ESAME CRITICO

Di un Problema di probabilità del Sig. DANIELE BERNOULLI, *e soluzione d' un altro Problema analogo al Bernulliano.*

Del Sig. GIO: FRANCESCO MALFATTI Professore di Matematica nell' Università di Ferrara.

1 DAppoichè i Matematici han conosciuto il diritto, che ha la lor facoltà di estendere i suoi calcoli fin su la sorte, e di presagirne in qualche maniera gli eventi, assegnando a ciascuno il correspettivo grado di probabilità, e dando un certo e determinato valore alla speranza e al timore, che l' uom dee avere su d'essi, non è mancato tra loro chi si applichi con tutta l'attenzione a questa parte utilissima dell' umano sapere; e noi siam debitori ai *Moivre*, ai *Monmort*, agli *Hugenj*, ai *Bernoullj*, e ad altri eccellenti ingegni de' veri principj, sui quali essa è fondata, e delle regole, che costituiscono l'equità in que' contratti, ne' quali entra il risico e la dipendenza da ciò che si chiama caso fortuito, accidentalità, fortuna. Di questa specie sono i giuochi, massimamente d' azzardo, le assicurazioni, i vitalizj, le tontine, ed altre speculazioni di simil tempera, che gli uomini si son tratte dal capo per non lasciar via intentata di migliorar le loro circostanze, e render più comodo il loro stato.

2. Avvegnachè però e molti siano stati i problemi di tal fatta che hanno sciolto gli Autori, e parecchi sian già i canoni che abbiamo, dotati di qualche generalità, sotto cui tant' altri riduconsi che hanno affinità

nità con quelli, de' quali è ſtata data la ſoluzione; sì è lontano che al dì d'oggi ſi poſſa dir la materia eſaurita, che non ſi ceſſa di conſiderar gli eventi della ſorte ſotto nuovi aſpetti, e s'immaginan nuovi contratti, e s'inventano nuovi giuochi, ſoventi volte pel ſol piacere d'indagar le leggi, con cui dovrebbero eſſere regolati in tale e tal caſo i depoſiti de'giocatori e i patti de' contraenti, affinchè ſi ſalvi interamente la giuſtizia e non intervenga alcuna leſione. Proporzionandoſi per sì fatto modo le corriſpoſte alle aſpettative degli eventi utili, ſi pareggiano di qua e di là le partite, e ſi coſtringe, dirò così, la fortuna ad eſſer giuſta nella diſtribuzione de' ſuoi favori.

3. Tra queſti inventori di nuovi problemi di probabilità ha voluto eſſere ancora annoverato il gran Geometra e Medico Sig. *Daniele Bernoulli*, ultimo de' tre illuſtri Fratelli, che hanno tanto arricchito le Matematiche colle ſublimi loro ſcoperte, del quale, tre meſi ſa, l'Europa letteraria ha pianto la morte ſeguita dopo una lunga carriera di meriti, e dopo ch' egli avea già sì doviziosamente provveduto colle ſue opere alla immortalità del ſuo nome. Il Problema, ch'ei ſi propone nel Tomo XIV. de' Comentarj della nuova Accademia di *Pietroburgo*, è uno de' più compoſti, ſe ſi conſidera in tutta la ſua eſtenſione, ma divien ſemplice, ſe ci fermiamo alla prima ipoteſi. Sentiam lui medeſimo, il quale così ci parla.

4. *Sint duæ, tres, pluresve urnæ, in quibus ſingulis ſchedulæ certo & æquali numero repoſitæ putentur, ſchedulæ autem uniuſcujuſque urnæ ſuo peculiari colore a ſchedulis reliquarum urnarum ab initio diſtinctæ ſint; tum porrò ſchedulæ ſucceſſive, ſorte tamen permutentur hac lege, ut quavis vice ex ſingulis urnis ſchedula una extrahatur, & deinde in urnam ordine ſequentem translocetur, illa autem, quæ ex urna ultimo loco poſita extracta ſit, in in primam reponatur: his ita poſitis, datoque permutatio-*

per determinare il numero delle ſchedule colorate che rimangon nelle urne dopo qualſiſia numero di permutazioni.

6. Non dipartendomi dalla prima ſuppoſizione delle due urne, ſiccome l' Autore non accenna, per quale ſtrada ſia giunto a ritrovar le ſue formole, confeſſo di eſſermivi fermato ſopra alcun tempo, ſenza potere indovinare da qual raziocinio e da qual calcolo gli veniſſero ſomminiſtrate. Finalmente e' mi venne in capo, che poteſſe avere qualche analogia col ſuo problema delle ſchedole e delle due urne un altro problema di due botti A, B eguali di capacità, la prima delle quali ſia piena di vino e l'altra d'acqua. Levando dalla prima, e dalla ſeconda eguali miſure, poi fatta la permutazione, è chiaro che, ove la miſura ſi chiami 1, e n la quantità del fluido in ciaſcuna botte, riman nella botte A $n-1$ di vino e 1 d' acqua, accadendo preciſamente il contrario nella botte B. Per la ſeconda permutazione poi riflettendo, che nella miſura 1 di miſto, che cavo dal vaſo A, deve ſtare tutto il miſto al vino in quella proporzione medeſima, che oſſerva l'intero miſto al vino nella botte, trovo, che $\frac{n-1}{n}$ eſprime la quantità di vino tratto da A la ſeconda volta, onde il vin reſiduo in A alla metà dell' operazione diventa $n-1-\frac{(n-1)}{n}=\frac{(n-1)^2}{n}$. Paſſando poi al vaſo B, ſiccome in eſſo il vino è 1, l'analogia $n:1::1:\frac{1}{n}$ ci fa conoſcere, che $\frac{1}{n}$ è la quantità di vino tratto da B, il quale per terminare l' intera operazione va verſato in A. Dunque, eſeguita la ſeconda permutazione, avrò in A quantità di vino $\frac{(n-1)^2}{n}+\frac{1}{n}$, ovvero

$\frac{n^2+(n-2)^2}{2n}$, formola equivalente alla Bernulliana $\frac{(n-1)\ (n-2)}{n}+1$.

1. Replicando un simile raziocinio per la terza, quarta ecc. permutazione, si troverà per la terza il vino in $A = n^3 + \frac{(n-2)^3}{2nn}$; per la $4^a = \frac{n^4+(-2)^4}{2n^3}$ ecc., onde pel num. indefinito r di permutazioni, sarà il vino residuo in $A = \frac{n^r+(n-2)^r}{n2^{r-1}}$, cioè (sostituito m in vece di $\frac{n-2}{n}$) $= \frac{n}{2}(1+m^r)$, che è appunto il canone del nostro Ch. Autore.

8. Assicuratomi per tal modo della identicità delle mie formole con quelle del num. 5., ho sospettato, che il Bernullio sciogliendo prima il problema delle botti, e appresso rivolgendosi all' altro delle schedole, abbia argomentato così. Distribuiscansi le schedole bianche e nere, che son nelle urne A, B dopo la prima permutazione, in tal maniera

A

bianche $n-1$: nere 1

B

nere $n-1$: bianche 1

E intraprendasi la seconda. Poichè in A sono le bianche $n-1$, e le nere 1, la parte probabile delle bianche che prendo è $\frac{n-1}{n}$, e la parte probabile delle nere è $\frac{1}{n}$, perchè queste due parti unite insieme fanno l' unica schedola che estraggo; e il quanto probabile delle bianche deve stare al quanto probabile delle nere, come il numero delle bianche al numero delle nere che son nell' urna, nella qual ragione ſtanno appunto le parti $\frac{n-1}{n}, \frac{1}{n}$. Il perchè, ſottratto $\frac{n-1}{n}$ dal numero $n-1$ di bianche che eran nell' urna dopo la metà della 2ª operazione, ſarà probabile che reſtino in *A* ſchedole bianche $n-1-\left(\frac{n-1}{n}\right)$. Con ſimile raziocinio, per l' altra metà dell' operazione, egli trova, che probabilmente ſi cava dall' urna *B* la parte $\frac{1}{n}$ di bianche, la quale meſſa in *A* coſtituiſce il numero probabile di ſchedole bianche in *A*, eſeguita che ſia la 2ª permutazione, $=n-1-\left(\frac{n-1}{n}\right)+\frac{1}{n}=\left(\frac{n-1)(n-2}{n}\right)+1$.

9. Proſeguendo poi alle permutazioni conſecutive, riſultano le altre formole e il canone del Bernullio, coſicchè altra differenza non vi ſarà tra il problema de' due fluidi e queſto delle ſchedole, che le formole nel primo rappreſentano le quantità certe e neceſſarie di vino che riman nella botte, laddove nel ſecondo colle medeſime formole ſi eſprime ſolo il quanto probabile delle ſchedole bianche che rimangon nell' urna.

10. Della giuſtezza di queſto o ſomigliante ragionamento, che poſſa aver fatto il Bernullio, fecemi dubitare un Corollario che ne diſcendeva, e ch' egli ſteſſo nota nel decorſo della ſua diſſertazione con queſte parole. *Quia* m *ſemper eſt unitate minor*, *evaneſcit terminus* m^r, *ſi* r *ſit numerus admodum magnus* (cioè infinito); *atque tum fit numerus ſchedularum albarum in prima urna reſiduarum ſimpliciter* $=\frac{n}{2}$. *Status is eſt aſymptotos, ad quem, dum permutationes fiunt, magis magiſque pervenitur*..... Dunque, diceva io, ſe le ſchedole bianche nella prim' urna ſaran tre, ed una la ne-

ra; e nella seconda abbianvi tre nere ed una bianca, vi vorranno infinite permutazioni, perchè io possa sperare di aver nella prim' urna due bianche, che sono precisamente la metà di tutte le bianche che abbiamo. Questa conseguenza mi parea duro di dover ammettere nel tempo che attesa la facilità di trar' una delle tre bianche dalla prim' urna, e simultaneamente una delle tre nere dalla seconda, non avrei dubitato di scommettere, che mi sarei ridotto alla metà dopo una sola permutazione.

11. S'accrebbe poi il mio dubbio, anzi terminai di convincermi della diversa indole de' due problemi, e dell' errore in che era caduto il Bernullio con questa semplice riflessione. Il problema de' due fluidi esige, che seguitando a permutare, il vino della prima botte vada necessariamente diminuendo; ed eseguita la prima permutazione, non son mai possibili i casi, che colle susseguenti si ritorni ad avere in essa quantità di vino $n-1$, e molto men tutto vino: al contrario nel problema delle schedole è possibile che nelle diverse permutazioni ora cresca, ora cali il numero delle schedole bianche, e dopo alcune operazioni potrebb' anche riuscir probabile, che rimanessero nella prim' urna schedole bianche $n - 1$, o ad essa tutte le bianche venissero restituite. Ora tutti questi casi non potendo essere abbracciati, com' è evidente, dalla formola de' fluidi, perchè il problema li esclude, può mai darsi, che un' istessa formola regoli ambidue i quesiti, e mentr' essa esprime giustamente i residui di vino nella prima botte, possa valere eziandio ad esprimere gli avanzi probabili delle schedole bianche nella prim' urna?

12. L'uso del generale e incontrastabil principio, che regola siffatti problemi di probabilità farà anche veder più chiaramente l' inapplicabilità della suddetta formola. Egli è certissimo, per consenso di tutti i Geometri, che a stabilire il grado di probabilità competente a un

tale e determinato evento, voglionsi aver prima di tutto sotto l'occhio tutti gli eventi possibili che appartengono al problema; ed assegnare poi a ciascun evento il numero delle combinazioni, che lo conducono. La proporzione, che passerà tra le combinazioni del dato evento, e la somma di quelle che appartengono agli altri, servirà a determinarne il grado di probabilità, cosicchè se eguali riescano questi numeri di combinazioni, si potrà scommettere in pari e dir del tutto probabile quell'evento che s'è chiamato.

13. Ciò posto, sostituendo nel problema del Bernullio le palle alle schedole, che è il medesimo, trattiamo il problema inverso, e cerchiam quante combinazioni favorevoli, e quante contrarie si abbiano per lasciare nell'urna *A* un dato numero di palle bianche dopo aver compiuto qualsisia dato numero di permutazioni; delle quali per me sarà sempre prima quella che si fa, quand'abbiam già nell'urna *A* palle bianche $n-1$ con una nera, e palle nere $n-1$ con una bianca nell'urna *B*.

14. Prima di tutto però premetto il seguente generalissimo

LEMMA.

Siano in *A* palle bianche $n-p$, palle nere p; e in *B* palle nere $n-p$, palle bianche p. Cavando una palla da *A*, un' altra da *B* e permutando una volta alla maniera Bernulliana, può avvenire, che si trovino in *A* palle bianche $n-p-1$, ovvero $n-p$, o finalmente $n-p+1$. Fuori di questi tre casi, nessun altro è possibile, siccome è chiaro. Ora io dico, che per ottenere in *A* palle bianche $n-p-1$, avrò combinazioni favorevoli $(n-p)^2$; per palle bianche $n-p$, combinazioni favorevoli $2p(n-p)$; finalmente combinazioni favorevoli p^2 per palle bianche $n-p+1$. Si dispongan così le palle delle urne.

A

palle bianche $n-p$ nere p

B

nere $n-p$ bianche p.

Se da A cavo una bianca, e da B una nera, alla fine della permutazione io ho in A palle bianche $n-p-1$. Ma ciò si può ottenere, ove qualunque delle bianche $n-p$ di A si combini con qualunque delle nere $n-p$ di B; e il numero di queste combinazioni favorevoli è $(n-p)^2$. Dunque ecc. Similmente perchè in A rimangano palle bianche $n-p$, anche fatta la permutazione, è necessario o ch' io levi una nera da A, e un' altra nera da B, o una bianca da A e un' altra bianca da B. Ma per ciò abbiamo tante maniere, quante nascono dal combinare il numero di bianche $n-p$ che sono in A col numero di bianche p che sono in B, e dal combinare le nere p di A colle nere $n-p$ di B. Dunque $p(n-p)+p(n-p)$ cioè $2p(n-p)$ sarà il numero delle combinazioni utili per l' evento di bianche $n-p$ nell' urna A. Da ultimo ad aver palle bianche $n-p+1$, fa di mestieri che una delle nere p di A si associ con una delle bianche p di B; il che si può fare in numero p^2 di maniere. Dunque p^2 saranno i casi favorevoli a questo terzo avvenimento; e resta compiuta la dimostrazione.

15. Raccoglieremo dal presente Lemma, che chiamato un de' tre casi di palle bianche, che possono aver luogo nella permutazione, mi saranno contrarie tutte le combinazioni, che favoriscono gli altri due eventi. Avanti di permutare io chiamo, per esempio, in A palle bianche $n-p$, caso che ha di combinazioni utili $2p(n-p)$. Dunque le combinazioni, che mi sono contrarie, sono $(n-p)^2$, e p^2, le quali menano gli altri due casi $n-p-1$, $n-p+1$, e la probabilità, che ho d' indovinar l' evento nominato, alla opposta sta come $2p(n-p) : (n-p)^2+p^2$; la qual proporzione troverem pure con quest' altro semplicissimo raziocinio. Poichè

Poichè n è l' intero numero delle palle bianche, e parimente n l' intero numero delle nere nelle due urne, sarà n^2 il numero di tutte le possibili combinazioni. Sottratte pertanto da n^2 le combinazioni favorevoli a un dato caso di bianche, si avran le contrarie. Onde le contrarie al caso di bianche $n-p$, che ne ha di utili $2p(n-p)$, sarà $n^2-2p(n-p)$, formola identica coll' anzidetta $(n-p)^2+p^2$. Sicchè dato il numero delle combinazioni favorevoli, si ha tosto il numero delle avverse; e così al contrario.

