SOPRA LA MISURA DELLA LUCE IN GENERALE;

E sopra l' illuminazione de' varj segmenti del Disco Solare tagliati dall' orizzonte nel tempo del nascere e tramontare del Sole.

Del P. Gregorio Fontana Delle Scuole Pie Professore di Matematica sublime nell' Università di Pavia.

Niuno de' Fisico-Matematici prima del 1760, in cui comparvero alla luce le due opere insigni, una di *Bouguer* intitolata *Traitè d' Optique sur la gradation de la lumiere*, l' altra di *Lambert* col titolo *Photometria, sive de mensura & gradibus luminis*, avea sospettato, che nel misurare la quantità relativa della luce che da un corpo o per sestesso luminoso, o altronde irradiato viene tramandata sopra un dato punto, o picciolo spazio da illuminarsi, dovesse tenersi conto di quell' angolo, che formano i raggi colla superficie del corpo da cui partono. Eppure un' osservazione non difficile a farsi dovea far credere, che il predetto *angolo di emanazione* è un elemento indispensabile per calcolar giustamente la misura della luce. Rimirando il disco solare con un elioscopio si veggono tutti i punti del disco ugualmente chiari e brillanti, nè si scorge differenza sensibile fra lo splendore delle parti più vicine al centro, e delle parti più lontane, cosicchè il centro stesso ed il lembo non presentano all' occhio alcun divario in ordine alla loro lucidità. Da questa uguale distribuzione di lucidezza in tutte le parti del disco solare si deduce speditamente la conseguenza, che le varie quantità di luce versate sopra una data superficie dai diversi punti d'un corpo raggiante seguitano, in parità di tutte le altre cose, la ragione de' seni degli angoli di emanazione. Imperciocchè rappresenti il circolo *AFBI* (*fig.* 1) il disco del sole; e prendasi il semicircolo *APB* perpendicolare al disco per rappresentare la convessità del corpo solare rivolta allo spettatore, che si suppone situato ad una distanza immensa in direzione del semidiametro *CP* perpendicolare ad *AB*, e dividente per metà il semicircolo *APB*. Le particelle *Pp*, *Mm*, *Ee* della superficie convessa del sole compariscono uguali allo spettatore ogni qual volta le loro projezioni ortografiche *Cc*, *Nn*, *Dd* risultano eguali; nè queste riescono uguali, se quelle non crescono in ragione inversa delle rispettive ordinate *PC*, *MN*, *ED*, come è noto per la proprietà del cerchio. Se vuolsi adunque (come prima di *Lambert*, e *Bouguer* da tutti si supponeva), che qualsivoglia punto della superficie convessa del sole tramandi all' occhio dello spettatore sulla terra la stessa copia di raggi, qualunque sia la posizione di tal punto sul globo solare rispettivamente all' occhio, e se perciò la quantità di luce, che viene all' occhio da una parte qualunque di detta superficie, cresce in proporzione della grandezza di quella parte, ne nascerà la conseguenza, che le projezioni ortografiche uguali *Cc*, *Nn*, *Dd*, cioè le varie parti del disco rimirate d'in sulla terra, dovranno comparire tanto più lucide e chiare, quanto più saranno discoste dal centro *C* del disco, e ciò in ragione inversa delle ordinate rispettive, e così le parti vicine al lembo, e tutto il lembo medesimo dovranno mandare uno splendore infinito, divenendo quasi appunto infinito quel rapporto. E poichè questo è visibilmente assurdo, ed è anzi noto per esperienza, che le suddette parti *Cc*, *Nn*, *Dd* del disco gettano un egual chiarore, nè punto si osserva che una sia più o meno lucida dell' re o poco dopo del tramontare del sole, si fissa coll' occhio una piccola parte tinta d' altro colore, e si rimira da qualunque punto della circonferenza d' un cerchio, che ha per centro la stessa parte, questa si vede sempre chiara ed illuminata egualmente; il che non può accadere senza che la quantità di luce riflettuta da essa nell' occhio vada crescendo nella ragione del seno dell' angolo fatto da' raggi riflessi colla superficie riflettente, vale a dire dell' angolo di emanazione. Per rettificare questa osservazione troppo grossolana, e ridurla ad un' esattezza bastante, il *Lambert* immaginò il seguente ingegnoso esperimento. Due piani *AB*, *BC* (*fig.* 2) uniti sotto l' angolo *ABC* vengono irradiati da un lume collocato in *O* ad ugual distanza dai piani per modo, che essendo uguali le perpendicolari *OI*, *OP*, sieno pure uguali le quattro *BI*, *IA*, *BP*, *PC*, e queste inoltre sieno molto picciole in paragone delle distanze *OI*, *OP*. In tali circostanze egli è evidente, che i piani *AB*, *BC* rimarranno illuminati egualmente, e ciascun punto riceverà sensibilmente lo stesso numero di raggi. Ciò fatto si collochi in *E* una lente *FG*, la quale rifranga le immagini *ba*, *bc* dei piani sopra una superficie data *LM* posta dietro la lente. Osservate attentamente le immagini *ba*, *bc* si trovano egualmente illuminate, nè si scorge veruna diversità fra l' una e l' altra nel grado d' illuminazione; e questo sempre si esperimenta comunque si cangi la situazione della lente, e comunque vadano variando gli angoli *ABE*, *CBE*. Guidisi *CN* perpendicolare a *BE*, e sia *AB* normale a *BE* e parallela ad *LM*, e si piglino *BA*, *BC* molto picciole in confronto di *AE*, *BE*, *CE*, affinchè tutti i raggi mandati da *AB* alla lente partano sotto lo stesso angolo a un di presso, e sotto uno stesso angolo anche i raggi che vanno da *BC* alla lente. Ora i triangoli simili *ABE*, *abE*, *CNE*, *bcE* danno le seguenti analogie $AB : ab :: BE : bE$, $CN : bc :: NE : bE$;

e poichè per la picciolezza di CB in paragone di BE diventa proſſimamente $NE = BE$, la ragione di AB: ab ſarà la ſteſſa che di CN: bc. Laonde $ab : bc :: AB : CN :: BC : CN :: BC : BC$ ſen. $CBN :: 1 :$ ſen. CBN. Ma l' eſperimento dimoſtra che le due immagini ab, bc ſono ugualmente chiare e luminoſe, e che queſta chiarezza è uniformemente diffuſa ſu ciaſcun punto; ſarà dunque la quantità di luce ſparſa ſull' immagine ab a quella ſparſa ſu bc come la grandezza di ab alla grandezza di bc, cioè come il ſeno tutto al ſeno dell' angolo CBN. Di qui appariſce, che la quantità di luce riflettuta dai piani AB, BC ſulla lente FG ſeguita la ragione dei ſeni degli angoli di emanazione. E così l' eſperienza dimoſtra, che una ſiffatta legge ha luogo non meno ne' corpi luminoſi per sè ſteſſi, che in quelli che tramandano la luce ricevuta dai primi.

Reſta ora a vedere ſe queſto nuovo elemento introdotto nel calcolo, dove ſi tratta di determinare la quantità della luce vibrata da un corpo raggiante ſopra una data ſuperficie, partoriſca de' riſultati diverſi da quelli, che ſi ottengono nell' ordinaria ipoteſi, in cui tal elemento ſi traſcura. Ciò ſi rende tanto più neceſſario da che il Sig. *Euler* nelle *Memorie dell' Accademia di Berlino* ſembra determinato a credere, che i problemi riguardanti la miſura della luce diano i medeſimi riſultati, ſia che vogliaſi nel calcolo tener conto dell' angolo di emanazione, ſia che voglia traſcurarſi. Per mettere alla prova queſto penſamento di sì gran Geometra, io ſcelgo a tal effetto il Problema cardinale di queſta ſcienza, cioè di *ritrovare l' illuminazione perpendicolare prodotta in una ſuperficie piana infinitamente picciola da una ſfera raggiante*.

Inerendo adunque in primo luogo all' ipoteſi ordinaria io procedo nel modo ſeguente: la figura $ORMS$ (*fig.* 3.) rappreſenta una ſfera luminoſa o raggiante, il di cui ſemidiametro $CR = r$; Pp rappreſenta la ſuperficie piana infinitesima in ambedue le dimensioni, che viene illuminata dalla sfera, ed è distante dal centro di lei per $PC = a$. Il segmento sferico illuminatore circoscritto dalle tangenti PR, PS è RES; finalmente $NMmn$ è una zona infinitamente piccola compresa frall le circonferenze di due cerchj paralleli normali all' asse PC. Ora posto l' angolo $MCE = \varphi$ si ha la superficie di detta zona $= 2\pi r^2 \, d\varphi$ sen. φ (prendendo $1 : \pi$ pel rapporto del diametro alla periferia), ed $MP = \sqrt{(r^2 + a^2 - 2ra \cos.\varphi)}$. L' angolo d' incidenza MPp de' raggi vibrati dalla zona sul piano infinitesimo Pp è $= PMB$, e questo ha per suo seno $\frac{PB}{PM} = \frac{a - r \cos.\varphi}{\sqrt{(r^2+a^2-2ar \cos.\varphi)}}$, e per coseno $\frac{BM}{PM} = \frac{r \, \text{sen.}\varphi}{\sqrt{(r^2+a^2-2ar \cos.\varphi)}}$. Essendo pertanto l' illuminazione in Pp in ragion composta della zona $NMmn$ illuminatrice, del seno dell' angolo d' incidenza, e del quadrato inverso della distanza, risulterà la predetta illuminazione $= \frac{2I\pi r^2 \, d\varphi \, \text{sen.}\varphi}{r^2+a^2-2ar \cos.\varphi} \times \frac{a - r \cos.\varphi}{\sqrt{(r^2+a^2-2ar \cos.\varphi)}}$ prendendo per I l' unità d' illuminazione.

Per più facilmente integrare la formola $\frac{2I\pi r^2 (a - r \cos.\varphi) d\varphi \, \text{sen.}\varphi}{(r^2+a^2-2ar \cos.\varphi)^{3:2}}$, onde conseguire la misura dell' illuminazione del segmento sferico indefinito NEM, assumo cos. $\varphi = x$, e l' illuminazione elementare di tal segmento si trasforma in $\frac{-2I\pi r^2 (a - rx) \, dx}{(a^2+r^2-2rax)^{3:2}}$. A questa formola più semplice applicando le note regole d' integrazione si ritrova senza pena, che il di lei integrale è $= \frac{2I\pi r^2 (r - ax)}{a^2 \sqrt{(r^2+a^2-2rax)}} +$ cost. E siccome si annulla l' illuminazione all' annullarsi dell' angolo ϕ, ovvero quando cos. $\phi = x = 1$, si raccoglie quindi così

$$= \frac{-2I\pi r^2(r-a)}{a^2\sqrt{(r^2+a^2-2ra)}} = \frac{2I\pi r^2}{a^2},$$ prendendo pel valore di $\sqrt{(r^2+a^2-2ra)}$ la quantità $a-r$ piuttosto che $r-a$, perchè altrimenti risulterebbe negativa la quantità d' illuminazione, che sarebbe assurdo. Dunque l' illuminazione eccitata nel piano Pp dal segmento raggiante indefinito NEM è $= \frac{2I\pi r^2}{a^2}\left(1 + \frac{r-ax}{\sqrt{(a^2+r^2-2rax)}}\right)$, e posto l' angolo $\phi = ECS$, e perciò cos. $\phi = x = \frac{r}{a}$ nasce l' intera illuminazione generata dal segmento proposto RES $= \frac{2I\pi r^2}{a^2}$. Il che era ecc.

Cerco ora nell' ipotesi di *Lambert* e *Bouguer* una siffatta illuminazione, e per ottener questo non si ha che a moltiplicare l' illuminazione precedentemente trovata della zona pel seno dell' angolo di emanazione PMF fatto dalla tangente MF, e dal raggio emanante MP. Quest' angolo è $= PMB - FMB = PMB - ECM$; quindi sen. $PMF =$ sen. PMB cos. $ECM -$ sen. ECM cos.

$$PMB = \frac{(a - r\,\text{cos.}\phi)\text{cos.}\phi - r\,\text{sen.}\phi^2}{\sqrt{(r^2+a^2-2ra\,\text{cos.}\phi)}} = \frac{a\,\text{cos.}\phi - r}{\sqrt{(a^2+r^2-2ra\,\text{cos.}\phi)}}$$

$= \frac{ax-r}{\sqrt{(a^2+r^2-2rax)}}$, il quale moltiplicato per $\frac{-2I\pi r^2(a-rx)dx}{(a^2+r^2-2rax)^{3:2}}$ somministra nell' ipotesi di *Lambert* l' illuminazione prodotta dalla zona

$= \frac{2I\pi r^2(a-rx)(r-ax)dx}{(a^2+r^2-2rax)^2}$. Cercando l' integrale di questa espressione si trova senza difficoltà

$\frac{I\pi r}{2a}\left(x - \frac{(r^2-a^2)^2}{2ra(r^2+a^2-2rax)}\right) +$ coſt., il quale dovendo ſparire quando $x = 1$, diventa coſt.
$= \left(\frac{(r^2-a^2)^2}{2ra(r-a)^2} - 1\right)\frac{I\pi r}{2a} = \left(\frac{(r+a)^2}{2ra} - 1\right)\frac{I\pi r}{2a}$
$= \left(\frac{r^2+a^2}{2ra}\right)\frac{I\pi r}{2a}$. Dunque l' illuminazione prodotta dal ſegmento sferico indeterminato è
$= \frac{I\pi r}{2a}\left(x - \frac{(r^2-a^2)^2}{2ra(r^2+a^2-2rax)} + \frac{r^2+a^2}{2ra}\right)$; e poſto $x = \frac{r}{a}$, riſulta la totale illuminazione prodotta dall' intero ſegmento $RES = \frac{I\pi r}{2a}\left(\frac{r}{a} - \frac{(r^2-a^2)^2}{2ra(a^2-r^2)} + \frac{r^2+a^2}{2ra}\right)$
$= \frac{I\pi r}{2a} \times \frac{2r}{a} = \frac{I\pi r^2}{a^2}$. Il che era ecc. Di qui ſi vede che la quantità dell' illuminazione calcolata ſecondo l' ordinaria ipoteſi è doppia di quella, che ſi ricava dall' ipoteſi di *Lambert*. Il che dà a divedere di qual importanza ſia in tutta la ſcienza della *miſura della luce* di preliminarmente ſtabilire l' una o l' altra ipoteſi, giacchè in uno de' più ſolenni e fondamentali Problemi di queſta ſcienza s' incontrano nelle due ipoteſi riſultati tanto differenti e diſcordi, che baſterebbono a ſpargervi il più ragionevole pirroniſmo.

