto, od ottuso, si dovesse prima computare l'influenza di una direzione su l'altra per mezzo della perpendicolare da quella su questa calata, il simile far si dovrebbe nella composizione, cioè quando date le due forze DH, DK, si tratta di determinare la forza composta DR, il che niuno dirà, essendo contrario alla dimostrata teoria della semplice costruzione del paralellogrammo, e tornando inutile il computo di tale influenza reciproca, siccome com-

compresa nella struttura del paralellogrammo stessa, nella proporzione cioè dei lati le componenti forze rappresentanti, e della diagonale dall' acuto, od ottuso lor angolo tirata, e rappresentante la forza composta. Il Frisi dunque coll' animo fisso alla risoluzione per mezzo di perpendicolare, lasciando la via semplice che era del caso, si appigliò ad una complicata fuori del caso; fece due volte uso dell' intera forza del peso, in luogo d' un solo paralellogrammo ne segnò due diversi in due triangoli loro metà, e confuse i valori di due azioni del peso P separatamente risultanti con quelli delle due azioni, che risultar debbono simultaneamente. Di fatto (fig. 3.) DM è l' azione che dal peso P risulta nella direzione DS risolvendosi tutto solamente rapporto al piano DS; e DN è l' azione che da esso peso P risulta nella direzione DQ risolvendosi tutto solamente, e separatamente rapporto al piano DQ. Ma chi si persuaderà mai che cotali azioni DM, DN risultanti disgiuntamente da tutto il peso P essere possano le stesse, che le due azioni congiunte risultanti da esso P risoluto ad un tempo rispetto ad ambedue le rette DS, DQ? Reca certamente maraviglia che al Frisi nascosto siasi il gran salto, che vi ha dalle une alle altre; e maraviglia ancor maggiore arreca, che quegli, che alla Bernoulliana risoluzione porgente a dirittura le due azioni simultanee e congiunte obbiettò il difetto di non calcolare nel caso dell' angolo od acuto, od ottuso fra loro l' influenza dell' una sull' altra, faccia poscia il passaggio da due azioni disgiunte provenienti da due risoluzioni separate e diverse, a due azioni congiunte dovute ad una risoluzion semplice, senza computare l' alterazione dell' una per l' altra nel passare dalla disgiunzione alla congiunzione, e simultaneità. Chi volesse effettuar questo computo dovrebbe insieme mettere a conto le due forze RM, RN lasciate di vista dal Frisi; ed ecco qual complicata via di risoluzioni sopra risoluzioni, e ciò che è peggio, senza speranza di buon termine per l' errore a principio della via commesso, in porre

due

due volte a calcolo e due volte sciogliere il peso intero P.

Ma qui appunto in animo mi si desta di tentare, se prendendo ad analizzare una sola delle due risoluzioni del Frisi riesca di condurla alla Bernoulliana risoluzione. Mi appiglio alla risoluzione da lui fatta per mezzo della perpendicolare RM, e dal triangolo RMD compio (fig. 4.) il parallellogrammo RMDU; sciolgo indi la forza DU = RM, calata dal punto U sulla fune AD prolungata in DQ la perpendicolare U*a*, nelle due forze U*a*, D*a*. Sciolgo di nuovo la forza U*a*, per mezzo della perpendicolare dal punto *a* calata su di UR parallella alla direzione DM della fune CD, nelle due U*b*, *ab*; dal punto *b* calando la perpendicolare *bc*, sciolgo *ab* nelle due *ac*, *bc*; dal punto *c* calando la perpendicolare *cd* sciolgo *bc* nelle due *bd*, *cd*; dal punto *d* calando la perpendicolare *de*, sciolgo *cd* nelle due *ce*, *de*. Dal punto *e*... Comprendesi già chiaro, che così proseguendo all' infinito per via di perpendicolari sì alternativamente calate sulla retta DQ e sulla UR, la serie delle parti D*a*, *ac* *cd*... esaurisce la retta DK, e la serie delle U*b*, *bd*... esaurisce la retta UK. Per conseguenza la somma delle forze che risulta nella direzione DQ della fune AD, e che esibisce la sua tensione, è = DK; e la somma delle forze, che risulta secondo UR, a diminuire la forza per essa espressa, o sia la forza DM, è = UK; onde UR riducesi a KR, o sia DM a DH: cioè la tensione della fune CD altra non è che DH. Ed ecco come lungi dal poter essere la Bernoulliana risoluzione incolpata di non esser l'ultima, e di aver bisogno di ulterior operazione, ella è anzi il termine a cui va a mettere il metodo del Frisi ristretto all' una sua metà, cioè all'una delle due separate risoluzioni, e promosso all'infinito. A non lasciare nell'argomento oscurezza veruna prima di abbandonarlo, rischiarerò l'uso delle formole delle due tensioni, $\frac{\text{P.sen.CDE}}{\text{sen.ADC}}$, $\frac{\text{P.sen.ADE}}{\text{sen.ADC}}$ nel ca-

so

Fig. I.