16. Quest' ultima maniera di trovare il numero delle combinazioni contrarie, dato quel delle favorevoli a un certo evento, per una sola permutazione, può estendersi ancora al caso di qualsivoglia numero di permutazioni, ragionando così. Sono n^2 tutte le combinazioni di palle che appartengono a ciascuna permutazione in particolare; e ciascuna delle combinazioni, che ammette la prima permutazione, può combinarsi con ciascuna combinazione ricevuta dalla seconda permutazione. Dunque il numero totale delle combinazioni, che risguardano due permutazioni, sarà $n^2 \times n^2 = n^4$. Andando innanzi col discorso, per tre permutazioni, troveremo essere il numero delle combinazioni $= n^2 \times n^2 \times n^2 = n^6$; per quattro, n^8, e generalmente n^{2m} per numero m di permutazioni. Quindi posto che sia N il numero *v.g.* delle combinazioni contrarie all' evento ϕ in permutazioni m, sarà $n^{2m}-N$ il numero delle favorevoli; e se N sarà il numero delle favorevoli, $n^{2m}-N$ sarà quello delle contrarie.

17. Un altro vantaggio trarrem dal Lemma, e da' susseguenti §§, che consiste nella maniera di rintracciare i numeri delle combinazioni o favorevoli o contrarie a un evento per un dato numero di permutazioni $= m$. Siano gli eventi possibili α, β, $\gamma \ldots \phi$. Consideriamo in due diverse maniere il Problema delle due urne. O si scommette, che almeno in una delle permutazioni m

si avrà in A l' evento φ, o si chiama lo stesso evento φ dopo aver eseguite tutte le permutazioni. Nel primo caso, le combinazioni di ciascun evento α, β, γ.... per tutte le possibili successioni di uno all' altro dovran combinarsi con quelle dell' evento φ, posto in tutti quei luoghi di prima, seconda, terza ecc. permutazione, ne' quali può entrare: e l' aggregato de' prodotti di queste stesse combinazioni darà il numero delle favorevoli a φ. Ecco un esempio. Supposte in A palle bianche $n-1$, nere 1, e al contrario in B, domando due permutazioni per avere in A o alla prima o alla seconda palle bianche $n-2$, e cerco, quanto sia probabile questo avvenimento.

18. Fatto nel Lemma $p=1$, si vedrà a un tratto, che gli eventi della prima permutazione non posson esser che tre

palle bianche in A $\begin{matrix} 1.^\circ\ n-2 \\ 2.^\circ\ n-1 \\ 3.^\circ\ n \end{matrix}$. Se nella ipotesi del risultato $n-2$, alla seconda permutazione si cava bianca, e si mette bianca, anche dopo la seconda permutazione si ha di bianche $n-2$. Devonsi pertanto accoppiare questi due eventi e scrivere $\begin{matrix} n-2 \\ n-2 \end{matrix}$. Il primo appartiene alla prima permutazione e l' altro alla seconda. Mantenuta l' ipotesi del primo evento $n-2$, può accadere, che nella seconda permutazione io levi nera, e metta bianca. In tal caso le bianche dallo stato $n-2$ passano allo stato $n-1$, e dovran così scriversi $\begin{matrix} n-2 \\ n-1 \end{matrix}$; e con ciò l' ipotesi del primo evento $n-2$ resta esaurita, perchè a $n-2$ non può succedere nè n nè qualunque altro numero superi o manchi di due unità, rispetto allo stesso numero $n-2$

19. Accettiam' ora l' altra ipotesi del primo evento $n-1$. Per ciò che s'è detto, è chiaro, che può esse-

re ſuſſeguito e dall' evento $n-2$, e dall' evento n, e dal nuovo evento $n-1$. Queſti due ultimi caſi non fan per noi, perchè, non trovandoſi nè nella prima, nè nella ſeconda permutazione, il numero $n-2$, ci ſono eſſi contrarj. Si dovrà quindi tener conto della ſola union degli eventi $n-1$, $n-2$, e ſcrivere $\begin{matrix} n-1 \\ n-2 \end{matrix}$.

20. La terza ipoteſi ſuppone il primo evento n, cui non può mai tener dietro $n-2$ eſſendo neceſſariamente il ſecondo evento $n-1$. Dunque tre ſoli ſono gli accoppiamenti utili che riſultar poſſono dalle due permutazioni; $\begin{matrix} n-2 \\ n-2 \end{matrix}$; $\begin{matrix} n-2 \\ n-1 \end{matrix}$; $\begin{matrix} n-1 \\ n-2 \end{matrix}$.

Reſta ora che troviamo i numeri delle combinazioni. Per far queſto, ci dobbiam ricordare, che lo ſtato primitivo delle palle bianche in A era $n-1$. Dunque volendoſi, che dopo la prima permutazione diventin le bianche $n-2$, in vigore del Lemma avrem combinazioni favorevoli $(n-1)^2$. Dallo ſtato $n-2$ paſſino le bianche nella ſeconda permutazione al novello ſtato $n-2$. Poichè il Lemma c' inſtruiſce che per averſi replicatamente in A palle bianche $n-p$ abbiam combinazioni propizie $2p\,(n-p)$, ſi fa chiaro, che $4(n-2)$ eſprimerà il numero delle maniere diverſe, con cui può ritornare lo ſtato $n-2$ nella ſeconda permutazione. Ai due ſucceſſivi eventi $n-2$ uniamo lateralmente in colonna i numeri delle combinazioni corriſpondenti $\begin{matrix} n-2 & (n-1)^2 \\ n-2 & 4(n-2) \end{matrix}$, e argomentiamo così. In numero di maniere $(n-1)^2$ ſi può far tranſito dallo ſtato primitivo di palle bianche $n-1$ allo ſtato $n-2$. Ma a ciaſcuna delle maniere $(n-1)^2$ corriſponde un numero di maniere $4(n-2)$, per paſſare dallo ſtato $n-2$ della prima permutazione al nuovo ſtato $n-2$ della ſeconda. Dunque, componendo, per paſſare dallo ſtato primitivo $n-1$ ai due ſtati ſucceſſivi $n-2$, $n-2$, avrem maniere o combinazioni utili, che si esprimeranno col prodotto delle combinazioni rispettive cioè con $4(n-1)^2(n-2)$. Un simile raziocinio ci farà conoscere, che al secondo accoppiamento $\frac{n-2}{n-1}$ corrispondono combinazioni utili $4(n-1)^2$; e al terzo $\frac{n-1}{n-2}$ combinazioni utili $2(n-1)^2$. Sarà quindi il numero totale delle combinazioni che menano l'evento $n-2$ o nella prima o nella seconda permutazione $=4(n-1)^2(n-2)+4(n-1)^2+2(n-1)^2$; e la probabilità del suddetto evento alla probabilità contraria sarà come $4(n-1)^2(n-2)+4(n-1)^2+2(n-1)^2 : n^4-4(n-1)^2(n-2)-4(n-1)^2-2(n-1)^2$.

21. Ciò che s'è detto per due permutazioni può estendersi a tre, quattro ecc. sino al numero indefinito m. Si scriveranno pertanto in colonna tanti eventi successivi quanti porta il numero m, e in altra lateral colonna si porran per ordine i rispettivi numeri delle combinazioni, che conducono ciascuno de' suddetti eventi: si farà quindi il prodotto di questi numeri, e ciò che ne risulta, esprimerà le combinazioni favorevoli ad aversi i dati eventi secondo l'ordine con cui son posti per le successive permutazioni. All'ordine d'eventi $\alpha, \beta, \gamma \ldots \phi$ corrispondano le combinazioni $a, b, c \ldots p$; si formeran le colonne di questi numeri così

$$\begin{array}{cc} \alpha & a \\ \beta & b \\ \gamma & c \\ \vdots & \vdots \\ \phi & p \end{array}$$

e il prodotto $abc \ldots p$ darà il numero delle combinazioni, che menano la successione degli eventi $\alpha, \beta, \gamma \ldots \phi$.

22. Ove poi si domandi di aver l'evento ϕ alla fine dell'intero numero m delle richieste permutazioni; che è la seconda maniera di considerare il problema delle due urne da noi accennata nel §. 17. ed è quella ap-

punto del Bernullio, converrà avvertire, che ad adempire questa condizione più angusta, nella formazione delle colonne talmente debbonsi associare i ϕ o con sè stessi, o cogli altri eventi α, β, γ ...., che un ϕ rimanga sempre nell'ultima sede che corrisponde all'ultima permutazione. Disposti così gli eventi, le colonne laterali ci somministreranno i numeri delle combinazioni favorevoli all'evento ϕ nell'urna A dopo che si son terminate tutte le permutazioni. E se piace di aver le combinazioni contrarie, prima di aver trovate le favorevoli, il che qualche volta è più comodo, talmente si formeran le colonne degli eventi, che non si trovi mai all'ultima sede l'evento ϕ. Tutto ciò è chiarissimo, nè ha bisogno che vi ci fermiam sopra più lungamente.

23. Si domandi ora il numero delle combinazioni favorevoli ad aversi l'evento $n-2$ di bianche nell'urna A dopo che si sono eseguite due permutazioni. Scritte le colonne degli eventi successivi coll'avvertimento del §. precedente, e annessevi le laterali delle combinazioni, abbiamo

$$\begin{array}{ll|ll} n-2 & (n-1)^2 & n-1 & 2.(n-1) \\ n-2 & 4(n-2) & n-2 & (n-1)^2 \end{array}$$

La terza colonna

$$\begin{array}{ll} n-2 & (n-1)^2 \\ n-1 & 4 \end{array}$$

, che ci era utile quando il problema era esposto nella prima maniera, qui ci è contraria, perchè non ci giova che sia riuscito $n-2$ nella prima permutazione, e ci fa danno il trovarsi l'evento $n-1$ alla fine della seconda. Dunque le combinazioni favorevoli all'evento $n-2$ dopo due permutazioni saranno $= 4(n-1)^2(n-2) + 2(n-1)^2$, e in conseguenza le contrarie $= n^4 - 4(n-1)^2(n-2) - 2(n-1)^2$ $= n^4 - 6n^3 + 22n^2 - 26n + 10$.

24. Vogliasi lo stesso evento $n-2$ dopo tre permutazioni. Per saper le combinazioni favorevoli che menano questo avvenimento, scriverem le colonne degli even-

ti a tre a tre con $n-2$ all' ultima sede, e le corrispondenti colonne laterali.

Queste sono
$$\begin{array}{ll|ll|ll|ll} n & 1 & n-1 & 2(n-1) & n-1 & 2(n-1) & n-2 & (n-1)^2 \\ n-1 & n^2 & n-1 & 2(n-1) & n-2 & (n-1)^2 & n-1 & 4 \\ n-2 & (n-1)^2 & n-2 & (n-1)^2 & n-2 & 4(n-2) & n-2 & (n-1)^2 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll|ll|} n-2 & (n-1)^2 & n-2 & (n-1)^2 \\ n-2 & 4(n-2) & n-3 & (n-2)^2 \\ n-2 & 4(n-2) & n-2 & 9 \end{array}$$
. Onde le combinazioni favorevoli sono in tutto $n^2(n-1)^2+4(n-1)^4+8(n-1)^2 \underset{+4}{} (n-2)+16(n-1)^2(n-2)^2=42n^4+9-224n^3+446n^2-388n+124$; e le contrarie $=n^6-42n^4+224n^3-446n^2+388n-124$.

25. Chi avrà la pazienza di rintracciare i numeri delle combinazioni contrarie all'evento $n-2$ dopo 4, 5 ecc. permutazioni, cominciando da $2n-1$, che denota le combinazioni contrarie per una sola permutazione, troverà la seguente serie;

perm. 1; perm. 2 perm. 3

$2n-1$; $n^4-6n^3+22n^2-26n+10$; $n^6-42n^4+224n^3-446n^2+388n-124$;

perm. 4 perm. 5

$n^8-320n^5+2360n^4-6968n^3+10192n^2-7320n+2056$; $n^{10}-2715n^6+26410n^5-107591.n^4+232780.n^3-279700n^2+175664.n-44848$; ecc.

26. Questa serie diventa una ricorrente di secondo grado, ove pongasi $n=2$; i suoi termini sono 3, 14, 52, 216, 848 ecc. i moltiplicatori, che la producono, 8, 2; e il termine generale $\frac{2^{m-1}}{3}(5.2^m+(-1)^m)$, significando m il numero de' termini, ossia delle permutazioni. Sicchè il numero generale delle combinazioni favorevoli ad aversi in A palle bianche $n-2$, cioè nessuna bianca, sarà $2^{2m}-\frac{2^m-1}{3}(5.2^m+(-1)^m)$. Per qualunque numero di permutazioni non può mai esser probabile il caso, che non resti in A alcuna palla bianca,

perchè sarebbe d'uopo, che uguagliandosi i numeri generali delle combinazioni favorevoli ed avverse, potesse risultare m reale e positivo. Con tale adeguamento siam guidati alla equazione $2^{m+1} + (-1)^m = 0$, che è impossibile ed assurda, nella supposizione che m sia un numero positivo o intero o rotto, o finito o infinito. Dunque ecc.

27. In genere però la nostra serie è una ricorrente di grado sicuramente superiore al quarto, atteso l' esperimento che ne ho fatto, e in conseguenza di difficil maneggio. Nondimeno essa, anzi il suo primo termine solo può bastare a far conoscere l'error Bernulliano. Si faccia l'ipotesi di $n=4$, che dà $n-2=2$. Poichè 2 è la metà delle palle bianche, che abbiamo, per la Teoria Bernulliana, partendosi dallo stato primitivo delle 3 bianche e 1 nera nell' urna A, sarà necessario permutare infinite volte, affinchè si renda probabile, che rimangano in A due bianche; ed ogni numero finito di permutazioni renderà improbabile questo avvenimento. Ma la probabilità d'un evento induce l'eguaglianza tra il numero delle combinazioni, che menano quell' evento, e il numero delle contrarie; e l'improbabilità dello stesso evento importa che il numero delle sue combinazioni favorevoli sia sempre minore del numero delle avverse. Dunque per qualunque finito numero di permutazioni, le combinazioni favorevoli ad aversi 2 bianche saranno meno delle contrarie. Veggasi ora che risulti dall' anzidetta serie. Fatto, come si è detto, $n=4$, avremo per la prima permutazione combinazioni contrarie 7; per 2 permutazioni, 130; per 3 permutazioni, 1972 ecc. Ora essendo l' intero numero delle combinazioni di tutte le palle, per una permutazione $=16$, per 2 permutazioni $=256$, per 3 permutazioni $=4096$ ecc., saranno le favorevoli per una permutazione $=16-7=9$; per 2 permutazioni $=256-130=126$; per 3 permutazioni $=4096-1972$

=2124 ecc. Dunque tanto è lontano, che si esigano per la probabilità delle due bianche infinite permutazioni, che anzi, eseguita solo la prima, è più che probabile, che mi rimangano in *A* queste due bianche, avendo per me 9 combinazioni propizie contro 7 contrarie. Questo vantaggio di maggior probabilità, che mi manca in due permutazioni, perchè ho 126 combinazioni a favore, e 130 contro, mi ritorna nelle 3 permutazioni, e mi seguita per tutta la serie. Dunque ad indurre la probabilità per l'evento di due bianche, cioè a far nascere l'eguaglianza tra le combinazioni prospere e sinistre, vi vorrà un numero di permutazioni che sia medio o tra l' 1 e il 2, o tra il 2 e il 3, ma non già un numero infinito, come pretende il *Bernullio*.

28. Da tutto ciò parmi di poter concludere legittimamente, che il principio, di cui si serve il *Bernullio*, non è quello che dee presiedere alla soluzione del suo problema; che le altre sue formole eziandio, le quali dipendono dallo stesso principio, e corrispondono alle susseguenti ipotesi di più di due urne, debbono essere considerate come illegittime, e inducenti ad errore; in una parola, che il problema delle schedole è di una natura ben differente da quello de' fluidi, e va trattato in una maniera molto diversa dalla Bernulliana.