Paſſo ora ad un altro Problema intereſſante e curioſo. Suppongo un punto P (*fig.* 4) ſituato nella cavità d'una ſuperficie sferica raggiante al di dentro, cioè che tramanda da tutti i ſuoi punti la luce verſo la cavità; e tale ſuperficie sferica ſia BMN. Pel punto P da illuminarſi guido il diametro BF, e perpendicolari ad eſſo diametro conduco due cerchj paralleli infinitamente proſſimi MN, mn, che ſegnano nella ſuperficie sferica la zona elementare $MNnm$, e tirando il raggio CM, la retta PM, e la tangente MR, faccio $CM = r$, $CP = a$, l'angolo $MCF = \varphi$. Quindi feguitando i paffi medefimi che dinanzi, fi ritrova $PM^2 = a^2 + r^2 - 2ra$ cof. φ, la zona $MNnm = 2r^2 \pi d\varphi$ fen. φ (efprimendo $1 : \varphi$ il rapporto del diametro alla periferia circolare); e però chiamando I l' unità d' illuminazione, farà l' illuminazione prodotta dalla zona $MNnm$ nel punto P $= \frac{2I\pi r^2 d\varphi \text{ fen. } \varphi}{r^2 + a^2 - 2ar \text{ cof.} \varphi}$; confeguentemente l' illuminazione prodotta dalla fuperficie sferica indefinita MFN farà $= \int \frac{2I\pi r^2 d\varphi \text{ fen. } \varphi}{r^2 + a^2 - 2ar \text{ cof. } \varphi} = \frac{I\pi r}{a} \log. \; (a^2 + r^2 - 2ar \text{ cof. } \varphi)$ $+$ coft. E perchè fi annulla coll' angolo φ anche l' illuminazione, nafce perciò coft. $= \frac{-I\pi r}{a} \log. (a^2 + r^2 - 2ar)$ $= \frac{-2I\pi r}{a} \log. \; (r - a)$. Dunque l' illuminazione predetta è $= \frac{I\pi r}{a} \log. \; (a^2 + r^2 - 2ar \text{ cof. } \varphi) - \frac{2I\pi r}{a} \times \log.$ $(r - a)$. Se ora fi piglia $\varphi = 180°$, fi ottiene l' illuminazione eccitata nel dato punto P da tutta la sferica fuperficie $= \frac{2I\pi r}{a} \log. \frac{a + r}{r - a}$.

Introduco ora nel calcolo fecondo l'altra ipotefi di *Lambert* l'angolo di emanazione PMR moltiplicando pel feno di queft' angolo l'efpreffione dianzi trovata $\frac{2I\pi r^2 d\varphi \text{ fen. } \varphi}{r^2 + a^2 - 2ar \text{ cof.} \varphi}$. A tal effetto offervo, che queft' angolo PMR è $= PMO + OMR = PMO + \varphi$; e quindi fen. $PMR =$ fen. PMO cof. $\varphi +$ cof. PMO fen. φ. E poichè fen. $PMO = \frac{PO}{PM} = \frac{CO - CP}{PM} = \frac{r \text{ cof. } \varphi - a}{\sqrt{(a^2 + r^2 - 2ra \text{ cof.} \varphi)}}$, e cof. $PMO = \frac{MO}{PM} = \frac{r \text{ fen.} \phi}{\sqrt{(a^2 + r^2 - 2ar \text{ cof.} \phi)}}$, farà fen.

$$PMR = \frac{(r \text{ cof.}\phi - a) \text{ cof.}\phi + r \text{ fen.}\phi^2}{\sqrt{(a^2 + r^2 - 2ar \text{ cof.} \phi)}} = \frac{r - a \text{ cof.} \phi}{\sqrt{(a^2 + r^2 - 2ar\text{cof.}\phi)}}.$$

Laonde farà l' illuminazione prodotta nel punto P dalla zona elementare nell' ipotefi di *Lambert*

$$= \frac{2I\pi r^2 d\phi \text{ fen.} \phi (r - a \text{ cof.} \phi)}{(a^2 + r^2 - 2ar \text{ cof.}\phi)^{3:2}} = \frac{2I\pi r^3 d\phi \text{ fen.}\phi}{(a^2 + r^2 - 2ar \text{ cof.}\phi)^{3:2}}$$

$$- \frac{2I\pi ar^2 d\phi \text{ fen.}\phi \text{ cof.}\phi}{(a^2 + r^2 - 2ar \text{ cof.}\phi)^{3:2}}.$$

Paffando ora all' integrazione di quefti due termini fi vede fubito, che l'integrale del primo è $= \frac{-2I\pi r^2}{a\sqrt{(a^2 + r^2 - 2ar\text{cof.}\phi)}}$. Per ritrovare l' integrale del fecondo termine piglio $x = \text{cof.} \phi$, e quel termine fi cangia in $\frac{2I\pi ar^2 x dx}{(a^2 + r^2 - 2arx)^{3:2}}$. Prendo inoltre $y = a^2 + r^2 - 2arx$, e il detto termine fi trasforma di nuovo in $\frac{-2I\pi ar^2 \left(\frac{a^2 + r^2 - y}{2ar}\right) \frac{dy}{2ar}}{y^{3:2}}$

$= \frac{-I\pi(a^2 + r^2)dy}{2ay^{3:2}} + \frac{I\pi dy}{2a\sqrt{y}}$, il di cui integrale è vifibilmente $\frac{I\pi(a^2 + r^2)}{a\sqrt{y}} + \frac{I\pi\sqrt{y}}{a} = \frac{I\pi(a^2 + r^2)}{a\sqrt{(a^2 + r^2 - 2arx)}}$

$+ \frac{I\pi}{a}\sqrt{(a^2 + r^2 - 2arx)}$, a cui aggiungendo l' integrale dianzi trovato $- \frac{2I\pi r^2}{a\sqrt{(a^2 + r^2 - 2ar \text{ cof.} \phi)}}$, e riducendo al medefimo denominatore tutti i termini, fi ottiene finalmente l' illuminazione eccitata dalla fuperficie indeterminata

minata $MFN = \frac{2I\pi(a-r\,\text{cof.}\phi)}{\sqrt{(a^2+r^2-2ar\,\text{cof.}\phi)}} + \text{coft.}$ Per ritrovare la coftante bafta riflettere, che l'illuminazione fvanifce infieme coll'angolo ϕ, il che dà coft. $= \frac{-2I\pi(a-r)}{\sqrt{(a^2+r^2-2ar)}} = 2I\pi$ prendendo per $\sqrt{(a^2+r^2-2ar)}$ il valore $r-a$ piuttofto che $a-r$. Dunque la predetta illuminazione è $= 2I\pi + \frac{2I\pi(a-r\,\text{cof.}\phi)}{\sqrt{(a^2+r^2-2ar\,\text{cof.}\phi)}}$. Se pertanto in queft' equazione fi affume $\phi = 180°$, e però cof. $\phi = -1$, egli è manifefto, che allora dee rifultare la quantità dell' illuminazione prodotta nel dato punto dall' intera fuperficie sferica. Dunque una fiffatta illuminazione è $2I\pi + \frac{2I\pi(a+r)}{a+r} = 4I\pi$. Di qui fi raccoglie un Teorema molto fingolare e inafpettato, non fo fe da altri avvertito, che *una fuperficie sferica raggiante, comunque fia piccola o grande, produce la medefima illuminazione in un punto dovunque fituato dentro la cavità; e tale illuminazione non è altro che quella, che fi prende per unità, moltiplicata per quattro volte il rapporto della periferia circolare al diametro*. Per altro quefto Teorema fi prefenta immantinente allo fpirito, qualora il punto dato fia collocato nel centro della sfera cava, effendo evidente, che allora l'illuminazione in effo eccitata debb'effere uguale al prodotto dell'unità d'illuminazione moltiplicata per la fuperficie sferica, e divifa pel quadrato della diftanza, cioè del femidiametro, il che dà appunto $4I\pi$, come prefcrive il Teorema.

Confrontando pertanto l'efpreffione $\frac{2I\pi r}{a}$ log. $\frac{a+r}{r-a}$ ricavata nell'ordinaria ipotefi Euleriana coll'efpreffione $4I\pi$ avutafi dall'ipotefi di *Lambert*, fi conofce qual infigne divario producano ne' rifultati quefte due ipotefi, le quali nel solo caso, che il punto irradiato sia situato nel centro della sferica cavità, conducono sì l'una che l'altra a ritrovare la medesima illuminazione. Imperciocchè febbene in tal caso l'espressione $\frac{2I\pi r}{a}$ log. $\frac{a+r}{r-a}$ diventi eguale alla quantità indeterminata e vaga $\frac{0}{0}$, se per evitare questo valore indeterminato si suppone a infinitesimo, si trova $\frac{r+a}{r-a} = 1 + \frac{2a}{r}$ trascurando i termini, che contengono le potenze di a. Dunque $\frac{2I\pi r}{a}$ log. $\frac{r+a}{r-a} = \frac{2I\pi r}{a}$ log. $\left(1 + \frac{2a}{r}\right)$, e siccome log. $\left(1+\frac{2a}{r}\right)$ $= \frac{2a}{r}$, disprezzati gli altri termini come dianzi, perciò nasce $\frac{2I\pi r}{a}$ log. $\left(1+\frac{2a}{r}\right) = 4I\pi$, come appunto si è trovato nell'ipotesi di *Lambert*, e come esser doveva per la natura della cosa col puro discorso metafisico.

E qui parmi di scorgere un inconveniente nell'ipotesi Euleriana, ed è di offerire un'illuminazione infinita, allorchè il punto si prende sulla stessa superficie interna, vale a dire $r = a$, nel qual caso l'illuminazione diventa $2I\pi$ log. $\frac{2r}{0} = \infty$. Questa illuminazione infinita ha un non so che di aspro, perchè sebbene essa può sembrare non ripugnante a motivo della distanza evanescente del punto dato dalla superficie sferica, si ha però quivi un compenso per parte della superficie, da cui il punto ha una distanza evanescente, perchè anche la grandezza di tal superficie è evanescente, ed a tale grandezza è sempre proporzionale *cæteris paribus* l'illuminazione. Io non so se m'inganno, ma io trovo una certa armonica semplicità ed eleganza nell' uguaglianza d' illuminazione per tutti i punti della cavità sferica, come esige il Teorema precedentemente dimostrato, che non posso non creder vera l' ipotesi, che somministra un tal risultato.

Osservo finalmente, che prendendo una superficie piana infinitesima in ambedue le dimensioni fuori d'una sfera raggiante del semidiametro $= r$ ad una grandissima distanza dal di lei centro $= a$ si trova (come ho mostrato precedentemente) l' illuminazione prodotta in detta superficie $= \frac{I\pi r^2}{a^2}$ nell' ipotesi di *Lambert*, ed $= \frac{2I\pi r^2}{a^2}$ nell' ipotesi di *Eulero*; e poichè πr^2 è l' area del cerchio massimo della sfera raggiante, e $2\pi r^2$ è la superficie emisferica, ne viene in conseguenza, che l' illuminazione generata in quel piano infinitamente picciolo viene espressa dall' area del cerchio massimo secondo *Lambert*, e dalla superficie emisferica secondo *Eulero*. Ora non par egli più verisimile, che piuttosto quell' area che questa superficie debba misurare la quantità d' illuminazione, giacchè nelle grandissime distanze non si vede altro che l' area suddetta, ossia il disco, e non comparisce punto la superficie dell' emisfero?

Proseguendo questa disamina in alcun altro solenne e nuovo Problema spettante alla misura della luce, mi porto a calcolare nell' ipotesi Euleriana l' illuminazione generata dalla circonferenza circolare raggiante RMS (*fig.* 5) in un punto F preso dentro l' area del circolo. Si guidi per F il diametro RB, e da un punto M qualunque della circonferenza si conducano MC al centro, MF al punto dato, MN perpendicolare al diametro. Si ponga l' angolo $MCB = \phi$, il raggio $CM = r$, $CF = a$: sarà dunque $FM^2 = r^2 + a^2 - 2ar \cos.\phi$, l' archetto infinitesimo $Mm = rd\phi$, e l' illuminazione in F

generata dal archetto Mm sarà $= \dfrac{Ird\phi}{r^2+a^2-2ar\,\text{cos.}\,\phi}$ prendendo per I l'unità d'illuminazione. Passo ora all'integrazione di questa formola, e per meglio riuscirvi faccio $r^2+a^2=f^2$, $2ar=g^2$, e la formola diventa $\dfrac{Ird\phi}{f^2-g^2\,\text{cos.}\,\phi}$. Quindi assumo $\text{cos.}\,\phi = \dfrac{1-u^2}{1+u^2}$; ond'è $\text{sen.}\,\phi = \dfrac{2u}{1+u^2}$, $d\phi\,\text{cos.}\,\phi = \dfrac{2du(1-u^2)}{(1+u^2)^2}$, e però $d\phi = \dfrac{2du}{1+u^2}$. Dunque essendo $f^2-g^2\,\text{cos.}\,\phi = \dfrac{f^2-g^2+(f^2+g^2)u^2}{1+u^2}$, ne viene

$$\frac{Ird\phi}{f^2-g^2\,\text{cos.}\,\phi} = \frac{2Irdu}{f^2-g^2+(f^2+g^2)u^2} = \frac{2Irdu}{(r-a)^2+(r+a)^2u^2}$$

$$= \frac{2Ir}{(r-a)^2} \times \frac{du}{1+\left(\frac{r+a}{r-a}\right)^2 u^2} = \frac{2Ir}{(r-a)^2} \times \frac{r-a}{r+a}$$

$$\times \frac{\frac{r+a}{r-a} \times du}{1+\left(\frac{r+a}{r-a}\right)^2 u^2} = \frac{2Ir}{r^2-a^2} \times \frac{\frac{r+a}{r-a} \times du}{1+\left(\frac{r+a}{r-a}\right)^2 u^2}$$

Quest'ultima formola esprime visibilmente la quantità $\dfrac{2Ir}{r^2-a^2}$ moltiplicata per l'elemento dell'arco circolare descritto col raggio 1, e colla tangente $\dfrac{r+a}{r-a}u$. Dunque l'illuminazione generata nel punto F dall'arco luminoso indefinito BM è $= \dfrac{2Ir}{r^2-a^2}$ Arc. tang. $\dfrac{r+a}{r-a}u$ $+$ cost. E poichè si è fatto $\text{cos.}\,\phi = \dfrac{1-u^2}{1+u^2}$, cioè u^2

$= \frac{1 - \text{cof.}\,\varphi}{1 + \text{cof.}\,\varphi}$, cioè $u = \sqrt{\frac{1 - \text{cof.}\,\varphi}{1 + \text{cof.}\,\varphi}}$, farà la predetta illuminazione $= \frac{2Ir}{r^2 - a^2}$ Arc. tang. $\frac{r+a}{r-a}\sqrt{\frac{1 - \text{cof.}\,\varphi}{1 + \text{cof.}\,\varphi}} +$ coft. Siccome poi l'illuminazione fvanifce in un coll' angolo φ, cioè quando cof. $\varphi = 1$, nel qual cafo Arc. tang. $\frac{r+a}{r-a}\sqrt{\frac{1 - \text{cof.}\,\varphi}{1 + \text{cof.}\,\varphi}}$ diventa Arc. tang. 0, cioè Arc. $= 0$; perciò non vi è coftante da aggiungere all' integrale ritrovato. Per ottenere prefentemente l'illuminazione della femicirconferenza *BMR* nel punto dato *F* conviene prendere $\varphi = 180°$, e perciò cof. $\varphi = -1$; il che fomminiftra la formola $\frac{2Ir}{r^2 - a^2}$ Arc. tang. $\infty = \frac{2Ir}{r^2 - a^2} \times \frac{1}{2}\pi$, chiamando π la femicirconferenza del circolo defcritto col raggio 1. Dunque l'illuminazione prodotta dalla femicirconferenza nel punto F è $= \frac{Ir\pi}{r^2 - a^2}$, e l'illuminazione generata da tutta la circonferenza (che è un'illuminazione doppia dell'altra come è chiaro) è $= \frac{2Ir\pi}{r^2 - a^2}$, cioè uguale alla fteffa circonferenza moltiplicata per l'unità d'illuminazione, e divifa pel quadrato dell'ordinata al diametro nel dato punto F.