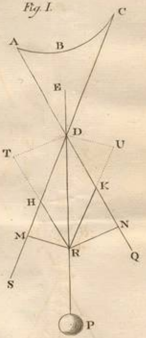



Fig. II.


Fig. III.

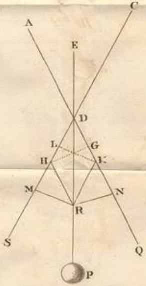
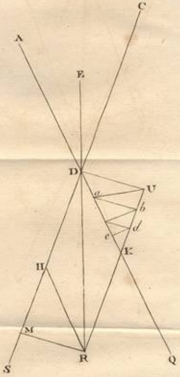
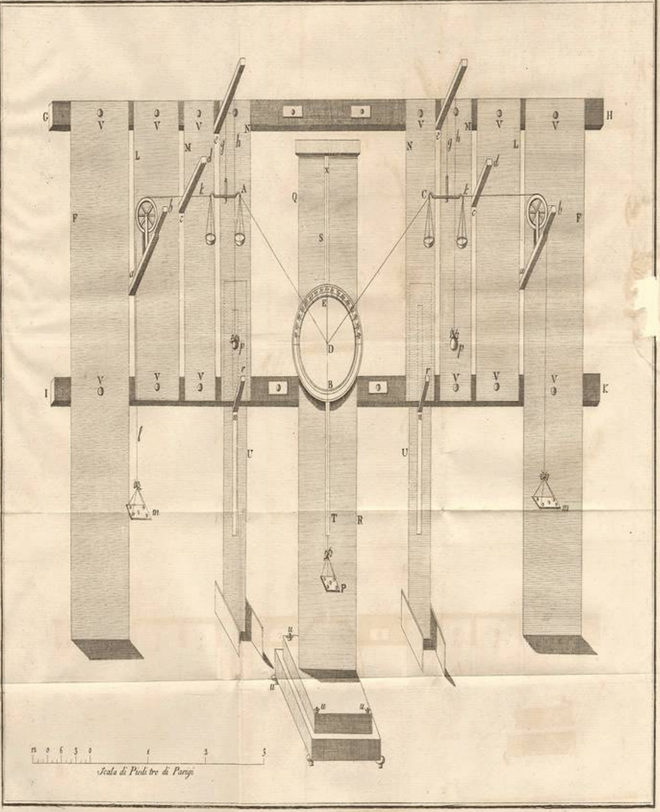



Fig. IV.




G
H
I
K
V
L
M
N
F
Q
S
X
E
D
B
T
R
U
P
A
C
a
b
c
d
e
g
h
k
l
m
p
r
u
12 9 6 3 0 1 2 3
Scala di Piedi tre di Parigi

so degli angoli CDE, ADE, ADC $= 0$, con che le formole divengono ambedue $\frac{0}{0}$; il caso fisicamente non può a rigore verificarsi, ma solamente gli angoli divenir possono piccolissimi. I due CDE, ADE saranno tra loro uguali, e l'angolo ADC sarà di ciascun di loro doppio. Or si sa che i seni dei piccoli angoli sono tra loro nella ragione degli angoli medesimi; dunque chiamato $z$ il seno dell'angolo CDE, e parimenti di ADE, sarà il seno dell'angolo ADC $= 2z$ e conseguentemente i valori delle due formole saranno $\frac{Pz}{2z} = \frac{1}{2}$ P, siccome ragion vuole che sieno. Trattando la cosa geometricamente, è chiaro stare l'uguaglianza degli angoli EDC, ADE, e per conseguenza nell'angolo ADC il valor doppio di ciascun di loro, onde le formole si riducono ambedue a $\frac{\text{P.sen.CDE}}{\text{sen.2CDE}}$. A determinare il valore di questa frazione nel supposto che essendo CDE $= 0$, divenga ella $\frac{0}{0}$, si prenda, giusta la regola che nel calcolo differenziale s'insegna, il differenziale del numeratore, ed il differenziale del denominatore, e si avrà

$\frac{\text{P.}d\text{sen.CDE}}{d\text{sen.2CDE}} = \frac{\text{P.}d\text{CDEcos.CDE}}{2d\text{.CDEcos.2CDE}} = \frac{\text{P.cos.CDE}}{\text{2cos.2CDE}}$, che fatto CDE $= 0$, per essere cos.$0 = 1$, termina in $\frac{1}{2}$ P.

Mi lusingo di aver pienamente dilucidata per la via di riflessioni, ed inconcussamente assodata per quella dell'esperienza la primitiva Bernoulliana teoria sulle tensioni delle funi, ed abbattuta per ambedue i modi la novella del Frisi, traendo dalle accuse di lui contro quella tanti lumi a favor di essa quante armi contro la sua.