29. Ricusata come insussistente la risoluzione del Geometra di Basilea, potrebbe parere ad alcuno, che io non potessi dispensarmi dal sostituirvi la vera; ed io pur veggo, che ciò sarebbe assai conveniente; ma nè le mie occupazioni, nè il tempo prescritto dall' illustre Raccoglitore delle presenti Memorie alla edizione di questo primo Tomo mi han permesso di applicarmi col comodo necessario ad una indagine, che debb'essere d'un' estrema difficoltà. Potrebbesi però valutare come opera in qualche maniera satisfattoria dell'obbligo ch' m' impone la critica fatta al nostro celebre Autore, il presentarmi in questo Libro colla soluzione del problema accennato

accennato al §. 17, il quale con poca differenza dal Bernulliano è ſtato da me immaginato anche prima di leggere il Tomo XIV. de' *Comm. di Pietroburgo*; dimenticato poi ne' miei quaderni ſtava aſpettando la mia reminiſcenza e l'occaſione di veder la pubblica luce. Queſt'è quello che or m'accingo di fare, ſperando che il metodo, di cui mi ſervo, poſſa eſſer utile a chi prendeſſe per le mani o il problema del *Bernoulli*, od altri che gli ſian ſimili. Se queſto metodo non è sì ſemplice, come avrei deſiderato, varrà a ſcuſarmene la difficoltà d'un queſito, che è del numero di que' problemi di probabilità, che ſi chiamano di eventi dipendenti, ordinariamente aſſai più ſcabroſi e intralciati de' problemi di eventi indipendenti, i quali ſpeſſo ſomminiſtran formole elegantiſſime e non ſperabili in quelli dell'altra claſſe.

30. Siano dunque due urne A, B, ciaſcuna delle quali abbia palle n, la prima bianche, la ſeconda nere. Ridotto lo ſtato delle palle colla prima operazione ad eſſer queſto che chiamerem primitivo; bianche in $A = n-1$; nere $=1$, e al contrario in B, ſi cercano le combinazioni ſavorevoli e contrarie ad averſi nell'urna A un dato numero di palle bianche dentro un dato numero di permutazioni. Per procedere con ordine, comincio dal

PROBLEMA I.

31. *Si cerca il numero delle combinazioni contrarie ad averſi in* A *con una ſola permutazione palle bianche* $n-2$.

Poichè ſon tre ſoli i caſi di bianche in A, che poſſono aver luogo; primo che torni $n-1$; ſecondo che ſi rimetta n; terzo che rimangano $n-2$; i caſi contrarj ſaranno i due primi; $n-1$, n. Ma pel Lemma, fatto in eſſo $p=1$, all'evento $n-1$ corriſpondono combinazioni $2(n-1)$, e all'evento n combinazioni 1. Dunque il numero delle combinazioni contrarie all'evento $n-2$ in una sola permutazione sarà $2(n-1)+1$.

PROBLEMA II.

32. *Si cerca il numero delle combinazioni contrarie ad aversi in* A *palle bianche* n—2 *o nell' una o nell' altra di due consecutive permutazioni.*

Notiamo le colonne degli eventi contrarj e delle rispettive combinazioni, com'è stato avvertito al §. 23.

$$\begin{array}{cc|cc|cc|}
n & 1 & n-1 & 2(n-1) & n-1 & 2(n-1) \\
n-1 & n^2 & n & 1 & n-1 & 2(n-1)
\end{array}.$$

Fatti perciò i prodotti de' numeri delle combinazioni in ciascuna colonna, saprem subito, essere il numero totale delle combinazioni contrarie; $n^2+2(n-1)+4(n-1)^2$.

PROBLEMA III.

33. *Si cercano le combinazioni contrarie ad aversi almeno una volta in* A *palle bianche* n—2 *nel caso di tre consecutive permutazioni.*

Tutto si riduce a notar le doppie colonne per gli eventi infausti, senza ommetterne alcuna. Pel nostro problema esse son le seguenti;

$$\begin{array}{cc|cc|cc}
n & 1 & n & 1 & n-1 & 2(n-1) \\
n-1 & n^2 & n-1 & n^2 & n-1 & 2(n-1) \\
n & 1 & n-1 & 2(n-1) & n & 1
\end{array}$$

$$\begin{array}{cc|cc}
n-1 & 2(n-1) & n-1 & 2(n-1) \\
n & 1 & n-1 & 2(n-1) \\
n-1 & n^2 & n-1 & 2(n-1)
\end{array}.$$

Dunque il numero delle combinazioni contrarie è $n^2+4n^2(n-1)+4(n-1)^2+8(n-1)^3$.

PROBLEMA IV.

34. *Si cercano le combinazioni contrarie ad aversi almeno una volta in* A *palle bianche* n—2 *nel corso di quattro consecutive permutazioni.*

Fatte al solito le colonne per gli avvenimenti sinistri, esse risultano così.

n	1	n	1	$n-1$	$2(n-1)$	n	1	$n-1$	$2(n-1)$	$n-1$	$2(n-1)$
$n-1$	n^2	$n-1$	n^2	n	1	$n-1$	n^2	n	1	$n-1$	$2(n-1)$
$n-1$	$2(n-1)$	n	1	$n-1$	n^2	$n-1$	$2(n-1)$	$n-1$	n^2	n	1
n	1	$n-1$	n^2	n	1	$n-1$	$2(n-1)$	$n-1$	$2(n-1)$	$n-1$	n^2

$n-1$	$2(n-1)$	$n-1$	$2(n-1)$
$n-1$	$2(n-1)$	$n-1$	$2(n-1)$
$n-1$	$2(n-1)$	$n-1$	$2(n-1)$
n	1	$n-1$	$2(n-1)$

dalle quali si rileva, essere il numero delle combinazioni contrarie; $n^4 + 4n^2(n-1) + 12n^2(n-1)^2 + 8(n-1)^2 + 16(n-1)^4$.

PROBLEMA V.

35. *Si cercano le combinazioni contrarie ad aversi almeno una volta in* A *palle bianche* n — 2 *nel corso di cinque consecutive permutazioni.*

Ecco le 13 colonne insiem colle laterali, che ci presentano la soluzione di questo Problema.

n	1	$n-1$	$2(n-1)$	n	1	n	1	n	1	$n-1$	$2(n-1)$
$n-1$	n^2	$n-1$	$2(n-1)$	$n-1$	n^2	$n-1$	n^2	$n-1$	n^2	n	1
n	1	n	1	$n-1$	$2(n-1)$	n	1	$n-1$	$2(n-1)$	$n-1$	n^2
$n-1$	n^2	$n-1$	n^2	n	1	$n-1$	n^2	$n-1$	$2(n-1)$	$n-1$	$2(n-1)$
n	1	n	1	$n-1$	n^2	$n-1$	$2(n-1)$	n	1	n	1

$n-1$	$2(n-1)$	n	1	$n-1$	$2(n-1)$	$n-1$	$2(n-1)$	$n-1$	$2(n-1)$	$n-1$	$2(n-1)$
n	1	$n-1$	n^2	n	1	$n-1$	$2(n-1)$	$n-1$	$2(n-1)$	$n-1$	$2(n-1)$
$n-1$	n^2	$n-1$	$2(n-1)$	$n-1$	n^2	n	1	$n-1$	$2(n-1)$	$n-1$	$2(n-1)$
n	1	$n-1$	$2(n-1)$	$n-1$	$2(n-1)$	$n-1$	n^2	n	1	$n-1$	$2(n-1)$
$n-1$	n^2	$n-1$	$2(n-1)$	$n-1$	$2(n-1)$	$n-1$	$2(n-1)$	$n-1$	n^2	n	1

$n-1$	$2(n-1)$
$n-1$	$2(n-1)$
$n-1$	$2(n-1)$
$n-1$	$2(n-1)$
$n-1$	$2(n-1)$

I prodotti de' numeri delle laterali somministrano le combinazioni contrarie con questa formola; $n^4+6n^4(n-1)+12n^3(n-1)^2+32n^2(n-1)^3+16(n-1)^4+32(n-1)^5$.

36. Ponghiam per ordine le combinazioni contrarie dalla prima sino alla quinta permutazione, e ci nascerà questa serie; $1+2(n-1)$; $n^2+2(n-1)+4(n-1)^2$; $n^2+4n^2(n-1)+4(n-1)^2+8(n-1)^3$; $n^4+4n^3(n-1)+12n^2(n-1)^2+8(n-1)^3+16(n-1)^4$; $n^4+6n^4(n-1)+12n^3(n-1)^2+32n^2(n-1)^3+16(n-1)^4+32(n-1)^5$; ecc., la quale è una ricorrente di secondo grado; e i suoi moltiplicatori sono $2(n-1)$; n^2, cosicchè il primo $2(n-1)$ sia quello che moltiplica il termine antecedente al termine ricercato. Intendendo che la suddetta serie sia continuata anteriormente, supponiamo che siano u, t due termini innanzi al primo $1+2(n-1)$. Sarà dunque $n^2t+2(n-1)+4(n-1)^2=n^2+2(n-1)+4(n-1)^2$, ovvero, eliminate le quantità che si distruggono; $n^2t=n^2$, cioè $t=1$. In oltre avremo $n^2u+2(n-1)=1+2(n-1)$, ovvero $u=\frac{1}{n^2}$. Onde i due termini innanzi al primo sono $\frac{1}{n^2}$; 1; e questi si denomineranno in appresso l' appendice della serie.

37. Divien facile in questa serie il passar dai moltiplicatori al termine generale. Poichè ella è di secondo grado, chiamato m il numero de' termini o delle permutazioni, il suo termine generale veste questa forma; ap^m+bq^m. Ora la teoria delle ricorrenti c' insegna, che vagliono queste due equazioni; $p+q=2(n-1)$; $-pq=n^2$, dalle quali si trae $p=n-1+\sqrt{((n-1)^2+n^2)}$; $q=n-1-\sqrt{((n-1)^2+n^2)}$. Sostituiti pertanto questi valori nel termine generale, si fa esso
$$a(n-1+\sqrt{((n-1)^2+n^2)})^m+b(n-1-\sqrt{((n-1)^2+n^2)})^m.$$

Per la determinazione poi delle ſpecie a, b, farem ſucceſſivamente le due ipoteſi di $m = 1$, e di $m = 2$. Colla prima dovrà eſſere $a(n - 1 + \sqrt{((n-1)^2 + n^2)}) + b(n - 1 - \sqrt{((n-1)^2 + n^2)}) = 1 + 2(n-1)$; e colla ſeconda; $a(n - 1 + \sqrt{((n-1)^2 + n^2)})^2 + b(n - 1 - \sqrt{((n-1)^2 + n^2)})^2 = n^2 + 2(n-1) + 4(n-1)^2$. Queſte due equazioni ci fanno conoſcere i valori delle due ſpecie a, b, e ſi trova

$$a = \frac{\sqrt{((n-1)^2 + n^2)} + n}{2\sqrt{((n-1)^2 + n^2)}}\,;\; b = \frac{\sqrt{((n-1)^2 + n^2)} - n}{2\sqrt{((n-1)^2 + n^2)}},$$

così che il numero indefinito delle combinazioni contrarie ad averſi in A palle bianche $n-2$ almeno in una delle permutazioni m diverrà

$$= \frac{(\sqrt{((n-1)^2 + n^2)} + n)(n - 1 + \sqrt{((n-1)^2 + n^2)})^m}{2\sqrt{((n-1)^2 + n^2)}} + \frac{(\sqrt{((n-1)^2 + n^2)} - n)(n - 1 - \sqrt{((n-1)^2 + n^2)})^m}{2\sqrt{((n-1)^2 + n^2)}}.$$

Se queſto per comodo ſi chiami P, ſi avrà a un tratto il numero indefinito delle combinazioni favorevoli, che ſarà $n^{2m} - \Upsilon$, onde inſtituita l' equazione $n^{2m} - \Upsilon = \Upsilon$, oſſia $n^{2m} = 2\Upsilon$, il valore di m eſatto o proſſimo eſprimerà il numero delle permutazioni che domandar ſi debbono, affinchè ſi poſſa ſcommettere eſattamente o proſſimamente in pari, che almeno in una di eſſe avrà luogo l' evento $n-2$.

38. Ciò però ſi può ancora ottenere nelle diverſe ipoteſi numeriche de' valori di n collo ſcrivere una ſotto l' altra le ſerie delle combinazioni favorevoli e contrarie, ſenza ricorrere ai termini generali. Sia $n = 2$; in tale ipoteſi ſono i quattro primi termini delle combinazioni contrarie; 3, 10, 32, 104 ecc. e i corriſpondenti delle favorevoli 1, 6, 32, 152 ecc. In queſte due ſerie i terzi termini ſono eguali. Dunque ſono eſattamente tre le permutazioni, che menano probabilmente una volta l' evento di bianche $n-2$, oſſia di

bianche zero nell' urna A. Sia $n=3$. Le due serie per questa ipotesi sono 5, 29, 161 ecc. Per una sola per-
4, 52, 568 ecc.
mutazione ho 5 combinazioni contrarie e 4 favorevoli; per due ne ho 52 di favorevoli e 29 di contrarie; conseguentemente giocando in pari, ho danno se domando una sola permutazione, e vantaggio se ne domando due; il che vuol dire, che il numero di permutazioni atto a render probabile l' evento $n-2$ ossia 1 di bianche è medio tra l' uno e il due.

PROBLEMA VI.

39. *Si cercano le combinazioni contrarie ad aversi in* A *palle bianche* n — 3 *in una sola permutazione*.

Poichè lo stato primitivo dell' urna A è di racchiuder bianche $n-1$, si vede subito, che in una sola permutazione non è possibile di passare allo stato di bianche $n-3$; e però tutte le combinazioni delle palle, che sono n^2, ci diventan contrarie, e il numero delle favorevoli sarà $=0$.

PROBLEMA VII.

40. *Si cercano le combinazioni contrarie ad aversi almeno una volta in* A *palle bianche* n — 3 *o nell' una o nell' altra di due permutazioni*.

Tutti gli accoppiamenti degli eventi contrarj all' evento $n-2$ di bianche in due permutazioni sono anche contrarj all' evento $n-3$. In oltre tutti gli accoppiamenti favorevoli ad ottener bianche $n-2$ in due permutazioni, detratti quelli, ne' quali entra l' evento $n-3$, son pur contrarj a quest' ultimo avvenimento. Ma in una sola maniera può associarsi $n-2$ con $n-3$, che è questa: $n-2$, cui corrisponde di combinazioni
$n-3$

$(n-1)^2$. Dunque la somma delle combinazioni con-
$(n-2)^2$
trarie e favorevoli pel caso di bianche $n-2$ in due permutazioni, meno il prodotto $(n-1)^2 (n-2)^2$ darà la somma delle contrarie all' avvenimento $n-3$. Ma la somma delle contrarie e favorevoli per bianche $n-2$ in due permutazioni è n^4. Dunque le contrarie pel caso di $n-3$ sono $n^4 - (n-1)^2 (n-2)^2$, ovvero $6n^3 - 13n^2 + 12n - 4$.

PROBLEMA VIII.

41. *Si cercano le combinazioni contrarie ad aversi almeno una volta in* A *bianche* n — 3 *nel corso di tre permutazioni*.

Ragionando, come abbiam fatto pel precedente Problema, concluderemo, che il numero delle combinazioni contrarie da noi ricercato sarà eguale a n^6 meno i prodotti delle combinazioni, che corrispondono alle colonne degli eventi, ne' quali entra $n-3$; le quali unite alle laterali son le seguenti;

$n-1$	$2(n-1)$	$n-2$	$(n-1)^2$	$n-2$	$(n-1)^2$	$n-2$	$(n-1)^2$	$n-2$	$(n-1)^2$
$n-2$	$(n-1)^2$	$n-2$	$4(n-2)$	$n-3$	$(n-2)^2$	$n-3$	$(n-2)^2$	$n-3$	$(n-2)^2$
$n-3$	$(n-2)^2$	$n-3$	$(n-2)^2$	$n-2$	9	$n-3$	$6(n-3)$	$n-4$	$(n-3)^2$.