Se ora fi vuol trovare l'illuminazione del punto F nell'ipotefi di *Lambert*, converrà moltiplicare

$\frac{Ird\varphi}{a^2 + r^2 - 2ar\,\text{cof.}\,\varphi}$ pel feno dell'angolo di emanazione FMO

fatto dal raggio lucido MF colla tangente MO in M, il qual angolo è $= FMN + NMO = FMN + MCB = FMN + \varphi$. Dunque fen. $FMO =$ fen. FMN cof. φ

$+ \text{cos. } FMN \text{ sen. } \varphi = \frac{FN \text{ cos. } \varphi}{FM} + \frac{MN \text{ sen.} \varphi}{FM}$
$= \frac{(CN - CF) \text{ cos. } \varphi}{FM} + \frac{r \text{ sen. } \varphi^2}{FM} = \frac{(r \text{ cos.} \varphi - a) \text{ cos.} \varphi + r \text{ sen.} \varphi^2}{\sqrt{(a^2 + r^2 - 2ar \text{ cos. } \varphi)}}$
$= \frac{r - a \text{ cos.} \varphi}{\sqrt{(a^2 + r^2 - 2ar \text{cos.} \varphi)}}$. Laonde l' illuminazione generata nel punto F dall' archetto Mm sarà $\frac{Ir(r - a \text{ cos. } \varphi) \, d\varphi}{(a^2 + r^2 - 2ar \text{ cos. } \varphi)^{3:2}}$
$= \frac{Ir(r - a \text{ cos.} \varphi) d\varphi}{(a^2 + r^2)^{3:2} \left(1 - \frac{2ar}{a^2 + r^2} \text{ cos. } \varphi\right)^{3:2}} = \frac{Ir(r - a \text{ cos. } \varphi) \, d\varphi}{b^{3:2}(1 - m \text{cos.} \varphi)^{3:2}}$
assumendo $b = a^2 + r^2$, $m = \frac{2ar}{a^2 + r^2}$. Trovata pertanto l' illuminazione generata dall' archetto $Mm = \frac{Ir}{b^{3:2}}$ $(r - a \text{ cos.} \varphi) \, (1 - m \text{ cos.} \varphi)^{-3:2} \, d\varphi$, io riduco in serie l' espressione $(1 - m \text{ cos.} \varphi)^{-3:2}$, ed ho la detta espressione $= 1 + \frac{1}{2} m \text{ cos. } \varphi + \frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 4} m^2 \text{ cos. } \varphi^2 + \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6} m^3 \text{cos.}$ $\varphi^3 + \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} m^4 \text{ cos. } \varphi^4 + \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10} m^5 \text{ cos. } \varphi^5 + \text{ecc.}$

Dunque l' illuminazione dell' archetto sarà $\frac{Ir}{b^{3:2}} \Big(r d\varphi +$
$\frac{3}{2} mr \text{ cos. } \varphi \, d\varphi - a \text{ cos. } \varphi \, d\varphi + \frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 4} rm^2 \text{ cos. } \varphi^2 \, d\varphi - \frac{3}{2} am \text{ cos.}$
$\varphi^2 \, d\varphi + \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6} rm^3 \text{ cos. } \varphi^3 \, d\varphi - \frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 4} am^2 \text{ cos. } \varphi^3 \, d\varphi$
$+ \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} rm^4 \text{ cos. } \varphi^4 \, d\varphi - \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6} am^3 \text{ cos. } \varphi^4 \, d\varphi$
$+ \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10} rm^5 \text{ cos. } \varphi^5 \, d\varphi - \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} am^4 \text{cos.} \varphi^5 d\varphi + \text{ecc.}$

$$= \frac{Ir}{b^{3:2}} \left\{ \begin{matrix} rd + \frac{1}{2}\, mr \\ -\; a \end{matrix} \right) \text{cof.}\,\varphi\, d\varphi \begin{matrix} + \frac{3.5}{2.4}\, rm^2 \\ -\frac{3}{2}\, am \end{matrix} \Bigg) \text{cof.}\,\varphi^2\, d\varphi$$

$$\begin{matrix} + \frac{3.5.7}{2.4.6}\, rm^3 \\ -\frac{3.5}{2.4}\, am^2 \end{matrix} \Bigg) \text{cof.}\,\varphi^3\, d\varphi \begin{matrix} + \frac{3.5.7.9}{2.4.6.8}\, rm^4 \\ -\frac{3.5.7}{2.4.6}\, am^3 \end{matrix} \Bigg) \text{cof.}\,\varphi^4\, d\varphi$$

$$\begin{matrix} + \frac{3.5.7.9.11}{2.4.6.8.10}\, rm^5 \\ -\frac{3.5.7.9}{2.4.6.8}\, am^4 \end{matrix} \Bigg) \text{cof.}\,\varphi^5\, d\varphi \pm \text{ecc.} \Bigg\}$$

. Chiamo A il coefficiente di cof. $\varphi d\varphi$, B quello di cof. $\varphi^2 d\varphi$, C quello di cof. $\varphi^3 d\varphi$, D ecc. Perlochè la predetta illuminazione farà $\frac{Ir}{b^{3:2}} (rd\varphi + A\,d\varphi\,\text{cof.} + B\,d\varphi\,\text{cof.}\,\varphi^2 + C\,d\varphi\,\text{cof.}\,\varphi^3 + D\,d\varphi\,\text{cof.}\,\varphi^4 + E\,d\varphi\,\text{cof.}\,\varphi^5 + \text{ecc.})$ Ora si fa dal calcolo integrale, che

I.

$$A \int d\varphi\, \text{cof.}\,\varphi = A\, \text{fen.}\,\varphi$$

II.

$$B \int d\varphi\, \text{cof.}\,\varphi^2 = \tfrac{1}{2} B\, \text{fen.}\,\varphi\, \text{cof.}\,\varphi + \tfrac{1}{2} B\varphi$$

III.

$$C \int d\varphi\, \text{cof.}\,\varphi^3 = \tfrac{1}{3} C\, \text{fen.}\,\varphi\, \text{cof.}\,\varphi^2 + \tfrac{2}{3} C\, \text{fen.}$$

IV.

$$D \int d\varphi\, \text{cof.}\,\varphi^4 = \tfrac{1}{4} D\, \text{fen.}\,\varphi\, \text{cof.}\,\varphi^3 + \frac{1.3}{2.4} D\, \text{fen.}\,\varphi\, \text{cof.}\,\varphi + \frac{1.3}{2.4} D\varphi$$

V.

$$E \int d\varphi \, \text{cos.}\, \varphi^5 = \frac{1}{5} E \,\text{sen.}\, \varphi \,\text{cos.}\, \varphi^4 + \frac{1.4}{3.5} E \,\text{sen.}\, \varphi \,\text{cos.}\, \varphi^2$$
$$+ \frac{2.4}{3.5} E \,\text{sen.}\, \varphi$$

VI.

$$F \int d\varphi \, \text{cos.}\, \varphi^6 = \frac{1}{6} F \,\text{sen.}\, \varphi \,\text{cos.}\, \varphi^5 + \frac{1.5}{4.6} F \,\text{sen.}\, \varphi \,\text{cos.}\, \varphi^3$$
$$+ \frac{1.3.5}{2.4.6} F \,\text{sen.}\, \varphi \,\text{cos.}\, \varphi + \frac{1.3.5}{2.4.6} F\varphi$$

VII.

ecc.

Conseguentemente integrando la precedente espressione dell' illuminazione dell' archetto, si avrà quella dell' arco indefinito $BM = \frac{Ir}{b^{3:2}} \Big(r\varphi + \frac{1}{2} B\varphi + \frac{1:3}{2.4} D\varphi$
$+ \frac{1.3.5}{2.4.6} F\varphi + \text{ecc.} \ldots\ldots + A \,\text{sen.}\, \varphi + \frac{2}{3} C \,\text{sen.}\, \varphi$
$+ \frac{2.4}{3.5} E \,\text{sen.}\, \varphi + \text{ecc.} \ldots\ldots + \frac{1}{2} B \,\text{sen.}\, \varphi \,\text{cos.}\, \varphi$
$+ \frac{1.3}{2.4} D \,\text{sen.}\, \varphi \,\text{cos.}\, \varphi + \frac{1.3.5}{2.4.6} F \,\text{sen.}\, \varphi \,\text{cos.}\, \varphi + \text{ecc.} \ldots$
$+ \frac{1}{3} C \,\text{sen.}\, \varphi \,\text{cos.}\, \varphi^2 + \frac{1.4}{3.5} E \,\text{sen.}\, \varphi \,\text{cos.}\, \varphi^2 + \text{ecc.} \ldots\ldots$
$\frac{1}{4} D \,\text{sen.}\, \varphi \,\text{cos.}\, \varphi^3 + \frac{1.5}{4.6} F \,\text{sen.}\, \varphi \,\text{cos.}\, \varphi^3 + \text{ecc.} \ldots\ldots$
$+ \frac{1}{5} E \,\text{sen.}\, \varphi \,\text{cos.}\, \varphi^4 + \text{ecc.} \ldots\ldots + \frac{1}{6} F \,\text{sen.}\, \varphi \,\text{cos.}\, \varphi^5$
$+ \text{ecc.} \ldots\ldots \Big) + \text{cost.}$ E siccome l' illuminazione diventa

venta nulla quando l' arco pure diventa nullo, nasce perciò cost. $= 0$. Posto ora $\varphi = 360^\circ = 2\pi$, prendendo π per la semicirconferenza del cerchio descritto col raggio 1, risulta tutta l'illuminazione generata nel dato punto F dall' intera circonferenza raggiante $BMRS$

$$= \frac{2Ir\pi}{(a^2+r^2)^{3:2}} \left(r + \frac{1}{2} B + \frac{1.3}{2.4} D + \frac{1.3.5}{2.4.6} F + \text{ecc.}\right)$$

Se si volesse ora conoscere l' illuminazione generata dalla periferia lucida in un punto situato sulla medesima, basterà assumere $a = r$, e quindi $b = 2r^2$, $m = 1$,

$$B = \frac{3.5}{2.4} r - \frac{3}{2} r = \frac{3(5-4)}{2.4} r = \frac{3}{2.4} r, D = \frac{3.5.7.9}{2.4.6.8} r$$

$$- \frac{3.5.7}{2.4.6} r = \frac{3.5.7(9-8)}{2.4.6.8} r = \frac{3.5.7}{2.4.6.8} r,$$

$$F = \frac{3.5.7.9.11.13}{2.4.6.8.10.12} r - \frac{3.5.7.9.11}{2.4.6.8.10} r = \frac{3.5.7.9.11(13-12)}{2.4.6.8.10.12} r$$

$= \frac{3.5.7.9.11}{2.4.6.8.10.12} r$, ecc., ed avrassi la detta illuminazione $= \frac{I\pi}{r\sqrt{2}} \left(1 + \frac{3}{2.2.4} + \frac{3.3.5.7}{2.2.4.4.6.8}\right.$

$$\left. + \frac{3.3.5.5.7.9.11}{2.2.4.4.6.6.8.10.12} + \text{ecc.}\right).$$

Passo ora a calcolare l' illuminazione generata da un cerchio luminoso FGO (*fig.* 6) sopra un punto A situato nella retta CA, che dal suo centro si conduce perpendicolare al piano del cerchio. Dal centro C descrivendo i due cerchj infinitamente prossimi MER, SNm, egli è evidente, che l' illuminazione prodotta in A dalla zona infinitesima racchiusa tralle loro circonferenze s' agguaglia all' unità d' illuminazione moltiplicata per detta zona, e divisa pel quadrato della distanza AM nell' ipotesi Euleriana, e moltiplicata nuovamente pel seno dell' angolo di emanazione CMA nell' ipotesi di *Lambert*. Dunque nominando il raggio CF del dato cerchio r, a la distanza AC del punto dato dal centro, x il raggio CM, $1:\pi$ il rapporto del diametro alla circonferenza del cerchio, si trova la zona luminosa $= 2\pi x dx$, $AM^2 = a^2 + x^2$, e l' illuminazione generata dalla zona in $A = \frac{2I\pi x dx}{a^2+x^2}$. Dunque integrando sarà l' illuminazione prodotta dal cerchio RME $= \int \frac{2I\pi x dx}{a^2+x^2} = I\pi \log. (a^2+x^2) +$ cost: e siccome l' illuminazione svanisce col semidiametro x; quindi è cost. $= - I\pi \log. a^2$; onde la detta illuminazione si fa $= I\pi \log. \frac{a^2+x^2}{a^2}$. Laonde per tutto il dato cerchio OFG sarà l' illuminazione ricercata $= I\pi \log. \frac{a^2+r^2}{a^2}$ nell' ipotesi Euleriana.

Nell' ipotesi di *Lambert* conviene moltiplicare l' espressione $\frac{2I\pi x dx}{a^2+x^2}$ pel seno dell' angolo AMC, cioè per $\frac{AC}{AM}$, ossia per $\frac{a}{\sqrt{(a^2+x^2)}}$ ad effetto di ottenere l' illuminazione prodotta dalla zona circolare, la quale illuminazione sarà in conseguenza $= \frac{2I\pi a x dx}{(a^2+x^2)^{3:2}}$. L' integrale di questa formola è $= - \frac{2I\pi a}{\sqrt{(a^2+x^2)}} +$ cost. $= 2I\pi \left(1 - \frac{a}{\sqrt{(a^2+x^2)}}\right)$. Onde l' illuminazione prodotta dall' area circolare indefinita RME è $= \frac{2I\pi(\sqrt{(a^2+x^2)}-a)}{\sqrt{(a^2+x^2)}}$, e quella che è generata dal cer-

chio dato FOG è $= \frac{2I\pi\left(\sqrt{(a^2+r^2)}-a\right)}{\sqrt{(a^2+r^2)}}$
$= 2I\pi\left(1-\frac{a}{\sqrt{(a^2+r^2)}}\right)$.

Pongasi ora al confronto questa espressione $2I\pi\left(1-\frac{a}{\sqrt{(a^2+r^2)}}\right)$ colla prima $I\pi \log. \frac{a^2+r^2}{a^2}$, e si giudichi quanto essenzialmente differiscono l' una dall' altra. Questa differenza arriva a tal segno, che se il cerchio luminoso si suppone infinito, cioè $r = \infty$, l'illuminazione da esso prodotta nel dato punto secondo l' ipotesi di *Lambert* e *Bouguer* diventa $2I\pi$, cioè determinata e finita, ma nell' ipotesi comune Euleriana si scuopre $= 2I\pi \log. \infty$, cioè a dire infinita.

Un soggetto degno dell' attenzione de' fisici e geometri in questa scienza della misura del Lume è quello, che spetta a' varj gradi d' illuminazione, che la terra riceve dal sole nelle sue diverse altezze sopra l' orizzonte, e singolarmente dalle parti successivamente visibili del disco solare allorchè attraversa l' orizzonte così nel nascere, come nel tramontare. Volendo entrare in questa delicata ricerca, convien prima premettere il Problema di ritrovare l' illuminazione, che da una data superficie in tutti i suoi punti *egualmente luminosa* viene prodotta in un elemento o porzione infinitesima di un' altra data superficie esposta ai raggi della prima. A tal effetto sia PMQ (*fig.* 7) la superficie raggiante di qualunque forma, ugualmente luminosa in tutte le sue parti; ed EF sia la superficie esposta a ricevere i raggi di quella; cercasi l' illuminazione prodotta da PQ nell' elemento, o porzioncella infinitesima Aa. Piglisi nella superficie illuminante l'elemento Mm, che tramanda in A la piramide luminosa MAm sotto l' angolo d' incidenza $MAa = b$, e sotto l' angolo di emanazione $mMA = e$. Ciò posto, l' illuminazione eccitata nell' elemento Aa da Mm si avrà con moltiplicare la parte illuminatrice Mm pel seno dell' angolo b d' incidenza, e pel seno dell' angolo e di emanazione, e con dividere il prodotto pel quadrato della distanza MA, cioè sarà $= \frac{Mm.\,\text{sen.}\,b\,\text{sen.}\,e}{MA^2}$. Si concepisca tagliata la piramide luminosa da un piano mi perpendicolare ai lati di lei; e per la Geometria sarà come il seno tutto al seno dell' angolo mMA, così la base infinitesima Mm della piramide al piano secante mi; onde $mi = Mm.$ sen. e; e quindi l' illuminazione prodotta $= \frac{mi.\,\text{sen.}\,b}{MA^2}$. Se ora intorno ad A come centro col semidiametro $AC = 1$ si descrive una superficie sferica, di cui BNC sia la porzione compresa fra la piramide luminosa PAQ tramandata in A da tutta la superficie raggiante PQ, ed Nn sia la porzioncella serrata fra la piramidetta Mam; egli è noto, che le due minime superficie mi, Nn stanno fra loro come i quadrati di Ai, ovvero AM, ed AN; e però $Nn = \frac{mi.\,AN^2}{AM^2} = \frac{mi}{AM^2}$; e questo valore sostituito nella precedente espressione dell' illuminazione rende questa $= Nn.$ sen. b, per modo che chiamata I l' illuminazione prodotta da una porzione finita della superficie raggiante PMQ, ed $Nn = d\omega$, risulta $dI = d\omega$ sen. b, ed $I = \int d\omega$ sen. b.

Di qui è facile l' inferire, che se la superficie sferica BNC fosse ancor essa una superficie raggiante, ed ugualmente luminosa in tutte le sue parti, come lo è la PMQ, l' illuminazione da essa prodotta in Aa sarebbe precisamente la stessa che quella prodotta da PMQ. Imperciocchè essendo l' illuminazione in A dell' elemento Nn uguale al prodotto di detto elemento nel ſeno dell' angolo di emanazione nNA, e nel ſeno dell' angolo d' incidenza b, diviſo pel quadrato della diſtanza NA, ed eſſendo $= 1$ così queſto quadrato, come il ſeno dell' angolo retto nNA, ne viene l' illuminazione generata dall' elemento $Nn = d\omega$ ſen. b, qual' è appunto (come ſi è veduto) l' illuminazione generata dall' elemento Mm; e con ſimil diſcorſo ſi prova, che l' illuminazione eccitata in Aa da tutta la data ſuperficie PMQ è uguale all' illuminazione fatta dal ſegmento sferico BNC rinſerrato fra i lati della piramide lucida PAQ.

Per venire ora alla determinazione dell' illuminazione del ſole nelle ſue diverſe altezze ſopra l' orizzonte, ſia Cc (*fig.* 8) una ſuperficie piana orizzontale infinitamente piccola in tutte le dimenſioni, e intorno ad eſſa come centro la ſuperficie sferica $AOBZ$ col ſemidiametro $= 1$, la quale dal piano Cc prodotto viene tagliata nel cerchio maſſimo orizzontale ALB. Il cono luminoſo DCE, che partendo da tutto il diſco ſolare va ad irradiare la ſuperficie data infiniteſima Cc, ed ha per aſſe CP, taglia nella ſuperficie sferica il ſegmente $DQEP$ avente per baſe il cerchio DQE, e per polo P; e conſeguentemente, per ciò che ſi è dimoſtrato, tanta ſarà l' illuminazione, che produrrebbe in Cc la ſuperficie concava $DQEP$, ſe ſi ſuppone ſſe ugualmente lucida che il diſco ſolare, quanta è l' illuminazione eccitata dal diſco medeſimo, ſicchè per conoſcer queſta baſterà ritrovar quella. Tiriſi pertanto la verticale CZ, ed il piano ZCP diſteſo ſegni nella ſuperficie sferica il cerchio verticale $ZAOE$; e per un punto M preſo ad arbitrio nel predetto ſegmento ſi faccia paſſare il parallelo FNG appartenente al polo P, conducendoſi pure il parallelo infinitamente vicino fmg. Ciò fatto pel polo P, e pel punto M ſi concepiſca guidato l' arco PMm di circolo maſſimo, e l' arco PNn ſotto un angolo infiniteſimo col primo: finalmente pel vertice Z, e per M si faccia passare il cerchio verticale $ZMKO$, che incontri in K il cerchio orizzontale. Si faccia la distanza di M dal vertice, cioè $ZM = \Delta$, la distanza dal polo, ossia $PM = p$, l'angolo al polo $ZPM = \phi$; e sarà il semidiametro del parallelo $FMG =$ sen. p, $MN = d\phi$ sen. p, $Mm = dp$. Laonde l'elemento $MmnN$, che si ha con moltiplicare MN per Mm, si trova $= d\phi dp$ sen. p, e questo moltiplicato pel seno dell'angolo d'incidenza MCK, ovvero per cos. Δ dà per l'illuminazione prodotta dall'elemento $MmnN$ la formola $d\phi dp$ sen. p cos. Δ. Posta ora la distanza del polo dal vertice, ovvero $PZ = a$, si ha nel triangolo sferico ZPM dalla Trigonometria cos. $\Delta =$ cos. p cos. $a +$ sen. p sen. a cos. ϕ, e surrogato nella formola precedente questo valore nasce l'espressione $d\phi dp$ sen. p cos. p cos. $a + d\phi\, dp$ sen. p^2 sen. a cos. ϕ, la quale rappresenta l'illuminazione del suddetto elemento. Si avverta presentemente, che l'integrazione di questa formola, nel supposto che si faccia variare la sola ϕ, somministra l'illuminazione prodotta dalla parte indeterminata $FfmM$ della zona infinitesima $FfgG$, e questa illuminazione trovasi $= \phi dp$ sen. p cos. p cos. $a + dp$ sen. p^2 sen. a sen. ϕ: siffatta quantità dee pur essa integrarsi, ma in ipotesi che si cangi la sola p; e siccome è noto, che $\int dp$ sen. p cos. $p = \frac{1}{2}$ sen. p^2, e $\int dp$ sen. $p^2 = \frac{1}{2}p - \frac{1}{2}$ sen. p cos. p; quindi sarà $\int \phi dp$ sen. p cos. p cos. $a + \int dp$ sen. p^2 sen. ϕ sen. $a = \frac{1}{2}\phi$ sen. p^2 cos. $a + \frac{1}{2}p$ sen. ϕ sen. $a - \frac{1}{2}$ sen. p cos. p sen. ϕ sen. $a = \frac{1}{2}\phi$ sen. p^2 cos. $a + \frac{1}{2}$ sen. ϕ sen. a (p — sen. p cos. p), che esprime l'illuminazione fatta dalla parte indefinita FMP del segmento FGP; sicchè preso $\phi = 360° = 2\pi$, risulta l'illuminazione eccitata da tutto quel ſegmento $= \pi$ ſen. p^2 coſ. a; e facendoſi poi eſprimere da p la diſtanza PR del polo dalla baſe dell' intero ſegmento DEP rinſerrato fra i raggi del cono ſolare luminoſo, la ſteſſa formola ſempliciſſima π ſen. p^2 coſ. a rappreſenta l' illuminazione di eſſo ſegmento, e conſeguentemente quella del diſco ſolare, che è in tutto equivalente alla prima.

Per mezzo di queſta formola rieſce ora faciliſſima la coſtruzione di una Tavola, la quale rappreſenti le varie illuminazioni del ſole nelle differenti diſtanze del ſuo centro dal zenit, ovvero nelle differenti altezze del centro ſolare ſopra l' orizzonte, facendo $= 1$ l' illuminazione corriſpondente all' altezza di $90°$.

TAVOLA.

Altezze del centro solare sopra l' orizzonte.	Illuminazioni prodotte dal sole in un piano orizzontale.						
		64°	0,8987940	33°	0,5446390	2°	0,0348995
		63°	0,8910065	32°	0,5299193	1°	0,0174524
		62°	0,8829470	31°	0,5150381		
		61°	0,8746197	30°	0,5000000		
		60°	0,8660254	29°	0,4848096		
90°	1,0000000	59°	0,8571673	28°	0,4694716		
89°	0,9998477	58°	0,8480481	27°	0,4539905		
88°	0,9993908	57°	0,8386706	26°	0,4383712		
87°	0,9986295	56°	0,8290376	25°	0,4226183		
86°	0,9975640	55°	0,8191521	24°	0,4067366		
85°	0,9961947	54°	0,8090170	23°	0,3907311		
84°	0,9945218	53°	0,7986355	22°	0,3746066		
83°	0,9925462	52°	0,7880107	21°	0,3583679		
82°	0,9902680	51°	0,7771460	20°	0,3420202		
81°	0,9876883	50°	0,7660444	19°	0,3255682		
80°	0,9848077	49°	0,7547096	18°	0,3090170		
79°	0,9816271	48°	0,7431448	17°	0,2923717		
78°	0,9781476	47°	0,7313537	16°	9,2756374		
77°	0,9743701	46°	0,7193398	15°	0,2588190		
76°	0,9702957	45°	0,7071068	14°	0,2419219		
75°	0,9659258	44°	0,6946584	13°	0,2249511		
74°	0,9612617	43°	0,6819984	12°	0,2079117		
73°	0,9563048	42°	0,6691306	11°	0,1908090		
72°	0,9510565	41°	0,6560590	10°	0,1736482		
71°	0,9455185	40°	0,6427876	9°	0,1564345		
70°	0,9396926	39°	0,6293204	8°	0,1391731		
69°	0,9335804	38°	0,6156615	7°	0,1218693		
68°	0,9271839	37°	0,6018150	6°	0,1045285		
67°	0,9205049	36°	0,5877853	5°	0,0871527		
66°	0,9135454	35°	0,5735764	4°	0,0697565		
65°	0,9063078	34°	0,5591929	3°	0,0523360		

Siccome

Siccome inoltre è noto dall' Astronomia, che l' angolo sotteso dal semidiametro solare, ovvero l' arco PD, oppure p è uguale a 16′, il lembo inferiore del disco solare non giugne a toccare l' orizzonte se non allorquando il centro del sole si trova a 16′ di altezza. Conseguentemente per le altezze del centro solare minori di un grado risulta la seguente

TAVOLA.

Altezze del centro solare minori di un grado.	Illuminazioni prodotte da tutto il disco solare sopra un piano orizzontale.				
		43′	0, 0125079	22′	0, 0063995
		42′	0, 0122170	21′	0, 0061086
		41′	0, 0119261	20′	0, 0058177
		40′	1, 0116353	19′	0, 0055268
		39′	0, 0113444	18′	0, 0052360
59′	0, 0171616	38′	0, 0110535	17′	0, 0049451
58′	0, 0168707	37′	0, 0107627	16′	0, 0046542
57′	0, 0165799	36′	0, 0104718		
56′	0, 0162802	35′	0, 0101809		
55′	0, 0159982	34′	0, 0098900		
54′	0, 0157073	33′	0, 0095992		
53′	0, 0154165	32′	0, 0093083		
52′	0, 0151256	31′	0, 0090174		
51′	0, 0148348	30′	0, 0087265		
50′	0, 0145439	29′	0, 0084357		
49′	0, 0142530	28′	0, 0081448		
48′	0, 0139622	27′	0, 0078539		
47′	0, 0136713	26′	0, 0075630		
46′	0, 0133805	25′	0, 0072721		
45′	0, 0130896	24′	0, 0069813		
44′	0, 0127987	23′	0, 0066904		

Colle dottrine finqui esposte si può ora dare il giusto valore a quell' osservazione cardinale di *Bouguer*, fulla quale quel celebre Geometra fonda tutta la fua teoria dell' indebolimento del lume degli aftri nell' attraverfare l' atmosfera terreftre, e coftruifce la fua Tavola delle forze del lume dopo il paffaggio per l' atmosfera nelle differenti altezze dell' aftro. Paragona egli l' intenfità della luce lunare nell' altezza di 19° 16' con quella che corrifponde all' altezza di 66°. 11', e dopo un' attenta offervazione ftabilifce il rapporto delle due intenfità in quello di 1681 : 2500, cioè a dire fecondo *Bouguer* la luna all' altezza apparente di 19°. 16' fopra l' orizzonte fparge fulla terra una luce un terzo più debole di quella che vi manda nell' altezza di 66°. 11'.

Ma fe fi applica a quefto cafo la noftra formola π fen. p^2 cof. a, fi trova fubito il rapporto di quelle due intenfità efpreffo da 32996 : 91484; e però la luna fenza l' alterazione prodotta dall' atmosfera (da cui la noftra formola prefcinde) getta fulla terra una luce quafi tre volte più debole all' altezza di 19°. 16', che all' altezza di 66°. 11'; e fiffatto indebolimento dee poi crefcere molto più avendo riguardo alla diminuzione del lume nel paffaggio per l' atmosfera, diminuzione tanto maggiore, quanto è più lungo il viaggio della luce per l' atmosfera, offia quanto è più vicina la luna all'orizzonte. Quindi può farfi giudizio, qual poco conto dee farfi di quell' offervazione fondamentale di *Bouguer*, ed a qual inftabile principio fi appoggia tutta la fua teoria della difperfione e del diffipamento, che foffre il lume nel tragittare l' atmosfera terreftre.