Il perchè le combinazioni contrarie diventano in tutto
$$n^6 - 2(n-1)^3 (n-2)^2 - 4(n-1)^2 (n-2)^3 - 9(n-1)^2 (n-2)^2 - 6(n-1)^2 (n-2)^2 (n-3) - (n-1)^2 (n-2)^2 (n-3)^2,$$
ovvero $33n^4 - 126n^3 + 198n^2 - 144n + 40$.

PROBLEMA IX.

42. *Si cercano le combinazioni contrarie ad aversi almeno una volta in* A *bianche* n — 3 *nel corso di quattro permutazioni*.

Sono 20 le colonne laterali a quelle degli eventi, in cui entra $n-3$, le quali ci somministrano i prodotti che si debbon sottrarre da n^8 per determinare le combinazioni contrarie richieste dal presente problema. Eccole per ordine:

n	1	$n-1$	$2(n-1)$	$n-1$	$2(n-1)$	$n-1$	$2(n-1)$	$n-2$	$(n-1)^2$	$n-2$	$(n-1)^2$
$n-1$	n^2	$n-1$	$2(n-1)$	$n-2$	$(n-1)^2$	$n-2$	$(n-1)^2$	$n-1$	4	$n-3$	$(n-2)^2$
$n-2$	$(n-1)^2$	$n-2$	$(n-1)^2$	$n-2$	$4(n-2)$	$n-3$	$(n-2)^2$	$n-2$	$(n-1)^2$	$n-2$	9
$n-3$	$(n-2)^2$	$n-3$	$(n-2)^2$	$n-3$	$(n-2)^2$	$n-2$	9	$n-3$	$(n-2)^2$	$n-1$	4
$n-2$	$(n-1)^2$	$n-2$	$(n-1)^2$	$n-2$	$(n-1)^2$	$n-1$	$2(n-1)$	$n-2$	$(n-1)^2$	$n-2$	$(n-1)^2$
$n-2$	$4(n-2)$	$n-2$	$4(n-2)$	$n-3$	$(n-2)^2$	$n-2$	$(n-1)^2$	$n-2$	$4(n-2)$	$n-3$	$(n-2)^2$
$n-2$	$4(n-2)$	$n-3$	$(n-2)^2$	$n-2$	9	$n-3$	$(n-2)^2$	$n-3$	$(n-2)^2$	$n-2$	9
$n-3$	$(n-2)^2$	$n-2$	9	$n-2$	$4(n-2)$	$n-3$	$6(n-3)$	$n-3$	$6(n-3)$	$n-3$	$(n-1)^2$
$n-2$	$(n-1)^2$	$n-2$	$(n-1)^2$	$n-1$	$2(n-1)$	$n-2$	$(n-1)^2$	$n-2$	$(n-1)^2$	$n-2$	$(n-1)^2$
$n-3$	$(n-2)^2$	$n-3$	$(n-2)^2$	$n-2$	$(n-1)^2$	$n-2$	$4(n-2)$	$n-3$	$(n-2)^2$	$n-3$	$(n-2)^2$
$n-3$	$6(n-3)$	$n-3$	$6(n-3)$	$n-3$	$(n-2)^2$	$n-3$	$(n-2)^2$	$n-3$	$6(n-3)$	$n-4$	$(n-3)^2$
$n-2$	9	$n-3$	$6(n-3)$	$n-4$	$(n-3)^2$	$n-4$	$(n-3)^2$	$n-4$	$(n-3)^2$	$n-3$	16
$n-2$	$(n-1)^2$	$n-2$	$(n-2)^2$								
$n-3$	$(n-2)^2$	$n-3$	$(n-2)^2$								
$n-4$	$(n-3)^2$	$n-4$	$(n-3)^2$								
$n-4$	$8(n-4)$	$n-5$	$(n-4)^2$								

Si trarrà quindi, dopo la riduzione de' termini, il numero delle combinazioni contrarie $= 176n^5 - 943n^4 + 2132n^3 - 2484n^2 + 1472n - 352$.

43. Andando innanzi colla ricerca, ci verrà fatto di scoprire, che preso cominciamento dalla prima del Problema VI., le quattro formole ritrovate; n^2; $6n^3 - 13n^2 + 12n - 4$; $33n^4 - 126n^3 + 198n^2 - 144n + 40$; $176n^5 - 943n^4 + 2132n^3 - 2484n^2 + 1472n - 352$; sono i 4 primi termini di una ricorrente di terzo grado, i cui moltiplicatori posti ordinatamente sono; $6n - 10$; $-3n^2 + 16n - 12$; $-4n^3 + 8n^2$. Questa serie pure avrà l'appendice de' due termini $\frac{1}{n^2}$, 1 innanzi al primo così che la serie coll' appendice sarà $\frac{1}{n^2}$; 1; n^2; $6n^3 - 13n^2 + 12n - 4$. ecc.

PROBLEMA

PROBLEMA X.

43. *Si cercano le combinazioni contrarie ad averſi almeno una volta in* A *bianche* n — 4 *nel corſo di qualſivoglia numero di permutazioni*.

Conſidero queſto Problema in tutta la ſua generalità, non potendoſi più ignorare dopo gli eſempj de' ſuperiori Problemi, come ſi debba procedere anche qui per inveſtigare le combinazioni contrarie che ſpettano alle ipoteſi di 1, 2, 3 ecc. permutazioni. Io le ho partitamente eſaminate ſino a quel ſegno che mi faceva conoſcere la legge della ſerie, della quale noto i primi 4 termini.

$$\begin{array}{ll} & 1;\ \ n^2 \\ & 2;\ \ n^4 \\ \text{per permut.} & 3;\ \ 12n^5 - 58n^4 + 144n^3 - 193n^2 + 132n - 36 \\ & 4;\ \ 114n^6 - 888n^5 + 3159n^4 - 6216n^3 + 6952n^2 \\ & \quad - 4128n + 1008. \end{array}$$

Queſta ſerie è una ricorrente di 4.° grado, i ſuoi moltiplicatori ſono;
$12n - 28$: $-30n^2 + 148n - 156$; $-4n^3 - 52n^2 + 216n - 144$; $15n^4 - 84n^3 + 108n^2$; ed ammette l' appendice de' due termini $\frac{1}{n^2}$, 1, che vanno avanti al primo termine n^2.

PROBLEMA XI.

44. *Si cercano le combinazioni contrarie ad averſi almeno una volta in* A *bianche* n — 5 *nel corſo di qualſivoglia numero di permutazioni*.

Se ſi farà l' eſame di queſta ipoteſi colle regole ſopra indicate, ſi troverà una ſerie di combinazioni contrarie, che è una ricorrente di quinto grado, di cui queſti ſono per ordine i cinque moltiplicatori.

$20n - 60$; $-110n^2 + 660n - 908$; $140n^3 - 1460n^2 + 4376n - 3696$; $95n^4 - 340n^3 - 1124n^2 + 4608n - 2880$; $-56n^5 + 640n^4 - 2208n^3 + 2304n^2$: e i cinque primi termini; n^2; n^4; n^6; $20n^7 - 170n^6 + 800n^5 - 2273n^4 + 3980n^3 - 4180n^2 + 2400n - 576$; $290n^8 - 3800n^7 + 23927n^6 - 89480n^5 + 211800n^4 - 320000n^3 + 298224n^2 - 155520n + 34560$ ecc. Qui pure ha luogo la solita appendice $\frac{1}{n^2}$, 1.

45. Riandando quel che s'è detto dal §.31. fino ad ora si raccoglie primo, che tanto è il grado della ricorrente delle combinazioni contrarie, quanto, principiando da 2, è il numero delle bianche, che si vogliono estratte dalla prim' urna nel decorso di qualsisia numero di permutazioni; secondo, che avendo tutte queste serie al principio alcuni termini che si succedono in serie geometrica continua, se vi aggiungerem l'appendice, tanti saranno i termini geometricamente proporzionali, quanto è il grado della serie delle combinazioni contrarie, vale a dire quanti sono i suoi moltiplicatori. Onde, conosciuta che fosse la legge generale de' moltiplicatori per la ipotesi indeterminata di palle bianche residue $n - z - 1$, siccome il numero de' moltiplicatori spettanti alla ricorrente di questo evento indefinito è appunto $z + 1$, e i termini della serie geometrica dal primo $\frac{1}{n^2}$ dell' appendice fino all' ultimo n^{2z-2} son pur essi $z + 1$, non vi sarebbe bisogno di formar colonna alcuna degli eventi (la qual cosa è molestissima; e atteso il numero grandissimo di queste colonne, quando cresce il numero delle permutazioni, fa sempre rimaner col dubbio di averle notate tutte), e basterebbero i moltiplicatori insiem coi termini della serie geometrica per investigare i susseguenti termini delle nostre serie. Laonde a questo scopo dobbiam dirigere le nostre

meditazioni; e il Problema che c' importa di ſcioglie-re è il ſeguente.

PROBLEMA XII.

46. *Dato il numero* n — z — 1 *di palle bianche, che ſi vogliono almeno una volta rimaſte nell' urna* A *pel corſo di qualſiſia numero di permutazioni, trovar la ſerie generale delle combinazioni contrarie, ovvero determinare i ſuoi moltiplicatori, che ſono* $z+1$ *di numero, e unitamente alla parte geometrica* $\frac{1}{n^2}, 1, n^2, n^4 \ldots\ldots n^{2z-2}$ *della ſerie generale ſervono a far naſcere tutti i ſuoi termini ſuſſeguenti.*

Per darne la ſoluzione, fa di meſtieri metterſi ſott'occhio i moltiplicatori che corriſpondono alle ipoteſi de' precedenti problemi, onde agevolarſi l' indagine della legge, con cui procedono. Eccoli qui diſpoſti con ordine.

Per bianche reſidue $n-2$; 1.° moltip. $2n-2$; 2.° n^2
b. r. $n-3$; 1.° m. $6n-10$; 2.° $-3n^2+16n-12$; 3.° $-4n^3+8n^2$
b. r. $n-4$; 1.° m. $12n-28$; 2.° $-30n^2+148n-156$;
3.° $-4n^3-52n^2+216n-144$; 4.° $15n^4-84n^3+108n^2$
b. r. $n-5$; 1.° m. $20n-60$; 2.° $-110n^2+660n-908$;
3.° $140n^3-1460n^2+4376n-3696$;
4.° $95n^4-340n^3-1124n^2+4608n-2880$;
5.° $56n^5+640n4-2208n^3+2304n^2$.

47. Diamo a queſti moltiplicatori un' altra forma equivalente, che riſulta dal laſciare le formole de' prodotti nati dalle colonne laterali così come ſtanno, ſenza ridurle al netto; del che ſi vede un eſempio ne' primi cinque problemi. La nuova forma è queſta.

Per bianche reſidue $n-2$ 1° moltip. $2(n-1)$
2° n^2
b.r. $n-3$ 1.° m. $2(n-1)+4(n-2)$
2.° $-8(n-1)(n-2)+4(n-1)^2+n^2$

3.° $-4n^2(n-2)$

b.r. n-4. 1.° m. $2(n-1)+4(n-2)+6(n-3)$

2.° $-24(n-2)(n-3)-12(n-1)(n-3)+9(n-2)^2-8(n-1)(n-2)+4(n-1)^2+n^2$

3.° $-6n^2(n-3)-24(n-1)^2(n-3)+48(n-1)(n-2)(n-3)-18(n-1)(n-2)^2-4n^2(n-2)$

4.° $24n^2(n-2)(n-3)-9n^2(n-2)^2$

b.r. n-5. 1.° m. $2(n-1)+4(n-2)+6(n-3)+8(n-4)$

2.° $-48(n-3)(n-4)-32(n-2)(n-4)-16(n-1)(n-4)+16(n-3)^2-24(n-2)(n-3)-12(n-1)(n-3)--8(n-1)(n-2)+9(n-2)^2+4(n-1)^2+n^2$

3.° $192(n-2)(n-3)(n-4)+96(n-1)(n-3)(n-4)-72(n-2)^2(n-4)+64(n-1)(n-2)(n-4)--32(n-1)^2(n-4)-8n^2(n-4)-64(n-2)(n-3)^2-32(n-1)(n-3)^2+48(n-1)(n-2)(n-3)-24(n-1)^2(n-3)-6n^2(n-3)-18(n-1)(n-2)^2-4n^2(n-2)$.

4.° $48n^2(n-3)(n-4)+192(n-1)^2(n-3)(n-4)-384(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)+144(n-1)(n-2)^2(n-4)+32n^2(n-2)(n-4)(n-4)+128(n-1)(n-2(n-3)^2-64(n-1)^2(n-3)^2-16n^2(n-3)^2+24n^2(n-2)(n-3)-9n^2(n-2)^2$

5.° $-192n^2(n-2)(n-3)(n-4)+72n^2(n-2)^2(n-4)+64n^2(n-2)(n-3)^2$.

48. Le fuddette formole col porre a maggior comodo $n-1=a$; $2(n-2)=b$; $3(n-3)=c$; $4(n-4)=d$, ecc.; $n^2=p^2$; $4(n-1)^2=q^2$; $9(n-2)^2=r^2$; $16(n-3)^2=t^2$, ecc. fi trasformano in queft' altre.

Per bianche refidue n—2 ; 1.° moltip. $2a$

2.° p^2

b. r. $n-3$; 1.° m. $2a+2b$

2.° $-2b(2a)+p^2+q^2$

3.° $-2bp^2$

b. r. $n-4$; 1.° m. $2a+2b+2c$

2.° $-2c(2a+2b)-4ab+p^2+q^2+r^2$

3.° $2c(4ab-p^2-q^2)-2bp^2-2ar^2$

4.° $2c(2bp^2)-p^2r^2$

b. r. $n-5$; 1.° m. $2a+2b+2c+2d$

2.° $-2d(2a+2b+2c)-4bc-4ac-4ab+p^2+q^2+r^2+t^2$

3.° $2d(4bc+4ac+4ab-p^2-q^2-r^2)+8abc-2cp^2$
$-2cq^2-2bp^2-2ar^2-2at^2-2bt^2$

4.° $2d(-8abc+2cp^2+2cq^2+2bp^2+2ar^2)+4bcp^2$
$-p^2r^2-p^2t^2-q^2t^2+4abt^2$

5.° $2d(-4bcp^2+p^2r^2)+2bp^2t^2$.

49. La legge, con cui procedono i primi moltiplicatori, è per sè chiarissima, dovendo ciascun d'essi comprendere tanti termini della serie $2a$, $2b$, $2c$ ecc., ovver della serie $2(n-1+2(n-2)+3(n-3)$ ecc.$)$, quanto è il grado della ricorrente che appartiene alla data ipotesi diminuito di un'unità. Volendosi pertanto il primo moltiplicatore per l'evento di b. r. $n-6$, ci verrà esso somministrato dalla formola $2\big(n-1+2(n-2)+3(n-3)+4(n-4)+5(n-5)\big)$. Così per b. r. $n-7$ sarà $=2\big(n-1+2(n-2)+3(n-3)+4(n-4)+5(n-5)+6(n-6)\big)$; e generalmente per l'ipotesi di b. r. $n-z-1$ avremo il primo moltiplicatore $=2\big(n-1+2(n-2)+3(n-3)\ldots.z(n-z)\big)$.

50. Rispetto ai secondi moltiplicatori, di ciascun di essi ne faremo due parti: la prima verrà composta dall'aggregato di tutti que' termini, ne' quali entra l'ultimo termine del primo moltiplicatore corrispondente; la seconda parte formerassi da tutti i termini rimanenti. Vogliamsi per esempio b. r. $n-3$? La prima parte del secondo moltiplicatore notato al §. 48. sarà $-2b(2a)$; l'altra p^2+q^2. Così per l'ipotesi di bianche $n-4$, questa prima parte sarà $-2c(2a+2b)$, e la seconda $-4ab+p^2+q^2+r^2$. Un leggiero esame poi di queste prime parti per le 4 ipotesi del §. 48. ci farà conoscere, che s'uguagliano esse al prodotto negativo dell'ultimo termine del primo moltiplicatore moltiplicato nel primo moltiplicatore dell'ipotesi immediatamente precedente. Onde, chiamato il primo general moltiplicatore $2\big(n-1+2(n-2)+3(n-3)\ldots z(n-z)\big)$

$=\alpha$, e quello della prossima antecedente ipotesi, cioè $2(0+n-1+2(n-2)\ldots.(z-1)(n-z+1))=\alpha'$, si potrà esprimere questa prima parte in genere colla seguente formola; $-2z(n-z)(\alpha')$.