Finalmente il maneggio della predetta formola ci fa conofcere un' altra verità poco o nulla attefa, ed è la notabiliffima diverfità nella forza della luce folare, e confeguentemente nella chiarezza del giorno dall' una all' altra ftagione dell' anno. Per cagion d' efempio qui in Pavia, dove l' altezza meridiana del centro del fole nel giorno del folftizio d' eftate è di $68^\circ. 17'$, e nel folftizio d' inverno è di $21^\circ. 21'$, fi fcuopre, che la chiarezza del giorno in ful meriggio nel primo folftizio fta a quella dell' altro folftizio come 92902 : 36406, cioè il meriggio del giorno folftiziale eftivo è oltre il doppio più chiaro e luminofo del meriggio del giorno folftiziale iemale, ed una tal proporzione fra lo fplendore meridiano de' due folftizj crefce poi maggiormente pel diffipamento della luce folare nel fuo tragitto attraverfo l' atmosfera, il qual diffipamento è fempre vie minore quanto è maggiore l' altezza del fole full' orizzonte.

Refta ora per ultimo da indagare l' illuminazione di qualunque parte vifibile del difco folare nell' atto che attraverfa l' orizzonte. La formola efprimente l' illuminazione prodotta da qualunque parte indeterminata del difco del fole fopra un piano orizzontale fi è trovata $= \frac{\varphi}{2\pi} \text{cof.}\, a + \frac{\text{fen.}\, \varphi\, \text{fen.}\, a (p - \text{fen.}\, p\, \text{cof.}\, p)}{2\pi\, \text{fen.}\, p^2}$, nella quale p è l' angolo fottefo dal femidiametro del fole, cioè $p = 16'$; 2π è la circonferenza del cerchio defcritto col raggio 1, cioè $2\pi = 6,28318530$; a è la diftanza del centro del fole dal zenit; φ è l' angolo al polo del fegmento luminofo ecc. Siccome in quefta formola è invariabile la quantità $\frac{p - \text{fen.}\, p\, \text{cof.}\, p}{2\pi\, \text{fen.}\, p^2}$ in tutte le differenti altezze del centro folare fopra l' orizzonte, fia bene determinarla anticipatamente. Effendo dunque $2\pi = 360^\circ = 21600'$, $p = 16'$, ftarà $21600' : 16' :: 6,28318530$: al quarto, che farà p efpreffo in parti del raggio 1. Sicchè

$$\begin{array}{ll}
\text{log. } 6,28318530 & = 0,7981799 \\
\text{log. } 16' \ldots\ldots & = 1,2041200 \\
\hline
 & \ 2,0022999 \\
\text{log. } 21600' \ldots & = 4,3344537 \\
\hline
 & \ 7,6678462 \text{ numero} = 0,0046542
\end{array}$$

Dunque $p = 0,0046542$

Parimente per trovare ſen. p coſ. p, che dee ſottrarſi da p ſi fa

$$\begin{array}{ll} \log.\,\text{ſen.}\,p \ldots\ldots = & 7,6678445 \\ \log.\,\text{coſ.}\,p \ldots\ldots = & 9,9999953 \\ \hline & 7,6678398 \text{ numero} = 0,0046541 \end{array}$$

Perciò p — ſen. p coſ. p . . . . . . $= 0,0000001$

Si trova ora log. $\dfrac{2\pi\,\text{ſen.}\,p^2}{p - \text{ſen.}\,p\,\text{coſ.}\,p}$ così:

$$\begin{array}{l} \log.\ 2\pi \ \ldots\ldots = 0,7981799 \\ 2 \log.\ \text{ſen.}\ p \ldots\ldots = 5,3356890 \\ \hline \log.\ 2\pi\ \text{ſen.}\,p^2 \ldots = 6,1338689 \\ \log.\ \dfrac{1}{p - \text{ſen.}\,p\,\text{coſ.}\,p} \ldots = 7,0000000 \end{array}$$

$\log.\ \dfrac{2\pi\ \text{ſen.}\,p^2}{p - \text{ſen.}\,p\ \text{coſ.}\,p} \ldots = 3,1338689$, che è il logaritmo da ſottrarſi da log. ſen. φ ſen. a per avere il logaritmo del ſecondo termine della formola, cioè di $\dfrac{\text{ſen.}\,\varphi\ \text{ſen.}\,a\,(p - \text{ſen.}\,p\ \text{coſ.}\,p)}{2\pi\ \text{ſen.}\,p^2}$. Ecco dunque il proſpetto

$2\pi' = 21600'$ $\qquad$ $\log.\ 2\pi' = 4,3344537$

$2\pi = 6,28318530$ $\qquad$ $\log.\ \dfrac{2\pi\ \text{ſen.}\,p^2}{p - \text{ſen.}\,p\ \text{coſ.}\,p} = 3,1338689$

PARTE I.

Altezze del centro ſolare ſopra l'orizzonte.

CASO I.

Altezza del centro del ſole ſopra l'orizzonte $= 15'$; onde $a = 89^\circ . 45'$; e così $\varphi = 90^\circ + \text{arc. ſen.}\ \frac{15}{16}$. Ma

$\log. \frac{15}{16} = 9, 9719713$, a cui corrisponde arc. $= 69^\circ . 38'$.

Dunque $\varphi = 90^\circ + 69^\circ\ 38' = 159^\circ . 38' = 9578'$.

Sicchè $\frac{\varphi'}{2\pi'}$ cos. $a = \frac{9578}{21600}$ sen. $15'$. Perciò

$$\begin{array}{ll} \log.\ 9578 & = 3,\ 9812748 \\ \log. \text{sen.}\ 15' \ldots & = 7,\ 6398160 \\ \hline & \quad 1,\ 6210908 \\ \log.\ 21600 \ldots & = 4,\ 3344537 \\ \hline & \quad 7,\ 2866371 \text{ num.} \ldots = 0,\ 0019348 \end{array}$$

sen. φ = sen. $159^\circ . 38'$ = sen. $20^\circ . 22'$

$$\begin{array}{ll} \log. \text{sen.}\ \varphi \ldots & = 9,\ 5416126 \\ \log. \text{sen.}\ a \ldots & = 9,\ 9999959 \\ \hline & \quad 9,\ 5416085 \\ & -3,\ 1338689 \\ \hline & \quad 6,\ 4077396 \text{ num.} \ldots = 0,\ 0002557 \end{array}$$

Dunque l'illuminazione del semisegmento superiore all' orizzonte .... $= 0,\ 0021905$

e l'illuminazione di tutto quel segmento superiore all'orizzonte essendo doppia, è .... $= 0,\ 0043810$

(A)

CASO II.

Altezza del centro solare sopra l'orizzonte $= 14'$; perciò $a = 89^\circ . 46'$; onde $\varphi = 90^\circ +$ arc. sen. $\frac{14}{16} =$ $90^\circ +$ arc. sen. $\frac{7}{8}$. Ma log. $\frac{7}{8} = 9,\ 9420080$, a cui corrisponde arc. $= 61^\circ . 3'$.

Dunque $\varphi = 151^\circ . 3' = 9063'$. Sicchè $\frac{\varphi'}{2\pi}$ cos. $a = \frac{9063}{21600}$ sen. $14'$. Perciò

log. 9063 = 3, 9572720
log. sen. 14′ = 7, 6098530

1, 5671250
log. 21600 = 4, 3344537

7, 2326713 num. = 0, 0017087

sen. φ = sen. 151°. 3′ = sen. 28°. 57′

log. sen. φ .... = 9, 6848868
log. sen. a ... = 9, 9999964

9, 6848832
— 3, 1338689

6, 5510143 num. = 0, 0003556

Dunque l'illuminazione del semisegmento è = 0 , 0020643
e però l'illuminazione doppia, cioè di
tutto il segmento è .... = 0, 0041286
(*B*)

Caso III.

Altezza del centro solare = 13′, quindi a = 89°. 47′; e però φ = 90° + arc. sen. $\frac{13}{16}$. Ma log. $\frac{13}{16}$ = 9, 9098233, a cui corrisponde arc. = 54°. 21′. Dunque φ = 144°. 21′ = 8661′. Dunque $\frac{\varphi'}{2\pi'}$ cos. a = $\frac{8661}{21600}$ sen. 13′. Sicchè

log. 8661 ... = 3, 9375680
log. sen. 13′ .. = 7, 5776686

1, 5152366
log. 21600 = 4, 3344537

7, 1807829 num. = 0, 0015163

sen. φ = sen. 144°. 21′ = sen. 35°. 39′

log. sen. $\varphi = 9,7655436$
log. sen. $a = 9,9999969$

$9,7655405$
$-\ 3,1338689$

$6,6316716$ num. $= 0,0004282$

Dunque l'illuminazione del semisegmento
è . . . . $= 0,0019445$
e l'illuminazione totale . . . . . . $= 0,0038890$
(C)

CASO IV.

Altezza del centro solare $= 12'$; cioè $a = 89^\circ.\ 48'$; onde $\varphi = 90^\circ +$ arc. sen. $\frac{3}{4}$. Ma log. $\frac{3}{4} = 9,8750612$, a cui corrisponde arc. $= 48^\circ.\ 35'$; perciò $\varphi = 138^\circ.\ 35' = 8315'$. Dunque $\frac{\varphi'}{2\pi'}$ cos. $a = \frac{8315}{21600}$ sen. $12'$. Sicchè

log. $8315 = 3,9198623$
log. sen. $12' = 7,5429065$

$1,4627688$
log. $21600 = 4,3344537$

$7,1283151$ num. $= 0,0013437$

sen. $\varphi =$ sen. $138^\circ.\ 35' =$ sen. $41^\circ.\ 25'$. Onde
log. sen. $\varphi = 9,8205496$
log. sen. $a = 9,9999974$

$9,8205470$
$-\ 3,1338689$

$6,6866781$ num. $= 0,0004860$

Dunque l'illuminazione del semisegmento è . . . . $= 0,0018297$
e l'illuminazione totale . . . . . . $= 0,0036594$
(D)

Caso V.

Altezza del centro ſolare $= 11'$, ovvero $a = 89°. 49'$; onde $\varphi = 90° +$ arc. ſen. $\frac{11}{16}$. Ma log. $\frac{11}{16} = 9,8372727$, a cui corriſponde arc. $43°. 26'$. Sichè $\varphi = 133°. 26' = 8006'$. Perciò $\frac{\varphi'}{2\pi'}$ coſ. $a = \frac{8006}{21600}$ ſen. $11'$.

$$\begin{array}{rl}
\text{log. } 8006 = & 3,9034156 \\
\text{log. ſen. } 11' = & \underline{7,5051181} \\
 & 1,4085337 \\
\text{log. } 21600 = & \underline{4,3344537} \\
 & 7,0740800 \quad \text{num.} = 0,0011860
\end{array}$$

ſen. $\varphi =$ ſen. $133°, 26' =$ ſen. $46°. 34'$. Dunque

$$\begin{array}{rl}
\text{log. ſen. } \varphi = & 9,8610412 \\
\text{log. ſen. } a = & \underline{9,9999978} \\
 & 9,8610390 \\
- & \underline{3,1338689} \\
 & 6,7271701 \quad \text{num.} = \underline{0,0005335}
\end{array}$$

Dunque l' illuminazione del ſemiſegmento è . . . . $= 0,0017195$
e l' illuminazione totale . . . . . $= 0,0034390$
(*E*)

Caso VI.

Altezza del centro ſolare $= 10'$, ovvero $a = 89°. 50'$., onde $\varphi = 90° +$ arc. ſen. $\frac{5}{8}$. Ma log. $\frac{5}{8} = 9,7958800$, a cui corriſponde arc. $= 38°. 41'$.

Dunque

Dunque $\varphi = 128°.\ 41' = 7721'$. Sicchè $\frac{\varphi'}{2\pi}$ coſ. a $= \frac{7721}{21600}$ ſen. $10'$. Dunque

$$\begin{array}{rl} \text{log. } 7721 = & 3,\ 8876736 \\ \text{log. ſen. } 10' = & \underline{7,\ 4637255} \\ & 1,\ 3513991 \\ \text{log. } 21600 = & \underline{4,\ 3344537} \\ & 7,\ 0169464 \quad \text{num.} = 0,\ 0010398 \end{array}$$

ſen. φ = ſen. $108°.\ 41'$ = ſen. $51°.\ 19'$. Onde

$$\begin{array}{rl} \text{log. ſen. } \varphi = & 9,\ 8924354 \\ \text{log. ſen. } a = & \underline{9,\ 9999982} \\ & 9,\ 8924336 \\ & \underline{-\ 3,\ 1338689} \\ & 6,\ 7585647 \quad \text{num.} = \underline{0,\ 0005735} \end{array}$$

Dunque l'illuminazione del ſemiſegmento è . . . . $= 0,\ 0016133$
e l'illuminazione totale . . . . . . $= 0,\ 0032266$
(F)

Caso VII.

Altezza del centro ſolare $= 9'$, cioè $a = 89°.\ 51'$; onde $\varphi = 90° +$ arc. ſen. $\frac{9}{16}$. Ma log. $\frac{9}{16} = 9,7531225$, a cui corriſponde arc. $= 34°.\ 30'$. Dunque $\varphi = 124°.\ 30'$ $= 7470'$. Sicchè $\frac{\varphi'}{2\pi'}$ coſ. $a = \frac{7470}{21600}$ ſen. $9'$; quindi

$$\begin{array}{rl} \text{log. } 7470 = & 3,\ 8733206 \\ \text{log. ſen. } 9' = & \underline{7,\ 4179681} \\ & 1,\ 2912887 \\ \text{log. } 21600 = & \underline{4,\ 3344537} \\ & 6,\ 9568350 \quad \text{num.} = 0,\ 0009054 \end{array}$$

sen. ϕ = sen. 124°. 30′ = sen. 55°. 30′

$$\begin{array}{rl} \text{log. sen. } \phi = & 9,\ 9159937 \\ \text{log. sen. } a = & 9,\ 9999985 \\ \hline & 9,\ 9159922 \\ & -\ 3,\ 1338689 \\ \hline & 6,\ 7821233 \quad \text{num.} = 0,\ 0006055 \end{array}$$

Dunque l'illuminazione del semisegmento è . . . . = 0, 0015109

e l'illuminazione totale . . . . = 0, 0030218

(G)

CASO VIII.

Altezza del centro solare = 8′, cioè $a = 89°.\ 52'$; onde $\phi = 90° + \text{arc. sen. } \frac{1}{2} = 90° + 30° = 120° = 7200'$. Dunque $\frac{\phi'}{2\pi'}$ cos. $a = \frac{7200}{21600}$ sen. 8′. Sicchè

$$\begin{array}{rl} \text{log. } 7200 = & 3,\ 8573325 \\ \text{log. sen. } 8' = & 7,\ 3668157 \\ \hline & 1,\ 2241482 \\ \text{log. } 21600 = & 4,\ 3344537 \\ \hline & 6,\ 8896945 \quad \text{num.} = 0,\ 0007757 \end{array}$$

sen. ϕ = sen. 120° = sen. 60°. Dunque

$$\begin{array}{rl} \text{log. sen. } \phi = & 9,\ 9375306 \\ \text{log. sen. } a = & 9,\ 9999988 \\ \hline & 9,\ 9375294 \\ & -\ 3,\ 1338689 \\ \hline & 6,\ 8036605 \quad \text{num.} = 0,\ 0006363 \end{array}$$

Dunque l'illuminazione del semisegmento è . . . . = 0, 0014120

e l'illuminazione totale . . . . . . = 0, 0028240

(H).

Caso IX.

Altezza del centro ſolare $= 7'$; ovvero $a = 89°. 53'$; onde $\phi = 90° + \text{arc. ſen.}\ \frac{7}{16}$. Ma log. $\frac{7}{16} = 9,6409780$, a cui corriſponde arc. $= 25°. 56'$. Dunque $\phi = 115°. 56' = 6956'$. Dunque $\frac{\phi'}{2\pi'}\ \text{coſ.}\ a = \frac{6956}{21600}\ \text{ſen.}\ 7'$. Sicchè

log. $6956 = 3,8423596$
log. ſen. $7' = 7,3088239$
$1,1511835$
log. $21600 = 4,3344537$
$6,8167298$ num. $= 0,0006557$

ſen. ϕ = ſen. $115°. 56'$ = ſen. $64°. 4'$. Sicchè

log. ſen. $\phi = 9,9539063$
log. ſen. $a = 9,9999991$
$9,9539054$
$-\ 3,1338689$
$6,8200365$ num. $= 0,0006608$

Dunque l'illuminazione del ſemiſegmento è . . . . $= 0,0013165$
e l'illuminazione totale . . . . $= 0,0026330$
(I)

Caso X.

Altezza del centro ſolare $= 6'$, cioè $a = 89°. 54'$; onde $\phi = 90° + \text{arc. ſen.}\ \frac{3}{8}$. Ma log. $\frac{3}{8} = 9,5740312$, a cui corriſponde arc. $= 22°. 1'$. Dunque $\phi = 112°. 1' = 6721'$. Sicchè $\frac{\phi'}{2\pi'}\ \text{coſ.}\ a = \frac{6721}{21600}\ \text{ſen.}\ 6'$. Onde

$$
\begin{array}{ll}
\log.\ 6721 & = 3,\ 8274339 \\
\log.\ \text{fen.}\ 6' & = \underline{7,\ 2418771} \\
 & \quad 1,\ 0693110 \\
\log.\ 21600 & = \underline{4,\ 3344537} \\
 & \quad 6,\ 7348573 \quad \text{num.} = 0,\ 0005431
\end{array}
$$

fen. φ = fen. 112°. 1′ = fen. 67°. 59′. Sicchè

$$
\begin{array}{ll}
\log.\ \text{fen.}\ \varphi & = 9,\ 9671148 \\
\log.\ \text{fen.}\ a & = \underline{9,\ 9999993} \\
 & \quad 9,\ 9671141 \\
 & - \underline{3,\ 1338689} \\
 & \quad 6,\ 8332452 \quad \text{num.} = \underline{0,\ 0006811}
\end{array}
$$

Dunque l'illuminazione del semisegmento è . . . . = 0, 0012242
e l'illuminazione totale . . . . = 0, 0024484
(L)

CASO XI.

Altezza del centro solare $= 5'$, cioè $a = 89°.\ 55'$; onde $\varphi = 90° + \text{arc. fen.}\ \frac{5}{16}$ Ma log. $\frac{5}{16} = 9,4948500$, a cui corrisponde arc. $= 18°.\ 13'$. Dunque $\varphi = 108°.\ 13' = 6493'$. Sicchè $\frac{\varphi'}{2\pi'}$ cof. $a = \frac{6493}{21600}$ fen. $5'$.

$$
\begin{array}{ll}
\log.\ 6493 & = 3,\ 8124454 \\
\log.\ \text{fen.}\ 5' & = \underline{7,\ 1626960} \\
 & \quad 0,\ 9751414 \\
\log.\ 21600 & = \underline{4,\ 3344537} \\
 & \quad 6,\ 6406877 \quad \text{num.} = 0,\ 0004372
\end{array}
$$

sen. φ = sen. 108°. 13′ = sen. 71°. 47′. Onde

$$\begin{array}{rcl} \log.\ \text{sen.}\ \varphi & = & 9,\ 9776693 \\ \log.\ \text{sen.}\ a & = & 9,\ 9999995 \\ \hline & & 9,\ 9776688 \\ & - & 3,\ 1338689 \\ \hline & & 6,\ 8437999 \end{array} \quad \text{num.} = 0,\ 0006979$$

Dunque l'illuminazione del semisegmento è . . . . = 0, 0011351

e l'illuminazione intera . . . . . . = 0, 0022702

(M)

CASO XII.

Altezza del centro solare $= 4'$, cioè $a = 89°.\ 56'$; onde $\varphi = 90°. +$ arc. sen. $\frac{1}{4}$. Ma log. $\frac{1}{4} = 9,\ 3979400$, a cui corrisponde arc. $= 14°.\ 29'$. Dunque $\varphi = 104°.\ 29'$ $= 6269'$. Sicchè $\frac{\varphi'}{2\pi'}$ cos. $a = \frac{6269}{21600}$ sen. $4'$. Perciò

$$\begin{array}{rcl} \log.\ 6269 & = & 3,\ 7971983 \\ \log.\ \text{sen.}\ 4' & = & 7,\ 0657860 \\ \hline & & 0,\ 8629843 \\ \log.\ 21600 & = & 4,\ 3344537 \\ \hline & & 6,\ 5285306 \end{array} \quad \text{num.} = 0,\ 0003377$$

sen. φ = sen. 104°. 29′ = sen. 75°. 31′. Dunque

$$\begin{array}{rcl} \log.\ \text{sen.}\ \varphi & = & 9,\ 9859742 \\ \log.\ \text{sen.}\ a & = & 9,\ 9999997 \\ \hline & & 9,\ 9859739 \\ & - & 3,\ 1338689 \\ \hline & & 6,\ 8521050 \end{array} \quad \text{num.} = 0,\ 0007114$$

Dunque l'illuminazione del semisegmento è . . . . = 0, 0010491

e l'illuminazione totale . . . . = 0, 0020982

(N)

CASO XIII.

Altezza del centro solare $= 3'$, cioè $a = 89°. 57'$; onde $\varphi = 90° + \text{arc. sen.} \frac{3}{16}$. Ma log. $\frac{3}{16} = 9,2730012$, a cui corrisponde arc. $= 10°. 48'$; onde $\varphi = 100°. 48' = 6048'$. Sicchè $\frac{\varphi'}{2\pi'}$ cos. $a = \frac{6048}{21600}$ sen. $3'$. Onde

$$\begin{array}{lrl}
\text{log. } 6048 & = & 3,7816118 \\
\text{log. sen. } 3' & = & \underline{6,9408473} \\
 & & 0,7224591 \\
\text{log. } 21600 & = & \underline{4,3344537} \\
 & & 6,3880054 \quad \text{num.} = 0,0002443
\end{array}$$

sen. $\varphi =$ sen. $100°. 48' =$ sen. $79°. 12'$. Dunque

$$\begin{array}{lrl}
\text{log. sen. } \varphi & = & 9,9922385 \\
\text{log. sen. } a & = & \underline{9,9999998} \\
 & & 9,9922383 \\
 & - & \underline{3,1338689} \\
 & & 6,8583694 \quad \text{num.} = \underline{0,0007217}
\end{array}$$

Dunque l'illuminazione del semisegmento è . . . . $= 0,0009660$
e l'illuminazione totale . . . . $= 0,0019320$
(O)

CASO XIV.

Altezza del centro solare $= 2'$, cioè $a = 89°. 58'$; onde $\varphi = 90° + \text{arc. sen.} \frac{1}{8}$. Ma log. $\frac{1}{8} = 9,0969100$, a cui corrisponde arc. $= 7°. 11'$. Dunque $\varphi = 97°. 11' = 5831'$. Perciò $\frac{\varphi'}{2\pi}$ cos. $a = \frac{5831}{21600}$ sen. $2'$. Onde

$$\begin{array}{rcl}
\text{log. } 5831 & = & 3,\,7657430 \\
\text{log. fen. } 2' & = & 6,\,7627561 \\
\hline
 & & 0,\,5284991 \\
\text{log. } 21600 & = & 4,\,3344537 \\
\hline
 & & 6,\,1940454 \quad \text{num.} = 0,\,0001563
\end{array}$$

fen. $\phi =$ fen. $97°.\ 11' =$ fen. $82°.\ 49'$. Sicchè

$$\begin{array}{rcl}
\text{log. fen. } \phi & = & 9,\,9965778 \\
\text{log. fen. } a & = & 9,\,9999999 \\
\hline
 & & 9,\,9965777 \\
 & - & 3,\,1338689 \\
\hline
 & & 6,\,8627088 \quad \text{num.} = \underline{0,\,0007290}
\end{array}$$

Dunque l' illuminazione del femifegmento è . . . . $= 0,\,0008853$
e l' illuminazione totale . . . . . . $= 0,\,0017706$
(P).

Caso XV.

Altezza del centro folare $= 1'$, cioè $a = 89°.\ 59'$. Onde $\phi = 90° +$ arc. fen. $\frac{1}{16}$. Ma log. $\frac{1}{16} = 8,7958800$, a cui corrifponde arc. $= 3°.\ 35'$. Dunque $\phi = 93°.\ 35'$ $= 5615'$. Perciò $\frac{\phi'}{2\pi'}$ cof. $a = \frac{5615}{21600}$ fen. $1'$; vale a dire

$$\begin{array}{rcl}
\text{log. } 5615 & = & 3,\,7493498 \\
\text{log. fen. } 1' & = & 6,\,4637261 \\
\hline
 & & 0,\,2130759 \\
\text{log. } 21600 & = & 4,\,3344537 \\
\hline
 & & 5,\,8786222 \quad \text{num.} = 0,\,0000756
\end{array}$$

fen. $\phi =$ fen. $93°.\ 35' =$ fen. $86°.\ 25'$. Dunque

log. sen. $\varphi = 9,9991501$
log. sen. $a = 9,9999999$

$9,9991500$
$-3,1338689$

$6,8652811$ num. $= 0,0007333$

Dunque l' illuminazione del semisegmento è . . . . $= 0,0008089$
e l' illuminazione intera . . . . . . $= 0,0016178$
(Q).

CASO XVI.

Altezza del centro solare $= 0$, cioè $a = 90°$, onde $\varphi = 90° +$ arc. sen. $o = 90°$. Perciò essendo in tal caso cos. $a = 0$, svanisce il primo termine della formola, e resta il secondo, che è come segue

log. sen. $\varphi = 10,0000000$
log. sen. $a = 10,0000000$

$20,0000000$
$-3,1338689$

$6,8661311$ num. $= 0,0007347$

Dunque l' illuminazione del semisegmento è . . . . $= 0,0007347$
e l' illuminazione intera . . . . . . $= 0,0014694$
(R).

PARTE II.

Depressione del centro solare sotto l' orizzonte.

CASO I.

Altezza negativa del centro solare, cioè depressione $= 1'$; dunque $a = 90°.\ 1'$. In tutti questi casi si troverà

verà il valore di $\varphi = 90° - \text{arc. sen.} \frac{1}{16} = 90° - 3°.\ 35'$ (n°. xv) $= 86°.\ 25' = 5185'$. Dunque $\frac{\varphi'}{2\pi'}$, cos. $a = \frac{5185}{21600} \times -$ sen. $1' = -\frac{5185}{21600}$ sen. $1'$. Sicchè

log. 5185	=	3, 7147488
log. sen. 1′	=	6, 4637261
		0, 1784749
log. 21600	=	4, 3344537
		5, 8440212 num. = − 0, 0000698

Ora è manifesto, che il secondo termine della formola è precisamente quello stesso che si è trovato al n°. xv, cioè 0, 0007333
da cui sottratto il precedente si ha l' illuminazione del semisegmento = 0, 0006635
e l' illuminazione totale . . . . = 0, 0013270
(*A*).

CASO II.

Depressione del centro solare $= 2'$; dunque $a = 90°.\ 2'$; onde $\varphi = 90° - \text{arc. sen.} \frac{1}{8} = 90° - 7°.\ 11'$ (n° xiv) $= 82°.\ 49' = 4969'$. Dunque $\frac{\varphi'}{2\pi'}$ cos. $a = -\frac{4969}{21600}$ sen. $2'$. Sicchè

log. 4969	=	3, 6962690
log. sen. 2′	=	6, 7627561
		0, 4590251
log. 21600	=	4, 3344537
		6, 1245714 num. = − 0, 0001332

Il secondo termine della formola è lo stesso, che si è trovato al n°. XIV; cioè 0, 0007290

Dunque sarà l' illuminazione del semi-segmento . . . . = 0, 0005958
e l' illuminazione totale . . . . . . = 0, 0011916
(*B*).

CASO III.

Depressione del centro solare $=3'$, cioè $a=90°. 3'$, onde $\varphi=90°-$ arc. sen. $\frac{3}{16}=90°-10°. 48'=79°. 12'$ $=4752'$. Dunque $\frac{\varphi'}{2\pi'}$ cos. $a=-\frac{4752}{21600}$ sen. $3'$, cioè

log. 4752 = 3, 6768764
log. sen. 3' = 6, 9408473
0, 6177237
log. 21600 = 4, 3344537
6, 2832700 num. = — 0, 0001919

Il secondo termine coincide con quello del n°. XIII, cioè si trova . . . . = 0, 0007217

Dunque l' illuminazione del semisegmento . . . . = 0, 0005298
e l' illuminazione totale . . . . . . = 0, 0010596
(*C*).

CASO IV.

Depressione del centro solare $=4'$, cioè $a=90°. 4'$; onde $\varphi=90°-$ arc. sen. $\frac{1}{4}=90°-14°. 29'=75°. 31'$ $=4531'$. Perciò $\frac{\varphi'}{2\pi'}$ cos. $a=-\frac{4531}{21600}$ sen. $4'$, cioè

log. 4531 = 3, 6561941
log. sen. 4′ = 7, 0657860

0, 7219801
log. 21600 = 4, 3344537

6, 3875264 num. = — 0, 0002441

Il secondo termine coincide con quello del n°. XII, cioè si trova . . . . . = 0, 0007114

Dunque l' illuminazione del semisegmento . . . . = 0, 0004673
e l' illuminazione intera . . . . . . = 0, 0009346 (D).

CASO V.

Depressione del centro solare = 5′, cioè $a = 90°. 5'$;
onde $\varphi = 90° - \text{arc. sen.} \frac{5}{16} = 90° - 18°. 13' = 71°. 47'$
$= 4307'$. Onde $\frac{\varphi'}{2\pi'}$, cos. $a = - \frac{4307}{21600}$ sen. 5′; perciò

log. 4307 = 3, 6341749
log. sen. 5′ = 7, 1626960

0, 7968709
log. 21600 = 4, 3344537

6, 4624172 num. = — 0, 0002900

Il secondo termine coincide con quello del n°. XI; cioè si trova . . . . . = 0, 0006979

Dunque l' illuminazione del semisegmento è . . . . = 0, 0004079
e quindi sarà l' illuminazione intera = 0, 0008158 (E).