51. Per le seconde parti rifletteremo, che la serie de' quadrati p^2, q^2, r^2, t^2 ecc., ovvero n^2, $4(n-1)^2$, $9(n-2)^2$, $16(n-3)^2$, $25(n-4)^2$ ecc., ha per termine generale $z^2(n-z+1)^2$; in oltre, che ciascuna di queste seconde parti è composta di tutto il secondo moltiplicatore, che conviene all'ipotesi del prossimo evento anteriore e del quadrato, che immediatamente succede nella serie de' quadrati p^2+q^2 ecc., che entrano nella formazione dello stesso precedente secondo moltiplicatore. Così al §. 48. per l'evento $n-3$, la nostra seconda parte è p^2+q^2, cioè tutto il secondo moltiplicatore per l'evento $n-2$ con di più il quadrato q^2, che nella serie de' quadrati tien dietro immediatamente a p^2. Per l'evento $n-4$, la seconda parte è $-4ab+p^2+q^2+r^2$, i tre primi termini della quale sono precisamente il secondo moltiplicatore $-2b(2a)+p^2$ q^2 per l'ipotesi $n-3$, e l'ultimo r^2 è il quadrato che seguita in ordine q^2; e lo stesso dicasi per gli altri eventi. Sicchè chiamando generalmente γ il secondo moltiplicatore, che compete all'evento $n-z-1$, e γ' il secondo moltiplicatore, che spetta al precedente evento $n-z$, sarà questa seconda parte $=\gamma'+z^2(n-z+1)^2$; e tutto il secondo moltiplicatore

$$\gamma=-2z(n-z)\alpha'+\gamma'+z^2(n-z+1)^2.$$

52. Vengo ai terzi moltiplicatori, pei quali stabilisco la seguente regola cavata dall'esame delle quattro ipotesi ordinate nel §. 48, e da altre di più sulle quali ho instituito i miei calcoli. Sia α il primo moltiplicatore generale, che corrisponde all'ipotesi dell'evento $n-z-1$; β il secondo, e γ sia il terzo che domandiamo. Oltracciò rappresenti α' il primo moltiplicatore, che appartiene all'ipotesi dell'evento immediatamen-

te precedente $n-z$, e α'' il primo moltiplicatore che risguarda l' evento antepenultimo $n-z+1$. Così esprima β' il secondo moltiplicatore spettante al penultimo evento $n-z$; e per lo stesso evento $n-z$ sia γ' il terzo moltiplicatore. Dico che sarà $\gamma=-2z(n-z)\beta'+\gamma'-z^2(n-z+1)^2(\alpha'')$. Prendiamo in mano l' ipotesi del secondo evento $n-3$, che ha per terzo moltiplicatore $-2bp^2$. Poichè in tale supposizione il primo moltiplicatore è $2a+2b$; il secondo, $-4ab+p^2+q^2$, sarà $\alpha=2a+2b$; $\alpha'=2a$; $\alpha''=0$. Similmente $\beta=-4ab+p^2+q^2$; $\beta'=p^2$, e $\gamma'=0$, perchè appunto nell' ipotesi precedente $n-2$ non abbiam terzo moltiplicatore. Sostituendo pertanto nel superior canone questi valori, avrem $\gamma=-2(n-2).2p^2+0-4(n-1)^2(0)$, cioè, surrogando b invece di $2(n-2)$; $\gamma=-2bp^2$. Per l' evento $n-4$ diventa $\alpha=2a+2b+2c$; $\beta=-4ab-4ac-4bc+p^2+q^2+r^2$, onde $\alpha'=2a+2b$; $\alpha''=2a$; $\beta'=-4ab+p^2+q^2$, e $\gamma'=-2bp^2$, tale essendo appunto il terzo moltiplicatore per la precedente ipotesi dell' evento $n-3$. Quindi sarà $\gamma=-3(n-3)(-8ab+2p^2+2q^2)-2bp^2-9(n-2)^2(2a)$, ovvero (ponendo c in luogo di $3(n-3)$, e r^2 in luogo di $9(n-2)^2$) $\gamma=8abc-2cp^2-2cq^2-2bp^2-2ar^2$, come s' è ritrovato.

53. Questa corta ed elegante regola ha il vantaggio della massima generalità; ed ove α, β rappresentino i moltiplicatori che per ordine precedono γ, serve non solo per l' investigazione de' terzi, ma eziandio de' quarti, quinti ecc. moltiplicatori. Si voglia il quarto moltiplicatore γ, che corrisponde all' evento $n-4$. Dovendo essere α, β i due moltiplicatori antecedenti, sarà pel §. 48. $\alpha=-4bc-4ac-4ab+p^2+q^2+r^2$; $\beta=8abc-2cp^2-2cq^2-2bp^2-2ar^2$; $\alpha'=-4ab+p^2+q^2$; $\alpha''=p^2$; $\beta'=-2bp^2$; $\gamma'=0$. Quindi $\gamma=-3(n-3)(-4bp^2)-9(n-2)^2p^2$, ossia $\gamma=4bcp^2-p^2r^2$. Si domandi il quinto moltiplicatore γ, che ap-

partiene all' evento $n-5$. In tal caſo ſarà $\alpha = 8bcd + 8acd + 8abd - 2dp^2 - 2dq^2 - 2dr^2 + 8abc - 2cp^2 - 2cq^2 - 2bp^2 - 2ar^2 - 2bt^2 - 2at^2$; $\beta = -16abcd + 4cdp^2 + 4cdq^2 + 4bdp^2 + 4adr^2 + 4bcp^2 - p^2r^2 - p^2t^2 - q^2t^2 + 4abt^2$; $\alpha' = 8abc - 2cp^2 - 2cq^2 - 2bp^2 - 2ar^2$; $\alpha'' = -2bp^2$; $\beta' = 4bcp^2 - p^2r^2$, e $\gamma' = 0$. Onde in virtù della regola $\gamma = -4(n-4)(8bcp^2 - 2p^2r^2) - 16(n-3)^2(-2bp^2)$, cioè $\gamma = -8bcdp^2 + 2dp^2r^2 + 2bp^2t^2$, come debbe eſſere.

54. Adattiamo la teoría ad un eſempio, e facciam vedere in pratica, come dato il numero totale delle palle bianche, e domandato un certo evento di bianche che deon rimanere nell' urna, ſi poſſano per mezzo della noſtra regola rintracciare con ſufficiente ſpeditezza i moltiplicatori della ricorrente delle combinazioni contrarie, e determinar quindi il numero delle permutazioni, che ſono neceſſarie per render probabile l' evento dato. Sia il numero delle palle bianche $n=8$, e ſi cerchino i moltiplicatori della ricorrente, che compete all' evento nell' urna di bianche reſidue 4. In queſto caſo conviene eſaurire i tre eventi $n-2=6, n-3=5, n-4=4$. Cominciando dal primo $n-2$, e richiamando alla memoria, che $a=n-1$, $b=2(n-2)$, $c=3(n-3)$, cioè $a=7$, $b=12$, $c=15$; e che $2a$ è il primo moltiplicatore per l' evento $n-2=6$; $2a+2b$ pel ſecondo evento $n-3=5$; $2a+2b+2c$ pel terzo $n-4=4$, ſaprem toſto aſſegnare a ciaſcuno di queſti eventi il primo reſpettivo moltiplicatore, e tutti e tre per ordine ſaranno, come nell' anneſſa figura, 7.2, 19.2, 17.2^2.

b.r.6.1.° molt.	7.2	b.r.5.1.° m.	19.2	b.r. 4. 1.° m.	17.2^2
2.°	2^6	2.°	-19.2^2	2.°	-223.2^2
		3.°	-3.2^5	3.°	-237.2^4
				4.°	99.2^8

Ripigliati poi i canoni $\gamma = -2z(n-z).\alpha' + \gamma' + z^2(n-z+1)^2\gamma = -2z(n-z).\beta' + \gamma' - z^2(n-z+1)^2.\alpha''$, il il primo de' quali ſerve per ritrovare i ſecondi moltiplicatori, e il ſecondo per ritrovar gli altri, diſcorreremo così. Pel primo evento di b. r. 6 abbiam $z = 1$, $\alpha = 7.2$, $\alpha' = 0$, $\gamma' = 0$. Dunque il ſecondo moltiplicatore γ ſarà ridotto alla formola $z^2(n - z + 1)^2$, oſſia coi valori di $n = 8$, $z = 1$; $\gamma = 2^6$. Pel ſecondo evento di b. r. 5 diventa $z = 2$, $\alpha = 19.2$, $\alpha' = 7.2$, $\gamma' = 2^6$; e però il ſecondo moltiplicatore γ ſi fa $= - 4.6.7.2 + 2^6 + 4.49 = - 19.2^2$. Pel terzo evento poi di b. r. 4 divien $z = 3$, $\alpha = 17.2^2$; $\alpha' = 19.2$; $\gamma' = - 19.2^2$; onde il ſecondo moltiplicatore $\gamma = - 6.5.19.2 - 19.2^2 + 9.36 = - 223.2^2$. Si paſſi ora ai terzi moltiplicatori, e ſi dia principio dalla ſeconda ipoteſi, giacchè la prima ne è priva. Poichè α, β deon eſſere i due moltiplicatori immediatamente precedenti al terzo che cerchiamo, ſarà $\alpha = 19.2$, $\beta = - 19.2^2$; per conſeguenza $\alpha' = 7.2$, e (non avendovi ipoteſi ſuperiore alla prima di b. r. 6) $\alpha'' = 0$. Di più $\beta' = 2^6$; $\gamma' = 0$. Laonde, introdotti queſti valori nel ſecondo de' ſuddetti canoni, riſulterà il terzo moltiplicatore $\gamma = - 4.6.2^6 = - 3.2^9$. Alla terza ipoteſi di b. r. 4 corriſpondono queſti valori; $z = 3$, $\alpha = 17.2^2$; $\beta = - 223.2^2$; $\alpha' = 19.2$; $\alpha'' = 7.2$; $\beta' = - 19.2^2$; $\gamma' = - 3.2^9$, che fanno naſcere il terzo moltiplicatore $\gamma = 6.5.19.2^2 - 3.2^9 - 9.36.7.2$, ovvero $\gamma = - 237.2^4$. Non reſtando preſentemente altro che il quarto moltiplicatore della terza ipoteſi, perchè eſſo manca nelle altre due, ſarà, per queſt'ultima indagine, $\alpha = - 223.2^2$; $\alpha' = - 19.2^2$; $\alpha'' = 2^6$; $\beta = 237.2^4$; $\beta' = - 3.2^9$; $\gamma' = 0$, e $z = 3$. Dunque il quarto moltiplicatore $\gamma = 6.5.3.2^9 - 9.36.2^6 = 99.2^8$.

55. Conoſciuti i quattro moltiplicatori per l' evento di b. r. 4, rimane che ſi trovino i termini della ſerie contraria, di cui coll'ajuto dell' appendice ci ſon noti i quattro primi termini $\frac{1}{2^6}$, 1, 2^6, 2^{12}, che oſſervano

la proporzione geometrica. Ponghiam sotto ad essi i quattro moltiplicatori, come nella presente figura;

$$\frac{1}{2^6},\ 1,\ 2^6,\ 2^{12},\ 54511.2^2, 684751.2^4, 38988839.2^4, 498813699.2^6$$

$$0,\ 0,\ 11025.2^2, 363825.2^4, 28120025.2^4, 574928125.2^6.$$

$$99.2^8, -237.2^4, -223.2^2, 17.2^2$$

E facciam poi giusta la regola delle ricorrenti le solite moltiplicazioni. Esse ci daranno il quinto termine $= 54511.2^2$, il sesto $= 684751.2^4$, il settimo $= 38988839.2^4$, l'ottavo $= 498813699.2^6$ ecc. Per non andare innanzi senza proposito, sarà bene aver presente ciò che abbiamo avvertito al §. 15. sul numero totale delle combinazioni di tutte le palle nelle diverse permutazioni per potere, ad ogni termine della ricorrente delle combinazioni contrarie, scriver sotto di mano in mano l'analogo nella serie delle favorevoli. Così nel caso nostro si vedrà, che ai termini della serie contraria, principiando da 2^6 che è realmente il primo sino al termine 498813699.2^6 corrispondono nella favorevole i termini 0; 0; 11025.2^2; 363825.2^4; 28120025.2^4; 574928125.2^6. Ora ne' termini antecedenti al sesto le combinazioni avverse son sempre in numero maggiore delle propizie, ma queste nel sesto eccedon le prime, e quest' eccesso, come se ne può far l'esperienza, va sempre più crescendo ne' termini susseguenti. Dunque sarebbe cosa inutile l'andar più oltre nelle serie, avendosi già tanto che basta per concludere, che il numero delle permutazioni necessarie a render probabile l'evento di ridursi nella prim' urna alla metà di tutte le palle bianche, è un numero medio tra il 5 e il 6, non contando già, come abbiam fatto sempre, la prima operazione, che di 8 bianche che erano ne fa rimaner sette. Io mi accosterò più al giusto, se domando sei permutazioni piuttosto che cinque, perchè le combinazioni sinistre, e le utili in cinque permutazioni stanno fra loro :: 38988839 : 28120025, cioè :: 1.38 : 1 prossimamente; laddove in sei permutazioni la proporzione delle sinistre alle utili è quella di 4988136990 : 5749281250, ovvero di 1 : 1.15 a un dipresso; e s'accostan più all'eguaglianza i due numeri 1, 1.15 di quel che faccian gli altri 1.38, 1.

56. Non posso dissimular l'incomodo, che reca al calcolatore il metodo che ho presentato per il ritrovamento de' moltiplicatori, perchè a determinar qualunque moltiplicatore relativamente ad una qualche ipotesi, è necessario che si sappia il moltiplicatore analogo dell'ipotesi precedente; questo suppone noto l'analogo della ipotesi, che va avanti a quest'ultima, e così via via finchè con passo retrogrado si arrivi alla prima ipotesi dell'evento $n-2$. Onde se, per esempio, dati i due moltiplicatori pel primo evento, si vogliano determinare i sette moltiplicatori, che son richiesti dalla ipotesi dell'evento $n-7$, sarà d'uopo coll'ajuto de' due primi trovare i tre moltiplicatori per l'evento $n-3$, poi i quattro per l'evento $n-4$ ecc. fino ai sette moltiplicatori per l'ultimo che domandiamo. Quest' incomodo però resta di molto diminuito, ove diasi un valor numerico alla specie n, come si suol fare all' occasione che vengano in pratica simili quesiti; e in tal caso, quando non siano assai grandi il numero di tutte le palle bianche, e quel delle bianche, che si voglion tolte dall'urna, con poche operazioni numeriche si fanno nascere i moltiplicatori di tutte le ipotesi che precedon quest'ultima, e si assegnano a questa stessa i competenti moltiplicatori. Anche l'uso de' logaritmi, massime nelle moltiplicazioni che far si debbono per trovare i termini delle serie delle combinazioni, potrà contribuire a facilitar vie più la faccenda; e considerando insieme ogni cosa, si dovrà per avventura concludere, che in un problema di non mediocre difficoltà, come il nostro, l'esposto metodo sia effettivamente un de' più semplici e de' men laboriosi.

57. Per ſoddisfar nondimeno chi amaſſe una maggior generalità anche a coſto della ſpeditezza, e per la determinazione de' moltiplicatori che eſige un evento dato non voleſſe aver biſogno di ſcorrere per le ipoteſi di tutti gli eventi anteriori, ci riman da ultimo di trovar la maniera di generalizzare queſti moltiplicatori medeſimi, e di racchiudere in tante formole uniche i moltiplicatori che ſpettano a tutti i poſſibili eventi. Queſt' è ciò che noi eſeguiremo ne' ſuſſeguenti paragrafi; premeſſa però la ſoluzione del preſente

PROBLEMA XIII.

58. *Sia la formola generale (M)* $\phi = az^{m} + bz^{m-1} + cz^{m-2} + dz^{m-3} + ez^{m-4} + fz^{m-5} + gz^{m-6}$ ecc., *indi un' altra formola (N)* $y = pz^{m+1} + qz^{m} + rz^{m-1} + sz^{m-2} + tz^{m-3} + uz^{m-4} + xz^{m-5}$ ecc. *Stabilito che* z *vada calando dell' unità poſitiva, onde, ſervendoſi della maniera di ſcrivere le differenze finite, ſia* $z - z' = \delta z = 1$ *; e ſuppoſto che ſia* $y - y' = \delta y = \phi$ *, ſi cerca* y *, cioè ſi domandano i valori delle indeterminate* p, q, r, s ecc. *dati per* m, *e per le altre cognite* a, b, c, d ecc.

La ſoluzione di queſto problema è facile, ſe farem uſo del teorema notiſſimo compreſo in queſta equazione; $\delta y = dy - \frac{d^2y}{2} + \frac{d^3y}{2.3} - \frac{d^4y}{2.3.4} + \frac{d^5y}{2.3.4.5}$ ecc. in cui i d rappreſentano le differenziazioni ordinarie, ciaſcuna delle quali eſeguita, conviene cangiare la differenza dz, che ha ciaſcun termine in δz, cioè in 1. Imperocchè, in virtù di queſto teorema, avremo

$$dy = (m+1).pz^{m} + mqz^{m-1} + (m-1)rz^{m-2} + (m-2)sz^{m-3} + (m-3)tz^{m-4} + (m-4)uz^{m-5} \text{ ecc.}$$

$$d^2y = m(m+1)pz^{m-1} + (m-1)mqz^{m-2} + (m-2)(m-1)rz^{m-3} + (m-3)(m-2)sz^{m-4} + (m-4)(m-3)tz^{m-5} \text{ ecc.}$$

$$d^3y = (m-1)(m)(m+1).pz^{m-2} + (m-2)(m-1)(m)qz^{m-3} + (m-3)(m-2)(m-1)rz^{m-4} + (m-4)(m-3)(m-2)sz^{m-5} \text{ ecc.}$$

$$d^4y=(m-2)(m-1)(m)(m+1)pz^{m-3}+(m-3)(m-2)(m-1)(m)qz^{m-4}$$
$$+(m-4)(m-3)(m-2)(m-1)rz^{m-5} \text{ ecc.}$$
$$d^5y=(m-3)(m-2)(m-1)(m)(m+1)pz^{m-4}$$
$$+(m-4)(m-3)(m-2)(m-1)(m)qz^{m-5} \text{ ecc.}$$
$$d^6y=(m-4)(m-3)(m-2)(m-1)(m)(m+1)pz^{m-5} \text{ ecc.},$$

e quindi ecc.

$$(O)\ \delta y=(m+1)pz^m+\left(-\frac{m.(m+1)}{2}p+mq\right)z^{m-1}$$
$$+\left(\frac{(m-1)(m)(m+1)}{2.3}p-\frac{(m-1)(m)}{2}q+(m-1)r\right)z^{m-2}$$
$$+\left(-\frac{(m-2)(m-1)(m)(m+1)}{2.3.4}p+\frac{(m-2)(m-1)(m)q}{2.3}\right.$$
$$\left.-\frac{(m-2)(m-1)r}{2}+(m-2)s\right)z^{m-3}+\left(\frac{(m-3)(m-2)(m-1)(m)(m+1)p}{2.3.4.5}\right.$$
$$-\frac{(m-3)(m-2)(m-1)(m)q}{2.3.4}+\frac{(m-3)(m-2)(m-1)r}{2.3}$$
$$\left.-\frac{(m-3)(m-2)s}{2}+(m-3)t\right)z^{m-4}$$
$$+\left(-\frac{(m-4)(m-3)(m-2)(m-1)(m)(m+1)p}{2.3.4.5.6}\right.$$
$$+\frac{(m-4)(m-3)(m-2)(m-1)(m)q}{2.3.4.5}-\frac{(m-4)(m-3)(m-2)(m-1)r}{2.3.4}$$
$$\left.+\frac{(m-4)(m-3)(m-2)s}{2.3}-\frac{(m-4)(m-3)t}{2}+(m-4)u\right)z^{m-5}.\text{ecc.}$$

Altro pertanto non resta da fare che confrontare i termini di questa equazione colla equazione $\phi=$ ecc., e troveremo i valori delle suddette indeterminate p, q, ecc. Il confronto de' primi termini ci offre l'equazione $(m+1)p=a$, che dà $p=\frac{a}{m+1}$. Dal confronto de' secondi risulta $-\frac{(m)(m+1)}{2}p+mq=b$, o, sostituito il valore di p, e fatte le dovute operazioni, $q=\frac{b}{m}+\frac{a}{2}$. Coi confronti poi de' termini susseguenti ci verran date le altre indeterminate, le quali io dispongo per ordine, principiando dalla prima;

$$p=\frac{a}{m+1};\ q=\frac{b}{m}+\frac{a}{2};\ r=\frac{c}{m-1}+\frac{b}{2}+\frac{ma}{2.2.3};$$

$$s=\frac{d}{m-2}+\frac{c}{2}+\frac{(m-1)b}{2.2.3}+a.0;\ t=\frac{e}{m-2}+\frac{d}{2}+\frac{(m-2)c}{2.2.3}+b.0-\frac{(m-2)(m-1)(m)a}{2.3.2.3.4.5};\ u=\frac{f}{m-4}+$$

$$\frac{e}{2}+\frac{(m-3)d}{2.2.3}+c.0-\frac{(m-3)(m-2)(m-1)}{2.3.2.3.4.5}.b+a.0;$$

$$x=\frac{g}{m-5}+\frac{f}{2}+\frac{(m-4)e}{2.2.3}+d.0-\frac{(m-4)(m-3)(m-2)c}{2.3.2.3.4.5}+b.0+\frac{(m-4)(m-3)(m-2)(m-1)(m)a}{2.3.2.3.4.5.6.7.}\ \text{ecc.}$$

La legge de' due primi termini in tutti i valori di queste indeterminate è chiara. Cominciando poi la serie de' rimanenti dai terzi termini, veggiamo, che i termini nelle sedi pari son nulli, che quelli delle sedi dispari progrediscono coi segni alterni, e che il numero de' fattori, ne' quali entra la m pei termini delle sedi dispari seguita la legge de' numeri dispari 1, 3, 5, 7 ecc. Quanto alla legge de' coefficienti numerici, non bisogna lasciarsi ingannare da que' pochi valori delle specie p, q, r ecc. che abbiamo determinato, coi quali potrebbe parere, che i numeratori de' termini non avessero altro coefficiente numerico che l' unità. Se si va avanti fino al nono termine delle equazioni generali, cosicchè sia $\phi=az^m\ldots.+bz^{m-1}+iz^{m-8}$ ecc., $\gamma=pz^{m+1}\ldots.+yz^{m-6}+\pi z^{m-7}$, si trova $\pi=\frac{i}{m-7}+\frac{h}{2}+\frac{(m-6)g}{2.2.3}$

$$+f.0-\frac{(m-6)(m-3)(m-4).c}{2.3.2.3.4.5.}$$
$$+d.0+\frac{(m-6)(m-5)(m-4)(m-3)(m-2).c}{2.3.2.3.4.5.6.7}+b.0$$
$$-\frac{3(m-6)(m-5)(m-4)(m-3)(m-2)(m-1)(m)a}{2.5.2.3.4.5.6.7.8.9};$$

ove si vede che apparisce il 3 nel numeratore dell' ultimo termine. La vera regola, colla quale si determinano questi coefficienti, è la seguente, come ciascuno può verificare. Si ponga per comodo $\frac{1}{2.2.3}=\omega$, e farà $\frac{1}{2.3.2.3.4.5}=\frac{-3}{2.2.3.4.5}+\frac{\omega}{2.3}$. Quest' omogeneo di comparazione si faccia $=\omega'$, e risulta $\frac{1}{2.3.2.3.4.5.6.7}=\frac{5}{2.2.3.4.5.6.7}-\frac{\omega}{2.3.4.5}+\frac{\omega'}{2.3}$, cui sia $=\omega''$; ed avremo $\frac{3}{2.5.2.3.4.5.6.7.8.9}=\frac{-7}{2.2.3.4.5.6.7.8.9}+\frac{\omega}{2.3.4.5.6.7}-\frac{\omega'}{2.3.4.5}+\frac{\omega''}{2.3}$ ecc. colla legge, che è manifesta.

PROBLEMA XIV.

59. *Dato il generale evento di bianche* $n-z-1$, *determinare il primo moltiplicatore generale della serie ricorrente contraria di grado* $z+1$, *che al dato evento conviene.*

Abbiam veduto al §. 49, che il primo moltiplicatore generale è eguale alla somma della serie $2(n-2)+4(n-2)+6(n-3)+\ldots\ldots+2(z-1)(n-z+1)+2z(n-z)$, che suppongo $=\gamma$. Or poichè questa serie diminuita dell' ultimo termine $2z(n-z)$ è quel che diventa y, se in esso in vece di z si pone $z-1$, sarà $2(n-1)+4(n-2)+6(n-3)\ldots . 2(z-1)(n-z+1) = y'$, pel precedente Problema, e quindi $y-y'$, ossia $\delta y = 2z(n-z) = -2z^2+2nz$. S' instituisca il paragone di questa equazione col canone (O) del §. 58, ed avremo $m=2$; $(m+1)p=-2$, ovvero $p=-\frac{2}{3}$ col confronto de' primi termini. Quel de' secondi ci somministra l' equazione $-3p+2q=2n$, da cui colla sostituzione del valore di p si trae $q=n-1$. Perchè poi manca il termine costante nella nostra formola, sarà col paragone de' termini $p-q+r=0$, cioè $r=$ $=-p+q=n-1+\frac{2}{3}=\frac{3n-1}{3}$. Introducansi ora questi valori nella formola generale (N) del §. 58, e si avrà la somma della serie $y=\frac{-2z^3}{3}+(n-1)z^2$ $+\frac{(3n-1)z}{3}+s$. La specie s verrà determinata dalla condizione, che, quando $z=1$, sia la somma della nostra serie eguale al primo termine $2(n-1)$; onde nasce $-\frac{2}{3}+n-1+\frac{3n-1}{3}+s=2n-2$, ossia $-\frac{2+3n-3+3n-1}{3}+s=2n-2$ cioè $\frac{6n-6}{3}+s$ $=2n-2$, che dà $s=0$. Poichè $\delta y=\phi$, poteasi pure fare il confronto del nostro termine generale $-2z^2$ $+2nz$ colla formola (M) del §. 58, e trarne quindi i valori de' simboli m, a, b, ecc. Ecco ciò che ne sarebbe risultato; $m=2$, $a=-2$, $b=2n$, $c=0$. Dunque, per le generali determinazioni delle specie p, q ecc., $p=-\frac{2}{3}$, $q=n-1$, $r=\frac{3n-1}{3}$, come s'è già trovato.

trovato. Da ciò ſi deduce, che il primo moltiplicatore della ricorrente contraria pel generale evento di bianche $n-z-1$, ſarà $=\frac{-2z^3+3nz^2-3z^2+3nz-z}{3}$ $=(z+1)\left(zn-\frac{2z^2+z}{3}\right)$.

PROBLEMA XV.

60. *Dato il generale evento di bianche* $n-z-1$, *determinare il ſecondo moltiplicatore della ſerie contraria di grado* $z+1$, *che al dato evento conviene.*

Sia θ una funzione qualunque di z; θ' quel che diventa θ, ſe in eſſo ſi pone $z-1$ in vece di z; θ'' ciò che divien θ', ſe in θ ſi mette un'altra volta $z-1$ in luogo di z; ecc. La teoria delle differenze finite ci ſomminiſtra altrettante ſerie quanti ſono i θ', θ'' ecc., per mezzo delle quali vengon dati gl'iſteſſi θ', θ'' ecc. pel primo ſimbolo θ; e ſi ha.

$$(P)\ \theta'=\theta-d\theta+\frac{d^2\theta}{2}-\frac{d^3\theta}{2.3}+\frac{d^4\theta}{2.3.4}-\frac{d^5\theta}{2.3.4.5}+\frac{d^6\theta}{2.3.4.5.6}\text{ ecc.}$$

$$(Q)\ \theta''=\theta-2d\theta+\frac{2^2d^2\theta}{2}-\frac{2^3d^3\theta}{2.3}+\frac{2^4d^4\theta}{2.3.4}-\frac{2^5d^5\theta}{2.3.4.5}\text{ ecc.}$$

ove i d ſignificano le differenziazioni ordinarie. Delle due ſerie notate, la prima ci è utile per trovare il noſtro ſecondo moltiplicatore; tutte e due per trovare i ſeguenti. Si richiami a tal fine la formola del §. 51. che è $\gamma=-2z(n-z)\alpha'+\gamma'+z^2(n-z+1)^2$, in cui γ rappreſenta il ſecondo moltiplicatore, α il primo, e α' ciò che diventa α ſe in eſſo in vece di z ſi pone $z-1$. Sarà $\gamma-\gamma'=\delta\gamma=-2z(n-z)\alpha'+z^2(n-z+1)^2$. Or poichè $\alpha=\frac{-2z^3+3nz^2-3z^2+3nz-z}{3}$, fatto $\theta=\alpha$, e ſoſtituito 1 in vece di dz, avrem pel canone (P)

$$\alpha' = \frac{-2z^3+3nz^2-3z^2+3nz-z}{3} + \frac{6z^2-6nz+6z-3n+1}{3}$$

$$+ \frac{-6z+3n-3}{3} + \frac{2}{3}; \text{ ovvero } \alpha' = \frac{-2z^3+(3n+3)z^2-(3n+1)z}{3};$$

e perciò $\delta\gamma = 2z(n-z)\frac{(2z^3-(3n-3)z^2+(3n+1)z}{3} + z^2(n-z+1)^2 =$

$$\frac{-4z^5+(10n+9)z^4-(6n^2-18n-)z^3+(9n^2+8n+3)z^2.}{3}$$

Paragonisi questa formola colla generale (M), e risulterà $m=5$, $a=-\frac{4}{3}$, $b=\frac{10n+9}{3}$, $c=\frac{-6n^2-18n-8}{3}$, $d=\frac{9n^2+8n+3}{3}$, $e=o$, $f=o$, perchè manca il termine, in cui z sia alla prima dimensione, e il termine costante. Sostituendo poi questi valori di m, a, b ecc. nelle generali determinazioni de' simboli p, q ecc., si ha $p=-\frac{2}{3^2}$, $q=\frac{10n-1}{3.5}$, $r=\frac{-9n^2+3n+5}{2.3^2}$, $s=-n$, $t=\frac{18n^2-3n-1}{2.3^2}$, $u=\frac{15n^3+10n+2}{2.3.5}$;

onde

$$\gamma = \frac{-20z^6+\overline{60n-6}z^5-\overline{45n^2+15n+25}z^4-90nz^3+\overline{90n^2-15n-5}z^2+\overline{45n^2+30n+6}z.}{2.3.3.5}$$

Non aggiungo alcun termine costante, perchè essendo la differenza finita $\delta\gamma$ un aggregato di termini moltiplicato per z^2, e annullandosi essa quando $z=o$, nella stessa ipotesi anche l'integrale γ debb'esser zero. Sicchè sarà noto il secondo moltiplicatore generale, che compete alla nostra serie, e noi l'esprimeremo in quest'altra forma equivalente;

$$\frac{z(z+1)}{2}\left(-(z^2+z+1)n^2+\frac{(4z^3-3z^2-3z+2)}{3}n+\frac{-20z^4+14z^3+11z^2-11z+6}{3.3.5}\right).$$

PROBLEMA XVI.