CASO VI.

Depressione del centro solare $= 6'$, cioè $a = 90°.\ 6'$.
Onde $\varphi = 90° - \text{arc. sen. } \frac{3}{8} = 90° - 22°.\ 1' = 67°.\ 59'$ $= 4079'$. Sicchè $\frac{\varphi'}{2\pi'}$ cos. $a = -\frac{4079}{21600}$ sen. $6'$. Perciò

log. 4079	=	3, 6105537
log. sen. 6'	=	7, 2418771
		0, 8524308
log. 21600	=	4, 3344537
		6, 5179771 num. = — 0, 0003296

Il secondo termine è lo stesso che quello del n°. x, cioè si trova . . . . . = 0, 0006811

Dunque l' illuminazione del semisegmento sarà . . . . = 0, 0003515
e quindi si ricava l' illuminazione intera . . . . = 0, 0007030
(F).

CASO VII.

Depressione del centro solare $= 7'$, cioè $a = 90°.\ 7'$; quindi $\varphi = 90° - \text{arc. sen. } \frac{7}{16} = 90° - 25°.\ 56' = 64°.\ 4'$ $= 3844'$. Sicchè $\frac{\varphi'}{2\pi'}$ cos. $a = -\frac{3844}{21600}$ sen. $7'$. Dunque

log. 3844	=	3, 5847834
log. sen. 7'	=	7, 3088239
		0, 8936073
log. 21600	=	4, 3344537
		6, 5591536 num. = — 0, 0003624

Il secondo termine coincide con quello del n°. IX, cioè si trova . . . . . $=$, 0, 0006608

Dunque l' illuminazione del semisegmento è . . . . $=$ 0, 0002984
e però nasce l' illuminazione intera $=$ 0, 0005968
(G).

CASO VIII.

Depressione del centro solare $= 8'$, cioè $a = 90°. 8'$;

onde $\varphi = 90° - \text{arc. sen.} \frac{1}{2} = 90° - 30° = 60° = 3600'$.

Dunque $\frac{\varphi'}{2\pi'} \text{cos.}\, a = -\frac{3600}{21600} \text{sen.}\, 8'$. Sicchè

log. 3600 $=$ 3, 5563025
log. sen. 8' $=$ 7, 3668157
0, 9231182
log. 21600 $=$ 4, 3344537
6, 5886645 num. $= -$ 0, 0003879

Il secondo termine coincide con quello del n°. VIII prec., e però si trova $=$ 0, 0006363

Dunque ne verrà, che l' illuminazione del semisegmento sarà . . . . $=$ 0, 0002484
onde l' illuminazione intera . . . . $=$ 0, 0004968
(H).

CASO IX.

Depressione del centro solare $= 9'$, cioè $a = 90°. 9'$;

onde $\varphi = 90° - \text{arc. sen.} \frac{9}{16} = 90° - 34°. 30' = 55°. 30'$

$= 3330'$. Dunque $\frac{\varphi'}{2\pi'} \text{cos.}\, a = -\frac{3330}{21600}$ sen. $9'$, cioè

log. 3330 = 3, 5224442
log. ſen. 9′ = 7, 4179681

0, 9404123
log. 21600 = 4, 3344537

6, 6059586 num. = — 0, 0004036

Il ſecondo termine coincide con quello del n.° VII Parte prima, onde ſi trova . . = 0, 0006055

Dunque l'illuminazione del ſemiſegmento è . . . . = 0, 0002019
e però l'illuminazione intera . . . . = 0, 0004038
(I)

CASO X.

Depreſſione del centro ſolare = 10′, cioè $a = 90°. 10′$, onde $\varphi = 90° - \text{arc. ſen.} \frac{5}{8} = 90° - 38°. 41′ = 51°. 19′ =$ $3079′$. Dunque $\frac{\varphi'}{2\pi} \text{coſ.}\, a = -\frac{3079}{21600} \text{ſen.}\, 10′$; quindi

log. 3079 = 3, 4884097
log. ſen. 10′ = 7, 4637255

0, 9521352
log. 21600 = 4, 3344537

6, 6176815 num. = — 0, 0004146

Il ſecondo termine coincide con quello del n.° VI. della prima Parte, onde ſi trova = 0, 0005735

Dunque l'illuminazione del ſemiſegmento è . . . . = 0, 0001589
e però l'illuminazione intera . . . = 0, 0003178
(L)

CASO XI.

Depreſſione del centro ſolare $= 11'$, cioè $a = 90°. 11'$; onde $\varphi = 90° -$ arc. ſen. $\frac{11}{16} = 90° - 43°. 26' = 46°. 34'$ $= 2794'$. Dunque $\frac{\varphi'}{2\pi'}$ coſ. $a = -\frac{2794}{21600}$ ſen. $11'$; quindi

log. 2794	=	3, 4462264
log. ſen. 11′	=	7, 5051181
		0, 9513445
log. 21600	=	4, 3344537
		6, 6168908 num. = — 0, 0004139

Il ſecondo termine coincide con quello del n.° v della Parte prima, ond' è . . . . = 0, 0005335

Sicchè l' illuminazione del ſemiſegmento è . . . . = 0, 0001196

e l' illuminazione intera . . . . = 0, 0002392

(M)

CASO XII.

Depreſſione del centro ſolare $= 12'$, cioè $a = 90°. 12'$, onde $\varphi = 90° -$ arc. ſen. $\frac{3}{4} = 90° - 48°. 35' = 41°. 25' = 2485'$. Dunque $\frac{\varphi'}{2\pi'}$ coſ. $a = -\frac{2485}{21600}$ ſen. $12'$, cioè

log. 2485	=	3, 3953264
log. ſen. 12′	=	7, 5429065
		0, 9382329
log. 21600	=	4, 3344537
		6, 6037792 num. = — 0, 0004016

Il secondo termine coincide con quello del n.° IV. della prima Parte, cioè . . . = 0, 0004860

Dunque l' illuminazione del semisegmento è . . . . = 0, 0000844

Dunque l' illuminazione intera . . . . = 0, 0001688

(N)

CASO XIII.

Depressione del centro solare $= 13'$, cioè $a = 90°. 13'$; onde $\phi = 90° -$ arc. sen. $\frac{13}{16} = 90° - 54°. 21' = 35°. 39' = 2139'$. Sicchè $\frac{\phi'}{2\pi'}$ cos. $a = -\frac{2139}{21600}$ sen. $13'$; cioè.

log. 2139	=	3, 3302108
log. sen. 13′	=	7, 5776686
		0, 9078794
log. 21600	=	4, 3344537
		6, 5734275 num. = − 0, 0003745

Il secondo termine coincide con quello del n.° III. Parte prima, onde si trova = 0, 0004282

Sicchè l' illuminazione del semisegmento = 0, 0000537

e però l' illuminazione intera . . . . = 0, 0001074

(O)

CASO XIV.

Depressione del centro solare $= 14'$, cioè $a = 90°. 14'$; onde $\phi = 90° -$ arc. sen. $\frac{7}{8} = 90° - 61°. 3' = 28°. 57' = 1737'$. Dunque $\frac{\phi'}{2\pi'}$ cos. $a = -\frac{1737}{21600}$ sen. $14'$, cioè

log.

$$\begin{array}{lrl} \log. 1737 & = & 3,\ 2397998 \\ \log. \text{sen. } 14' & = & 7,\ 6098530 \\ \hline & & 0,\ 8496528 \\ \log. 21600 & = & 4,\ 3344537 \\ \hline & & 6,\ 5151991 \text{ num.} = -0,\ 0003275 \end{array}$$

Il secondo termine si ha dal n.° II. della prima Parte, cioè si trova . . . . = 0, 0003556

Dunque l'illuminazione del semisegmento è . . . . = 0, 0000281

e l'illuminazione intera . . . . = 0, 0000562

(P)

CASO XV.

Depressione del centro solare $= 15'$, cioè $a = 90°.\ 15'$; onde $\varphi = 90° - \text{arc. sen.} \frac{15}{16} = 90° - 69°.\ 38' = 20°.\ 22'$ $= 1222'$; onde $\frac{\varphi'}{2\pi'}$ cos. $a = -\frac{1222}{21600}$ sen. $15'$, cioè

$$\begin{array}{lrl} \log. 1222 & = & 3,\ 0870712 \\ \log. \text{sen. } 15' & = & 7,\ 6398160 \\ \hline & & 0,\ 7268872 \\ \log. 21600 & = & 4,\ 3344537 \\ \hline & & 6,\ 3924335 \text{ num.} = -0,\ 0002468 \end{array}$$

Il termine secondo della formola si ha dal n.° I. della Parte prima, cioè si trova = 0, 0002557

Dunque l'illuminazione del semisegmento è . . . . = 0, 0000089

e l'illuminazione totale . . . . . . = 0, 0000178

($\mathfrak{Q}$)

Per ritrovare l'illuminazione del semidisco solare superiore al diametro orizzontale quando il disco tocca col lembo inferiore l'orizzonte, convien riflettere, che in tal caso è $a = 89^\circ.\ 44'$, ed inoltre $\varphi = 90^\circ = \frac{1}{4}\pi$. Quindi il primo termine della formola, cioè $\frac{\varphi}{2\pi}$ cos. a si cangia in $\frac{1}{4}$ cos. $a = \frac{1}{4} \times 0,0046542 = 0,0011635$. Il secondo termine poi della formola è il seguente

$$\begin{array}{rl} \log.\ \text{sen.}\ a = & 9,9999953 \\ - & 3,1338689 \\ \hline & 6,8661264 \quad \text{num.} = 0,0007347 \end{array}$$

Dunque l' illuminazione del quadrante superiore è $= 0,0018982$, e l'illuminazione del semidisco superiore al diametro orizzontale è $= 0,0037964$.

Se ora si sottrae questa illuminazione del semidisco superiore da quella dell' intero disco, che è $0,0046542$, il residuo dà l' illuminazione del semidisco inferiore al diametro orizzontale, la quale in conseguenza sarà $= 0,0008578$. Dunque (n.° XVI parte I.) sta l' illuminazione del semidisco inferiore (nel caso che tocchi l'orizzonte) all' illuminazione del medesimo rovesciato, cioè avente il diametro sull' orizzonte come sta 8578 a 14694. Ciò presenta una specie di paradosso, perchè quando il semidisco ha il suo diametro sull' orizzonte tramanda più obbliqui que' raggi, che sono più copiosi, cioè quelli che emanano dalle sue parti più basse e più larghe, e meno obliqui i raggi meno copiosi, ovvero emananti dalle sue parti più alte e più anguste; ed il contrario precisamente succede nel semidisco inverso avente il semidiametro orizzontale in alto; perlochè sembrerebbe, che questo e non quello dovesse produrre una maggiore illuminazione; ed è anche assai strano, che questo eccesso sia più di tre quarti dell' illuminazione minore.

Un paradoſſo così nuovo ed inaſpettato merita, che vi ci fermiamo un po' ſopra, ed eſaminiamo, ſe anche nelle maggiori altezze del ſole ſopra l'orizzonte ſi trovi eſſer vero, che il ſemidiſco diritto del ſole mandi più luce ſulla terra, che non ne manda il ſemidiſco inverſo, intendendo per ſemidiſco diritto il ſuperiore al diametro orizzontale in tale data altezza del centro ſolare, e per ſemidiſco inverſo l'inferiore al diametro orizzontale quando il centro del ſole ſi è già inoltrato ad un'altezza maggiore della precedente di ſedici minuti.

I.

Suppongo adunque in primo luogo, che l'altezza del centro ſolare $= 89^\circ . 44'$, cioè $a = 16'$, e quindi per ottenere l'illuminazione del quadrante ſuperiore al diametro orizzontale prendo $\varphi = 90^\circ$. Laonde $\frac{\varphi}{2\pi}$ coſ. a

$= \frac{1}{4}$ ſen. $89^\circ . 44' = \frac{1}{4} \times 0,\ 9999892 = 0,\ 2499973.$

Parimente

$$\begin{array}{rl} \text{log. ſen. } a = & 7,\ 6678445 \\ - & \underline{3,\ 1338689} \\ & 4,\ 5339756 \quad \text{num.} = 0,\ 0000034 \end{array}$$

Dunque l'illuminazione del quadrante $= 0,2500007$, e però l'illuminazione del ſemidiſco *diritto* $= 0,5000014$. Alzatoſi il centro ſolare di altri $16'$, cioè giunto al zenit, è evidente, che in tal ſituazione ogni ſemidiſco del ſole illumina l'orizzonte terreſtre egualmente, e conſeguentemente l'illuminazione del ſemidiſco *inverſo* è la metà di quella del diſco intero, cioè $= 0,5000000$, che è un poco minore della ritrovata pel ſemidiſco *diritto*. Suſſiſte adunque il paradoſſo di prima.

II.

Paſſo all' altezza del centro ſolare $= 45°$, cioè $a = 45°$, e piglio come prima $\varphi = 90°$. Sicchè $\frac{\varphi}{2\pi}$ coſ. $a = \frac{1}{4}$ ſen. $45° = \frac{1}{4} \times 0,7071068 = 0,1767767$. Inoltre

$$\begin{array}{rl} \text{log. ſen. } a = & 9,\ 8494850 \\ - & 3,\ 1338689 \\ \hline & 6,\ 7156161 \text{ num.} = 0,\ 0005195 \end{array}$$

Onde l' illuminazione del quadrante ſuperiore $= 0,1772962$, e l' illuminazione del ſemidiſco *diritto* $= 0,3545924$.

Aſcenda ora il centro del ſole per altri $16'$, e trovisi in queſto ſtato l' illuminazione del ſemidiſco ſuperiore al diametro orizzontale, e queſta ſottraggaſi dall' illuminazione già nota di tutto il diſco; il reſiduo ſarà l' illuminazione del ſemidiſco inferiore, che è appunto l' *inverſo* riſpettivamente al ſemidiſco dianzi conſiderato. Fatta pertanto l' altezza del centro ſolare $= 45°.16'$, cioè $a = 44°.44'$; $\varphi = 90°$; ſi deduce $\frac{\varphi}{2\pi}$ coſ. a $= \frac{1}{4}$ ſen. $45°.16' = \frac{1}{4} \times 0,7103901 = 0,1775975$.

Inoltre

$$\begin{array}{rl} \text{log. ſen. } a = & 9,\ 8474542 \\ - & 3,\ 1338689 \\ \hline & 6,\ 7135853 \text{ num.} = 0,\ 0005171 \end{array}$$

Dunque l' illuminazione del quadrante ſuperiore $= 0,1781146$, e l' illuminazione del ſemidiſco ſuperiore $= 0,3562292$. Ora queſta dee ſottrarſi da quella di tutto il diſco, la quale ſi trova immantinente con cercare il valore di coſ. a, a cui unicamente ſi riduce la noſtra formola generale con aſſumere $\varphi = 2\pi$. Sicchè l'illuminazione di tutto il diſco ſi rinviene $= 0,7103901$, e fatta quindi l' indicata sottrazione proviene o, 3541609 per l' illuminazione del semidisco inferiore, cioè dell'*inverso* rispetto a quel di prima nell' altra stazione del centro solare. E qui pure si scorge, che il semidisco *diritto* illumina più che l' *inverso*.

Resta finalmente a vedere, se ciò pur si verifica riguardo ad un segmento del disco solare compreso fra il diametro ed una corda parallela, considerando un tal segmento in due situazioni, prima col diametro giacente sull' orizzonte terrestre, che chiameremo segmento *diritto*, poi colla corda sull' orizzonte e col diametro in alto, che diremo segmento *inverso*. Suppongo la corda parallela distante dal diametro per la metà del raggio, ed essendosi già ritrovata l' illuminazione generata dal semidisco visibile quando l' orizzonte taglia per mezzo il disco solare, sottraggo da essa l' illuminazione prodotta da quel segmento di detto semidisco, che ha per saetta la metà del raggio, e col residuo ottengo l' illuminazione eccitata dal segmento *diritto* proposto. Ma per avere in tal supposto l' illuminazione nata dal segmento della saetta $= \frac{1}{2}$, divenendo $a = 90°$, $\varphi = 60°$, ed annullandosi il primo termine della nostra formola, si ritrova pel valore del secondo termine

$$\begin{array}{rl} \text{log. sen. } \varphi = & 9,9375306 \\ - & 3,1338689 \\ \hline & 6,8036617 \text{ num.} = 0,0006363 \end{array}$$

il qual numero duplicato, cioè o, 0012726 esprime l' illuminazione proveniente dal detto segmento, e questa sottratta dall' illuminazione o, 0014694 del semidisco visibile lascia un residuo o, 0001968, che rappresenta l' illuminazione del segmento *diritto* di cui si tratta. Per ritrovar poi quella del segmento *inverso* è manifesto che basta dall' illuminazione del segmento visibile, quando il centro del sole ha 8′ di altezza sopra l'orizzonte, sottrarre l'illuminazione del semicerchio superiore, e se quella, come è stato già dimostrato, è $=$ 0, 0028240, questa si determina come segue: Diventa in quest'ipotesi $a = 89°. 52'$, $\varphi = \frac{1}{2}\pi$, $\frac{\varphi}{2\pi}$

$\text{cos.}\, a = \frac{1}{4}\, \text{cos.}\, a = \frac{1}{4}\, \text{sen.}\, 8' = \frac{1}{4} \times 0,0023271 = 0,0005818$, che sarà il valore del primo termine della nostra formola. Pel valore del secondo si ha

$$\begin{array}{l} \text{log. sen. } a = 9,\ 9999973 \\ \quad\quad\quad\quad\ - 3,\ 1338689 \\ \hline \quad\quad\quad\quad\ \ \ 6,\ 8661284 \text{ num.} = 0,\ 0007347. \end{array}$$

Dunque l'illuminazione del quadrante superiore $=$ 0, 0013165, e del semicerchio $=$ 0, 0026330. Sottraendo quest'ultima da 0, 0028240 resta 0, 0001910 per l'illuminazione del segmento *inverso*, la quale in conseguenza è minore che non è quella del semidisco *diritto*. Ed ecco, che l'indicato paradosso anche in questo caso s'incontra.

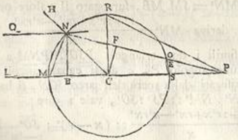
Chiuderò questo breve Scritto con un famoso Problema relativo alla misura della luce proposto da *Newton* nel suo Trattato delle *Flussioni e Serie Infinite* in questi termini: *To determine such a part of a Spherical Superficies, which can be illuminated, in its farther part, by light coming from a great distance, and which is refracted by the nearer Hemisphere.* Siccome nè egli, nè altri ch' io sappia ha data la soluzione d' un tal Problema, non eccettuando neppure il rinomato *Colson*, che illustrò con un ampio comento quell' operetta di *Newton*, ho creduto esser pregio dell'opera d' intraprenderne la disamina, e di metter qui sotto gli occhi del Pubblico il seguente scioglimento.

PROBLEMA.

Determinare quella tal parte posteriore d' una superficie sferica, che può essere illuminata dalla luce vegnente da gran lontananza e rotta nell' emisfero anteriore.

SOLUZIONE.

Sia QN uno de' raggi scagliati da lungi contro il globo MNS, i quali per l' immensa distanza, da cui partono, si considerano come tra sè paralleli. Tagliato il globo con un piano, che passa pel suo centro C e pel raggio QN, e nella sezione circolare MNS condotto il diametro SM parallelo ai raggi di luce, si supponga, che il raggio QN rompendosi in N pieghi nella direzione NP, ed incontri la circonferenza del cerchio in O, ed in P il diametro prolungato; sicchè guidato il semidiametro CN prodotto in H sia QNH, ovvero NCM l' angolo d' incidenza, e CNP l' angolo di rifrazione. Se ora si mena la perpendicolare NB sul diametro SM, e le sottese SO, MN; e si assume $= n$ il rapporto del seno dell' angolo d' incidenza al seno dell' angolo di refrazione; il semidiametro $= r$; la retta $CP = x$; è

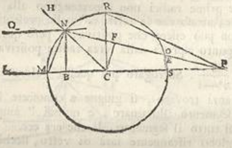


facile accorgersi, che SO è la corda della metà di quel segmento sferico, la di cui superficie curva viene illuminata da tutti que' raggi, che cadendo sull'emisfero anteriore occupano di qua e di là dal punto di mezzo M una larghezza doppia dell' arco MN. Siccome poi allorchè il raggio QN è estremamente vicino al diametro SM, la corda SO riesce piccolissima, e questa va poi crescendo quando il raggio QN si fa più lontano da MS, e ciò fino ad un certo limite, oltre il quale la detta corda decresce seguitando a crescere la distanza del raggio; quindi apparisce, che la questione si riduce a ritrovare il *massimo* segmento della superficie posteriore, il quale in tali circostanze possa ricevere la luce rotta nell' emisfero anteriore. Osservo pertanto, che nel triangolo CNP il lato NP sta a CP come il seno dell' angolo NCP, ovvero anche del suo supplemento NCM al seno dell' angolo CNP, cioè come $n:1$; e però $PN = nx$. Per la proprietà del triangolo si ha pure $CN^2 = CP^2 + PN^2 - 2PC.PB$, ovvero $r^2 = x^2 + n^2x^2 - 2x.PB$; e quindi $PB = \frac{x^2 + n^2x^2 - r^2}{2x}$, $MB = PM - PB = r + x + \frac{r^2 - n^2x^2 - x^2}{2x} = \frac{r^2 + 2rx + x^2 - n^2x^2}{2x}$. E poichè per la proprietà del cerchio $MN^2 = SM.MB$, surrogato il valore or ritrovato ne deriva $MN^2 = \frac{r^3 + 2r^2x + rx^2 - n^2rx^2}{x}$. Essendo inoltre simili i due triangoli PSO, PNM a motivo del comune angolo P, e degli eguali angoli POS, PMN misurati dalla metà dell' arco SON, si ha l' analogia $PN^2 : NM^2 :: PS^2 : SO^2$, vale a dire

$$n^2x^2 : \frac{r^3 + 2r^2x + rx^2 - n^2rx^2}{x} :: (x - r)^2 : SO^2.$$ Dunque

$SO^2 =$

$SO^2 = \frac{(x-r)^2}{n^2x^3}(r^3+2r^2x+rx^2-n^2rx^2)$. Ora dovendo eſſere maſſimo il ſegmento della ſuperficie illuminata, e conſeguentemente maſſima la corda SO del ſemiſegmento, come pure il quadrato di eſſa corda, ſi ugua-



glierà a zero il differenziale di queſto quadrato, e ſi otterrà $\left(\frac{2(x-r)x-3(x-r)^2}{n^2x^4}\right)(r^3+2r^2x+rx^2-n^2rx^2)\,dx + \frac{(x-r)^2}{n^2x^3}(2r^2+2rx-2n^2rx)\,dx = 0$, la qual eſpreſſione diviſa per $\frac{(x-r)r\,dx}{n^2x^3}$ ſi cangia in

$$\left(\frac{3r-x}{x}\right)(r^2+2rx+x^2-n^2x^2)+(x-r)(2r+2x-2n^2x)$$

$= 0$, e queſta ſi riduce all' equazione cubica $x^3+rx^2 - \frac{3r^2}{n^2-1}x - \frac{3r^3}{n^2-1} = 0$. Baſtano pochi momenti di rifleſſione per accorgerſi, che tal equazione ſi riſolve nelle due $x+r=0$

$$x^2 - \frac{3r^2}{n^2-1} = 0;$$

dalle quali si ricavano le tre seguenti radici

$$1^{\circ}.\ x = -r$$

$$2^{\circ}.\ x = -r\sqrt{\frac{3}{n^2-1}}$$

$$3^{\circ}.\ x = \ \ r\sqrt{\frac{3}{n^2-1}}$$

Le due prime radici non appartengono alla questione attuale, atteso che la retta CP nelle presenti circostanze non può essere che positiva: e però questa retta viene appunto espressa dalla terza radice positiva $x = r\sqrt{\frac{3}{n^2-1}}$. Surrogato poi questo valore in quello di SO dianzi trovato, si giugne a conoscere la corda del semisegmento illuminato, e quindi l' ampiezza o l' arco di tutto il segmento. Il che era ecc.

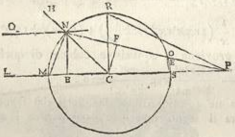
Se il globo rifrangente sarà di vetro, sicchè il *rapporto della refrazione*, ovvero n sia presso a poco $= \frac{3}{2}$, nascerà $x = r\sqrt{\frac{12}{5}} = 1,5492r$; $x^2 = 2,4r^2$; $n^2x^2 = 5,4r^2$; $(x-r)^2 = 0,30162064r^2$; $x^3 = 3,7181$; $n^2x^3 = 8,3657$. Laonde sostituendo questi valori nell' espressione di $SO^2 = \frac{(x-r)^2}{n^2x^3}(r^3 + 2r^2x + rx^2 - n^2rx^2)$ si ritrae $SO^2 = 0,039602185ir^2$, ed estraendo la radice quadrata nasce finalmente $SO = 0,199r$. Dunque l' arco $SEO = 11^{\circ}.\ 26'$, e conseguentemente l' ampiezza della cupola sferica illuminata dalla luce refratta nell' emisfero anteriore ha per misura un arco di $22^{\circ}.\ 52'$.

Non voglio qui tacere una singolarità, che nella soluzione di questo Problema può facilmente incontrarsi, e che può essere cagione d' inciampo, come lo fu per me in sulle prime. Tirisi il perpendicolo CF sopra il raggio refratto NP; ed essendo $CN^2 = CP^2 + PN^2 -$

$2NP.PF$, cioè $r^2 = x^2 + n^2x^2 - 2nx.PF$, se ne deduce $PF = \frac{x^2+n^2x^2-r^2}{2nx}$; e perciò $CF^2 = CP^2 - PF^2 = x^2$

$$- \left(\frac{x^2+n^2x^2-r^2}{2nx}\right)^2$$

$$= \frac{2r^2x^2+2n^2r^2x^2+2n^2x^4-x^4-n^4x^4-r^4}{4n^2x^2}.$$ E poichè NB, e CF sono i seni degli angoli d' incidenza e di refrazio-



ne riferiti al seno tutto CN, nasce quindi $NB^2 = n^2.CF^2$

$$= \frac{2r^2x^2+2n^2r^2x^2+2n^2x^4-x^4-n^4x^4-r^4}{4x^2};$$ e però CB^2

$$= r^2 - NB^2 = \frac{x^4+n^4x^4+r^4+2r^2x^2-2n^2r^2x^2-2n^2x^4}{4x^2}.$$

Prendo la radice quadrata di questa quantità, e ritrovo $CB = \frac{\pm n^2x^2 \mp x^2 \mp r^2}{2x}$, nella qual espressione si dee far uso o dei soli segni superiori in tutti i termini, o dei soli inferiori. Essendo poi $BM = r - CB$

$$= \frac{2rx \mp n^2x^2 \pm x^2 \pm r^2}{2x},$$ ed $MN^2 = SM.MB$, fatte le sostituzioni de' valori di SM, ed MB, si otterrà MN^2

$= \frac{2r^2x \mp n^2rx^2 \pm rx^2 \pm r^3}{x}$. Ma i triangoli ſimili PSO, PMN ſomminiſtrano l' analogia $PN : NM :: PS : SO$, cioè $nx : \surd\left(\frac{2r^2x \mp n^2rx^2 \pm rx^2 \pm r^3}{x}\right) :: x - r : SO$; e conſeguentemente $SO^2 = \left(\frac{x-r}{nx}\right)^2 \left(\frac{2r^2x \mp n^2rx^2 \pm rx^2 \pm r^3}{x}\right)$: dunque differenziando queſta eſpreſſione, annullando il differenziale, e poſcia dividendo per $\frac{(x-r)rdx}{n^2x^2}$ naſcerà il riſultato $\frac{2}{x}\left(2r \mp n^2rx \pm rx \pm \frac{r^3}{x}\right) + (x-r)\left(\pm 1 \mp n^2 \mp \frac{r^2}{x^2}\right) = 0$, da cui proviene l' equazione cubica di queſta forma $x^3 + rx^2 - \frac{(4 \mp 1)r^2}{\pm n^2 \mp 1} x \mp \frac{3r^3}{\pm n^2 \mp 1} = 0$.

Se ora ne' termini di queſta affetti dal ſegno doppio ſi adopera il ſegno ſuperiore, compariſce l' equazione precedentemente ritrovata $x^3 + rx^2 - \frac{3r^2x}{n^2-1} - \frac{3r^3}{n^2-1} = 0$; ma ſe all' oppoſto ſi vuole aver riguardo al ſegno inferiore l' equazione ſi cangia in queſt' altra $x^3 + rx^2 + \frac{5r^2x}{n^2-1} - \frac{3r^3}{n^2-1} = 0$, la quale riſoluta dà tutt' altre radici che la precedente.

Queſta ſingolarità imbarazzante parmi che ammetta la ſeguente interpretazione. Si meni al diametro MS il ſemidiametro CR perpendicolare, e ſi congiunga RP; ſicchè $RP^2 = r^2 + x^2$. Se pertanto nel valore biforme di $CB = \frac{\pm n^2x^2 \mp x^2 \mp r^2}{2x}$ ſi fa uſo del ſegno inferiore, riſulta CB di valor negativo, poichè NP^2 oſſia n^2x^2 è manifeſtamente maggiore di PR^2, ovvero di $r^2 + x^2$.

Siccome poi per conseguire il valore di *BM* si è sottratto dal semidiametro *CM* il valore di *CB*; dovrà *BM* risultar maggiore del semidiametro qualora *CB* sia negativo. Ma nelle circostanze del presente Problema è visibilmente assurdo, che *MB* superi il semidiametro della sfera rifrangente. Dunque non dee recar maraviglia, che da un tal assurdo sia derivata un' equazione, le di cui radici non possono somministrare che un' erronea soluzione del Problema.