61. *Dato il generale evento di bianche* $n-z-1$, *determinare il terzo moltiplicatore della ſerie contraria di grado* $z+1$, *che al dato evento conviene*.

Pel §. 51. abbiamo il terzo moltiplicatore $\gamma = -2z(n-z)\beta' + \gamma' - z^2(n-z+1)^2.\alpha''$, i ſimboli α, β denotando il primo e il ſecondo moltiplicatore già ritrovati: e quindi $\gamma-\gamma'=\delta\gamma=-2z(n-z)\beta'-z^2(n-z+)^2\alpha''$. Dal valore di $\beta =$

$$\frac{-20z^6+\overline{60n-6}.z^5-\overline{45n^2+15n+25}.z^4-90nz^3+\overline{90n^2-15n-5}.z^2+\overline{45n^3+30n+6}\times z}{2.3.3.5}$$

ſi deduce col mezzo del canone (P)

$$\beta'=\frac{-20z^6+\overline{60n+114}.z^5-\overline{45n^2-285n-245}.z^4+\overline{180n^2+450n+240}.z^3-\overline{180n^2+255n-95}.z^2+\overline{45n^2+30n+6}.z}{2.3.3.5};$$

e dal valore di $\alpha = \dfrac{-2z^3+(3n-3)z^2+(3n-1)z}{3}$ col ſecondo canone (E) ſi trae

$$\alpha''=\frac{-2z^3+(3n+9)z^2+(-9n-13)z+6n+6}{3}.$$

Colla introduzione poi di queſti valori nella ſuperior formola $\delta\gamma = -2z(n-z)\,\beta'-z^2(n-z+1)^2\alpha''$ ſi otterrà dopo le neceſſarie riduzioni

$$\delta\gamma=\frac{1}{3.3.5}\big(-20z^8+(80n+144)z^7+(-105n^2-504n-440)z^6+(45n^3+585n^2+1250n+735)z^5$$
$$+(-225n^3-1125n^2-1560n-710)z^4+(315n^3+945n^2+1010n+381)z^3+(-135n^3-300n^2-276n-90)z^2\big)$$

Queſta formola dovrà eſſere confrontata col canone (M) per le determinazioni delle ſpecie m, a, b ecc., onde ſi rendano anche noti gli altri ſimboli p, q, r ecc. e ſi abbia finalmente il ſuo integrale che ſarà il terzo moltiplicatore ricercato. Ma ſe a motivo de' coefficienti delle podestà di z molto complessi si trovasse più comodo d' integrar per parti la suddetta formola differenziale, bisognerebbe in tal caso trasformarla in quest' altra equivalente

$$\delta y = (z^5 - 5z^4 + 7z^3 - 3z^2)n^3 + \frac{(-7z^6 + 39z^5 - 75z^4 + 63z^3 - 20z^2)n^2}{3}$$
$$+ \frac{(80z^7 - 504z^6 + 1250z^5 - 1560z^4 + 1010z^3 - 276z^2)n}{3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot}$$
$$+ \frac{-20z^8 + 144z^7 - 440z^6 + 735z^5 - 710z^4 + 381z^3 - 90z^2}{3 \cdot 3 \cdot 5},$$

e considerare che ogni fattore delle podestà di n sia una formola di differenze finite. Integrato pertanto ciascuno di questi fattori coll' ajuto del canone (M), senza aggiunger costante, che non ha luogo, si troverà il terzo moltiplicatore domandato dal Problema $=$

$$\frac{(z-1)z(z+1)}{2 \cdot 3}\Big((z^3 - 3z^2 - z + 2)n^3 + \frac{(-6z^4 - 18z^3 - 15z + 6)n^2}{3}$$
$$+ \frac{(60z^5 - 192z^4 + 78z^3 + 174z^2 - 102z + 36)n}{3 \cdot 3 \cdot 5}$$
$$+ \frac{-280z^6 + 1008z^5 - 808z^4 - 693z^3 + 1061z^2 - 126z + 144}{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}\Big).$$

PROBLEMA XVII.

62. *Dato il generale evento di bianche* $n - z - 1$, *determinare il quarto moltiplicatore della serie contraria di grado* $z + 1$, *che al dato evento conviene*.

Rappresentando γ secondo il solito questo quarto moltiplicatore, sarà α il secondo moltiplicatore, e β il terzo, che son già noti. Si passi dunque col canone $(\mathcal{Q})$ dal valore di α a quello di α'', e dal valore di β a quello di β', e si sostituiscano questi nuovi valori nella formola generale $\delta\gamma = -2z(n-z)\beta' - z^2(n-z+1)^2\alpha''$. Si avrà $\delta\gamma$ dato per z e per n; e l' integrazione di que-d' essi, ovvero quanto è l' esponente massimo di z nella formola, che moltiplica la podestà massima di n. Di più, che l' unico fattore del primo moltiplicatore è diviso per 1, i due del secondo per 1.2, i tre del terzo per 1.2.3; i quattro del quarto per 1.2.3.4; per conseguenza i fattori numero m del moltiplicatore denominato da m saranno divisi da' $1.2.3.4....(m-1)m$: Finalmente che cresce successivamente di un' unità l' esponente massimo di z nelle formole moltiplicatrici delle podestà di n decrescenti successivamente d' un' unità in ciascun moltiplicatore; e medesimamente cresce di un' unità l' esponente massimo di z nelle formole che moltiplicano la podestà massima di n, ove si passi da un moltiplicatore al suo immediatamente susseguente.

64. Queste cose poste, per evitare di far tante divisioni ne' moltiplicatori trovati coll' anzidetto metodo, quanti sono i loro fattori, onde ridurli a forma più comoda, potrebbe cadere opportuna la soluzione del presente

PROBLEMA XVIII.

65. *Ritrovare per ciascun moltiplicatore le formole moltiplicatrici delle podestà di* n, *che unitamente costituiscono il quoziente dell' intero moltiplicatore diviso pe' suoi respettivi fattori.*

A questo fine stabilisco tre qualunque moltiplicatori generali, che si succedono l'un dopo l'altro. L'antepenultimo sia

$$A=\frac{(z+1)z(z-1)..(z-m+4)}{1.2.3...(m-2)}(an^{m-2}+bn^{m-3}+cn^{m-4}+en^{m-5}+fn^{m-6}...ecc.).$$

Il penultimo

$$B=\frac{(z+1)z(z-1)..(z-m+3)}{1.2.3...(m-1)}(\alpha n^{m-1}+\beta n^{m-2}+\gamma n^{m-3}+\epsilon n^{m-4}+\phi n^{m-5}..ecc.).$$

L' ultimo, che si cerca

$$C=\frac{(z+1)z(z-1)..(z-m+2)}{1.2.3...m}\left(sn^m+tn^{m-1}+un^{m-2}+xn^{m-3}+yn^{m-4}...\text{ecc.}\right).$$

Le ſpecie a, b, c ecc., α, β, γ ecc., s, t, u ecc. ſono funzioni di z. Siano in oltre A', B', C', a', b', c' ecc., α', β' ecc., s', t' ecc. ciò che diventano A, B, C, a ecc., ſe in queſte ſi pone $z-1$ in vece di z; ed A'', B'', C'', a'' ecc. ciò che diventano A', B', C', a' ecc. ſe in eſſe ſi pone un' altra volta $z-1$ in vece di z. Sarà

$$A'=\frac{z(z-1)..(z-m+3)}{1.2.3...(m-2)}\left(a'n^{m-2}+b'n^{m-3}+c'n^{m-4}+e'n^{m-5}+f'n^{m-6}..\text{ecc.}\right);$$

$$A''=\frac{(z-1)(z-2)..(z-m+2)}{1.2.3..(m-2)}\left(a''n^{m-2}+b''n^{m-3}+c''n^{m-4}+e''n^{m-5}+f''n^{m-6}..\text{ecc.}\right);$$

$$B'=\frac{z(z-1)..(-m+2)}{1.2.3..(m-1)}\left(\alpha'n^{m-1}+\beta'n^{m-2}+\gamma'n^{m-3}+\varepsilon'n^{m-4}+\phi'n^{m-5}..\text{ecc.}\right);$$

$$C'=\frac{z(z-)..(z-m+1)}{1.2.3...m}\left(s'n^m+t'n^{m-1}+u'n^{m-2}+x'n^{m-3}+y'n^{m-4}..\text{ecc.}\right).$$

Dunque $C-C'=\delta C=$

$$\frac{z(z-1)..(z-m+2)}{1.2.3...m}\Big(\left((z+1)(s-s')+ms'\right)\times n^m+\left((z+1)(t-t')+mt'\right)\times n^{m-1}+\left((z+1)(u-u')+mu'\right)\times n^{m-2}+\left((z+1)(x-x')+mx'\right)\times n^{m-3}+\left((z+1)(y-y')+my'\right)\times n^{m-4}\text{ ecc.}\Big).$$

Ma, per la formola determinatrice de' noſtri moltiplicatori abbiamo anche $\delta C=-2z(n-z)B'-z^2(n-z+1)^2A''$, cioè, dopo la ſoſtituzione de' valori di B', A'', e l' opportuna riduzione;

$$\delta C=\frac{z(z-1)..(z-m+2)}{1.2.3...m}\Big(-\left(m(m-1)za''+2mz\alpha'\right)\times n^m$$
$$+\left(2m(m-1)(z-1)za''-m(m-1)zb''+2mz^2\alpha'-2mz\beta'\right)\times n^{m-1}$$
$$-\left(m(m-1)(z-1)^2za''+2m(m-1)(z-1)zb''-m(m-1)zc''+2mz^2\beta'-2mz\gamma'\right)\times n^{m-2}$$
$$-\left(m(m-1)(z-1)^2zb''+2m(m-1)(z-1)zc''-m(m-1)ze''+2mz^2\gamma'-2mz\varepsilon'\right)\times n^{m-3}\text{ ecc.}\Big)$$

con ordine pe' ſeguenti termini ſimile a quello, che comincia nel terzo termine. Poſto pertanto δs, δt, δu ecc. in vece di $s-s'$, $t-t'$, $u-u'$ ecc., e di più $s-\delta s$, $t-\delta t$, $u-\delta u$ in vece di s', t', u'; ed agguagliati i due valori di δC, col levare gli eguali fattori riſulta l' equazione;

$$\begin{aligned}
&\big((z-(m-1))\delta s+ms\big)\times n^m+\big((z-(m-1))\delta t+mt\big)\times n^{m-1}\\
&+\big((z-(m-1)(\times\delta u+mu\big)\times n^{m-2}+\big((z-(m-1))\times\delta x+mx\big)\times n^{m-3}\text{ecc.}\\
&=\big(-m(m-1)za'-2mz\alpha'\big)\times n^m\\
&+\big(2m(m-1)(z-1(za''-m)m-1)zb''+2mz^2\alpha'-2mz\beta'\big)\times n^{m-1}\\
&+\big(-m(m-1)(z-1)^2za''+2m(m-1)(z-1)zb''-m(m-1)zc''\\
&+2mz^2\beta'-2mz\gamma'\big)\times n^{m-2}+\big(-m(m-1)(z-1)^2zb''\\
&+2m(m-1)(z-1)zc''-m(m-1)zc''+2mz^2\gamma'-2mz\epsilon'\big)\times n^{m-3}\text{ ecc.}
\end{aligned}$$

ove le formole, che nel primo membro moltiplicano le podeſtà di n debbono eſſere identiche colle formole, che moltiplicano le podeſtà analoghe di n nell' omogeneo di comparazione. Ora, ſiccome m è quantità nota, e ſon pur note le ſpecie a, b, c ecc. α, β, γ ecc., perchè appartengono ai due cogniti moltiplicatori i quali immediatamente precedono il moltiplicatore C; e quindi, pei canoni (P) (Q) le altre, che ne derivano, a'', b'', c'' ecc. α', β', γ' ecc., non reſterà a far altro, che dar per queſte i ſimboli incogniti s, t, u ecc., onde eſibire il ricercato quoziente del moltiplicatore C, e in conſeguenza lo ſteſſo moltiplicatore.

66. Ad ottener ciò, ſtabiliſco in genere

$$S=Fz^r+Gz^{r-1}+Hz^{r-2}+Iz^{r-3}+Lz^{r-4}\text{ ecc.},$$

Sarà pel canone (O) del §. 58.

$$\delta S=rFz^{r-1}+\Big(\frac{-r(r-1)F}{2}+(r-1)G\Big)\times z^{r-2}$$

$$+\Big(\frac{r(r-1)(r-2)F}{2.3}-\frac{(r-1)(r-2)}{2}G+(r-2)H\Big)\times z^{r-3}\ldots\text{ecc.},$$

da che ſi ricava, eſſere

$$(z-(m-1))\delta S+mS=\big((r+m-1)F+F\big)\times z^r$$

$$+\left(\frac{-r(r+2m-3)}{2}F+(r+m-2)G+G\right)z^{r-1}+$$

$$\left(\frac{r(r-1)(r+3m-5)}{2.3}F-\frac{(r-1)(r+2m-4)}{2}G+(r+m-3)H+H\right)z^{r-2}$$

$$+\left(\frac{-r(r-1)(r-2)(r+4m-7)}{2.3.4}F+\frac{(r-1)(r-2)(r+3m-6)}{2.3}G\right.$$

$$\left.-\frac{(r-2)(r+2m-5)}{2}H+(r+m-4)I+I\right)z^{r-3}\ \text{ecc.}$$

La legge di questa serie è di per sè manifesta, e quando uopo il voglia, si potrà produrla fino a quel numero di termini che esigerà la natura delle formole, e il numero de' termini, dai quali vengono costituite.

67. Domandisi ora pel moltiplicatore C denominato da m la formola che moltiplica n^m, sarà $r=m$, $S=s$, e però $s=Fz^m+Gz^{m-1}+Hz^{m-2}+Iz^{m-3}$ ecc., ed avrassi $(z-(m-1))\,\delta s+ms$, ovvero

$$((2m-1)F+F)\times z^m+\left(\frac{-m(3m-3)}{2}F+(2m-2)G+G\right)\times z^{m-1}$$

$$+\left(\frac{m(m-1)(4m-5)}{2.3.}F-\frac{(m-1)(3m-4)}{2}G+(2m-3)H+H\right)\times z^{m-2}$$

$$+\left(\frac{-m(m-1)(m-2)(5m-7)}{2.3.4}F+\frac{(m-1)(m-2)(4m-6)}{2.3}G\right.$$

$$\left.-\frac{(m-2)(3m-5)}{2}H+(2m-4)I+I\right)\times z^{m-3}\ \text{ecc.}=$$

$-m(m-1)z\,a''-2mz\,\alpha'$. Essendo note in questo secondo membro le funzioni a'', α', che appartengono ai moltiplicatori precedenti, se si sostituiranno i loro valori dati per z, nascerà nell' omogeneo una formola, in cui sarà m il massimo esponente di z; e confrontando i termini che ne risultano cogli analoghi del primo membro, si determineranno i valori di F, G, H ecc. onde resterà nota la formola, che nel moltiplicatore C denominato da m moltiplica n^m.

68. Compiuta queſt' operazione, ſi dee procedere a trovar la formola t, che in C moltiplica n^{m-1}. Rammentiamci, aver noi detto al §. 63, che il maſſimo eſponente di z in t diventa $m+1$, e vedremo che ſi dovrà por $r=m+1$. Fatto poi $S=t$, è neceſſario che ſi verifichi queſta equazione: $(z-(m-1))\,\delta t+mt$, oſſia

$$(2mF+F)\times z^{m+1}+\left(\frac{-(m+1)(3m-2)}{2}F+(2m-1)G+G\right)\times z^{m}$$
$$+\left(\frac{(m+1)m(4m-4)}{2.3}F-\frac{m(3m-3)}{2}G+(2m-2)H+H\right)\times z^{m-1}$$
$$+\left(\frac{-(m+1)m(m-1)(5m-6)}{2.3.4}F+\frac{m(m-1)(4m-5)}{2.3}G\right.$$
$$\left.-\frac{(m-1)(3m-4)}{2}H+(2m-3)I+I\right)z^{m-2}\text{ ecc.}$$
$$=2m(m-1)(z-1)z\,a''-m(m-1)z\,b''+2mz^{2}\alpha'-2mz\beta'.$$

Qui pure eſſendo note le funzioni a'', b'', α', β', colla ſoſtituzione de' loro valori in queſt' ultimo membro, coſtituiremo una formola, in cui il maſſimo eſponente di z arriva a $m+1$; e il confronto de' termini con quelli che lor corriſpondono nella prima parte dell' equazione darà i valori di F, G, H ecc. e renderà nota la formola t, che in C moltiplica n^{m-1}.

69. Al terzo termine del moltiplicatore C, in cui avvi n^{m-2}, corriſponde $r=m+2$; $S=u=Fz^{m+2}+Gz^{m+1}+Hz^{m}+Iz^{m-1}$ ecc., onde $(z-(m-1))\,du+mu$, ovvero

$$((2m+1)F+F)\times z^{m+2}+\left(\frac{-(m+2)(3m-1)}{2}F+2mG+G\right)\times z^{m+1}$$
$$+\frac{(m+2)(m+1)(4m-3)}{2.3}F+\left(\frac{-(m+1)(3m-2)}{2}G+(2m-1)H+H\right)\times z^{m}$$
$$+\left(\frac{-(m+2)(m+1)m(5m-5)}{2.3.4}F+\frac{(m+1)m(4m-4)}{2.3}G\right.$$
$$\left.-\frac{m(3m-3)}{2}H+(2m-2)I+I\right)\times z^{m-1}\text{ ecc.}=$$

$-m(m-1)z(z-1)^2 a'' + 2m(m-1)z(z-1)b''$ $-m(m-1)zc'' + 2mz^2\beta' - 2mz\gamma'$. La fostituzione de' valori cogniti delle funzioni a'', b'', c'', β', γ', e il confronto de' termini analoghi ne' due membri dell'equazione faran conofcere le indeterminate F, G, H ecc., e in confeguenza il terzo termine del moltiplicatore C.

70. Modificata poi la fuddetta ferie al valore che riceve r nel quarto termine di C, fi dee far l'eguaglianza tra effa, e $-m(m-1)z(z-1)^2 b'' + 2m(m-1)z(z-1)c''$ $-m(m-1)zc'' + 2mz^2\gamma' - 2mz\epsilon'$; e la forma sì di quefto come dell'antecedente omogeneo di comparazione farà quella che mantengono tutti i fuffeguenti. Perilchè refta trovata la maniera d'efibire l'intero quoziente, e per confeguenza l'intero moltiplicatore C che fi cercava. Quefto metodo ferve per tutti quanti i moltiplicatori della ricorrente generale, detratto il primo; e folo fi dee notare, che quando fi cerca il fecondo moltiplicatore, diventa $a'' = -1$, e gli altri fimboli b'', c'' ecc. fon zero.

71. Per la compiuta foluzione del Problema, che ci fiamo propofti nel §. 30, ci rimangono ancora da confiderare due eventi di palle bianche nell'urna A, i quali fan claffe a parte, ed hanno le lor ricorrenti delle combinazioni contrarie fuor della ferie generale, che s'è trovato appartenere all'evento di bianche $n-z-1$. Uno di quefti è $n-1$, l'altro n; cioè fi può domandare quante permutazioni mi fon neceffarie, perchè, ridotta l'urna A allo ftato di bianche $n-1$ che ho chiamato primitivo, riefca probabile, che in qualcuna d'effe avrò l'evento di bianche in A eguale a quello dello ftato primitivo; e quante ve ne vogliono, perchè fia probabile, che in alcuna d'effe io rimetta tutte le palle bianche nella prim'urna.

72. Ho detto, che quefti due cafi efcon fuori della regola generale degli altri eventi, e lo provo così. Se il generale evento di bianche $n-z-1$ abbracciaffe

eziandio questi due casi, potrebbero aver luogo le ipotesi di $z=0$, e di $z=-1$, che dà $z+1=0$. Colla prima la formola $n-z-1$ diventerebbe appunto $n-1$, e colla seconda si farebbe $n-z-1=n$. Ma ciascuno de' moltiplicatori generali della serie contraria all' evento $n-z-1$ avendo i due fattori z, $z+1$, e l'una e l'altra delle due ipotesi li ridurrebbe tutti a zero; la qual cosa annullerebbe il numero delle combinazioni contrarie ai detti eventi per qualunque corso di permutazioni. Dunque, o siam sicuri nel permutare di aver sempre quegli eventi, perchè tutte le combinazioni ci son propizie, o essi si sottraggono alla legge degli altri. E' palese l'assurdo, che abbiansi costantemente i due suddetti eventi, anche pel sol riflesso, che essendo tra lor diversi, uno esclude l'altro necessariamente; e perciò resta a dirsi, che essi domandano altre formole regolatrici, e ci somministrano argomento per due novelli Problemi. Sia pertanto

PROBLEMA XIX.

73. *Partendosi dallo stato primitivo di bianche* $n-1$ *nella prim' urna, si cerca il numero delle combinazioni contrarie ad aversi almeno una volta lo stesso stato* $n-1$ *nel corso di qualsivoglia numero di permutazioni.*

Forminsi le colonne degli eventi contrarj e delle respettive combinazioni nella maniera praticata dal primo insino al nono Problema; e avremo

per 1 permutazione; $n \;\; 1 \,|\, n\text{-}2 \;\; (n\text{-}1)^2 \,|$: quindi le combinazioni contrarie; $1+(n\text{-}1)^2$:

per 2 perm. $\begin{array}{ll|ll|} n\text{-}2 & (n\text{-}1)^2 & n\text{-}2 & (n\text{-}1)^2 \\ n\text{-}2 & 4(n\text{-}2) & n\text{-}3 & (n\text{-}2)^2 \end{array}$: comb. contr. $(n\text{-}1)^2(n\text{-}2)(n\text{-}+2)$:

per 3 perm. $\begin{array}{ll|ll|ll} n\text{-}2 & (n\text{-}1)^2 & n\text{-}2 & (n\text{-}1)^2 & n\text{-}2 & (n\text{-}1)^2 \\ n\text{-}2 & 4(n\text{-}2) & n\text{-}2 & 4(n\text{-}2) & n\text{-}3 & (n\text{-}2)^2 \\ n\text{-}2 & 4(n\text{-}2) & n\text{-}3 & (n\text{-}2)^2 & n\text{-}2 & 9 \end{array}$

ecc.	n-2	$(n-1)^2$	n-2	$(n-1)^2$	comb. contr.
	n-3	$(n-2)^2$	n-3	$(n-2)^2$	$(n-1)^2(n-2)^2(n^2+4n+8)$.
	n-3	$6(n-3)$	n-4	$(n-3)^2$	ecc.

Colla pazienza di andare avanti nella ricerca de' termini della ricorrente, si trova, che essi van con quest' ordine; $(n-1)^2+1$; $(n-1)^2(n-2)(n+2)$; $(n-1)^2(n-2)^2(n^2+4n+8)$; $(n-1)^2(n-2)^2(n^4+4n^3+8n^2-100)$; $(n-1)^2(n-2)^2(n^6+4n^5+8n^4-100n^2-760n+1736)$; $(n-1)^2(n-2)^2(n^8+4n^7+8n^6-100n^4-760n^3-4940n^2+32176n-39520)$ ecc., e l' esame di questa serie la farà conoscere una ricorrente di 4°. grado, che ha i moltiplicatori
1.° $(n-2)(-56n^4+528n^3-1152n^2)$; 2.° $79n^4-460n^3+156n^2+2208n-2304$; 3.° $-18n^3-21n^2+516n-796$; 4.° $n^2+18n-58$. Si avverta però, che il primo termine di questa serie non è già $(n-1)^2+1$, come porta il numero delle combinazioni, ma solamente $(n-1)^2$. Quell' unità di più deriva dalla possibilità dell' evento di bianche n in una sola permutazione, laddove esso non può mai aver luogo in nessuna delle susseguenti, perchè, ov' esso accada, l' altro $n-1$ gli tien dietro necessariamente: e qui si cercano i contrarj allo stesso evento $n-1$. Volendosi perciò stabilire il termine generale della nostra serie, che, giusta la nota regola delle ricorrenti deve aver questa forma; $ap^v+bq^v+cr^v+ds^v$, ad aversi il vero numero delle combinazioni contrarie per l' ipotesi di $v=1$, ossia pel caso d' una sola permutazione, aggiungerem l' unità al risultato esibito dalla formola; o anche, per aver sempre presente la necessità di quest' aggiunta, scriveremo il termine generale della ricorrente così: $o^{v-1}+ap^v+bq^v+cr^v+ds^v$. Per tal modo nella supposizione che sia il numero v delle permutazioni maggiore dell' unità, col primo termine o^{v-1} non si accrescerà niente al valore de' susseguenti, e sol nell' ipotesi di $v=1$ avrem $o^{v-1}=o^0=1$.

PROBLEMA ULTIMO.

74. *Partendosi dallo ſtato primitivo delle due urne, ſi cerca il numero delle combinazioni contrarie a rimettere almeno una volta in* A *tutte le bianche* n *nel corſo di qualſivoglia numero di permutazioni*,

Erette le colonne competenti a ciaſcuna permutazione, ſi avrà

per 1. permutazione: $n-1 \;\; 2(n-1) \mid n-2 \;\; (n-1)^2 \mid$; onde le combinazioni contrarie; $(n-1)(n+1)$;

per 2. perm. $\begin{array}{ll|ll|ll|ll} n\text{-}1 & 2(n\text{-}1) & n\text{-}1 & 2(n\text{-}1) & n\text{-}2 & (n\text{-}1)^2 & n\text{-}2 & (n\text{-}1)^2 \\ n\text{-}1 & 2(n\text{-}1) & n\text{-}2 & (n\text{-}1)^2 & n\text{-}1 & 4 & n\text{-}2 & 4(n\text{-}2) \end{array}$

ecc. $\begin{array}{ll} n\text{-}2 & (n\text{-}1)^2 \\ n\text{-}3 & (n\text{-}2)^2 \end{array}$; comb. contr. $(n\text{-}1)^2(n^2+2n+2)$. ecc.

Non noto altre colonne, perchè nelle ſucceſſive permutazioni creſce di molto il lor numero; e già ſi ſa come ſi debba formarle. La ſerie contraria, che da eſſe dimana, è la ſeguente;

$(n-1)(n+1)$; $(n-1)^2(n^2+2n+2)$; $(n-1)^2(n^4+2n^3+2n^2-8)$; $(n-1)^2(n^6+2n^5+2n^4-8n^3-40n+56)$; $(n-1)^2(n^8+2n^7+2n^6-8n^4-40n^3-188n^2+752n-608)$ ecc., che pure è una ricorrente di 4.° grado generata dai moltiplicatori:

1.° $(n-1)(-6n^4+72n^3-144n^2)$; 2.° $31n^4-142n^3+78n^2+216n-144$; 3.° $-12n^3-3n^2+148n-156$; 4.° $n^2+12n-28$.

75. Orniamo queſt'ultimo Problema di qualche eſempio. Sia il numero di bianche $n=1$. In tale ipoteſi ſi annullano tutti i termini della ricorrente contraria; il che ci dà una certezza di avere almeno una volta bianche 1 qualunque ſia il numero delle permutazioni che domandiamo. In fatti, eſſendo lo ſtato primitivo delle urne, che in *A* ſia ſolo una nera, e in *B* una ſola bianca, colla prima permutazione è manifeſto, che in *A* ſi trasferiſce la bianca, paſſando la nera nella ſe-

conda urna. Ciò avvenendo infallibilmente nella prima permutazione, poi nella terza, indi nella quinta ecc., è chiaro, che qualunque numero di permutazioni sia chiesto, sempre in una d' esse avrem sicuro l' evento dell' unica bianca; e quindi ogni combinazione ci sarà favorevole, e non ne avremo alcuna contraria.

76. Facciam transito all' altra ipotesi di bianche $n=2$: e per le due serie, contraria, e favorevole ci nasceran questi termini; 3, 10, 32, 104 ecc.,
1, 6, 32, 152 ecc.
che sono i medesimi con quelli che abbiam trovato al §. 38. per la probabilità dell' evento di bianche $n-2$, cioè di nessuna bianca nella stessa supposizione di bianche $n=2$. Dunque, ove tutte le bianche sian due, egli è lo stesso il cercare, quante siano le combinazioni, che menan l'evento di tutte le nere, e quante sian quelle che favoriscono il ritorno di tutte le bianche nella prim' urna: la qual cosa non sembrerà punto strana a chi fa la riflessione, che nello stato primitivo trovandosi una nera e una bianca in ciascun' urna, debb' essere egualmente difficile levar bianca dall' una, nera dall' altra, e condurre l' evento del §. 38., che levar nera dalla prima, bianca dalla seconda, e rimetter nella prima tutte le palle bianche.

77. Ma come conciliare nelle due ipotesi l' identicità del numero delle combinazioni coll' indole delle due serie, essendo quella del §. 38. sol di secondo grado, ed arrivando al quarto quella del presente Problema? Ciò si fa agevolmente. Imperocchè a tutti è noto che, chiamati p, q, r, s i quattro moltiplicatori di una ricorrente di quarto grado, l' equazione $x^4-sx^3-rx^2-qx-p=0$ comprende le quattro radici che io denomino P, Q, R, S, le quali entrano nella formazione del termine generale $aP^v+bQ^v+cR^v+dS^v$, che conviene alla serie. Ponghiamo ora, che in una data ipotesi l' equazione suddetta di quarto grado sia divisi-

bile in due di secondo, onde nasca $(x^2+ex+f)\times(x^2+gx+h)=0$; e sian P, Q le radici del primo trinomio, R, S quelle dell'altro. E' evidente, che tutte e quattro le radici di quadrato-quadratiche, che originalmente erano, diventan quadratiche; e che non hanno alcuna dipendenza dai valori de' coefficienti a, b, c, d, i quali vengono determinati dai confronti del termine generale modificato alle quattro ipotesi di $v=1$, $v=2$, $v=3$, $v=4$, coi quattro primi termini della serie. Se perciò avverrà, che tali confronti facciano svanire i due primi coefficienti a, b, possiamo considerare la formola generale ridotta ai due termini cR^v+dS^v, che di per sè portano solo a una ricorrente di secondo grado; e possiam tener conto ancora de' due termini aP^v+bQ^v, i quali si distruggono non perchè P, Q sian zero, ma perchè s' annullano a e b. Quindi apparisce, come debba essere indifferente per la formazione della serie il servirsi de' due moltiplicatori, che sono stati determinati nel §. 38, o far uso de' quattro, che ci dà il nostro Problema, e perchè le due serie s' identificano tra loro perfettamente.

78. Posto finalmente $n=3$, le due serie contraria e favorevole procedono in questa maniera:

contr. 8,68,580,4964,42484,363668,3112996,26647556,228105364,
fav. 1,13,149,1597,16565,167773,1699973,16399165,159315125,
contr. 1952603060,16714460740,143077320356,1224754999348 ecc.
fav. 1544181341,14666598869,139352216125,1317110828981 ecc,

nelle quali si osserva, che fino al termine duodecimo inclusivamente le combinazioni contrarie superano le favorevoli, cominciando solo nel terzodecimo ad esser queste in maggior numero delle prime. Dal che inferisco, che, essendo due bianche e una nera in A, una bianca e due nere in B, per giocare prossimamente in pari sulla probabilità dell' evento di tutte le tre bianche nella prim' urna, debbo chiedere o 12, o 13 permutazioni.

NUOVO