Rendiconti
Accademia Nazionale delle Scienze detta dei XL
Memorie e Rendiconti di Chimica, Fisica, Matematica e Scienze Naturali
140° (2022), Vol. III, fasc. 2, pp. 181-183
ISSN 0392-4130 • ISBN 978-88-98075-53-9

Trasporto ottimale, matematica e non solo*

ALESSIO FIGALLI

Socio dei XL. Dipartimento di matematica, ETH Zurigo, Ramistrasse 101, 8092 Zurigo, Svizzera
E.mail: alessio.figalli@math.ethz.ch

Origine del trasporto ottimale

Nel 1781, il matematico francese Gaspard Monge si interessò al seguente problema:

Supponiamo di dover trasportare alcuni detriti da un luogo ad un altro per costruire delle fortificazioni. Come dovrebbe avvenire il trasporto per minimizzare la distanza media?

Nel suo lavoro, Monge discusse il caso bidimensionale e quello tridimensionale, dimostrando una profonda comprensione del problema.

In particolare, Monge ebbe l'intuizione che, in 3 dimensioni, i percorsi di trasporto ottimali dovrebbero essere ortogonali a una certa famiglia di superfici a 1 parametro. Questa intuizione geometrica giocò un ruolo fondamentale nello studio moderno del trasporto ottimale, che avvenne circa 200 anni più tardi.

Più di 150 anni dopo i lavori di Monge, nel 1938, il matematico sovietico Leonid Kantorovich gettò le basi della programmazione lineare. Poi, nel 1942, elaborò una nuova formulazione del problema del trasporto ottimale che gli permise di considerare problemi di trasporto ben più generali.

La teoria di Kantorovich pose le basi teoriche per calcolare il trasporto ottimale in maniera efficiente e questi contributi valsero a Kantorovich il premio Nobel per l'economia nel 1975.

Il trasporto ottimale nella matematica moderna

A partire dagli anni 80, il trasporto ottimale è entrato a far parte della matematica moderna, non solo per l'importanza del problema in sè, ma anche per una serie di profonde connessioni con altre aree della matematica. Più precisamente, il trasporto ottimale si è rivelato essere uno strumento molto versatile in un vari settori matematici, quali la geometria, la probabilità, le equazioni alle derivate parziali, ecc.

* Prolusione tenuta in occasione della seconda Assemblea annuale dei Soci tenutasi il 9 novembre 2022 presso la biblioteca dell'Accademia dei XL.

Per una introduzione matematica alla teoria moderna del transporto ottimale e le sue applicazioni, si veda [1].

Per illustrare la versatilità del trasporto ottimale, presenterò ora due applicazione della teoria a delle aree della matematica a priori totalmente sconnesse: le disuguaglianze isoperimetriche e le equazioni semigeostrofiche.

Trasporto ottimale e disuguaglianze isoperimetriche

Il problema isoperimetrico trova le sue origini in una famosa leggenda.

Intorno all'ottavo secolo AC, dopo aver scoperto che suo fratello le aveva ucciso il marito rubandole il regno, Didone fu costretta a scappare dalla sua città. Dopo aver navigato per il Mediterraneo, arrivò nel regno del re Iarba, al quale chiese di comprare un appezzamento di terra sul quale lei ed i suoi sudditi avrebbero potuto fondare una nuova città.

Re Iarba le offrì tanta terra quanta ne potesse contenere una pelle di bue. Didone accettò l'offerta e fece tagliare la pelle in tante strisce sottili che poi fece cucire insieme per ottenere una lunga corda. A quel punto, per racchiudere quanta più area possibile, formò un semicerchio lungo la costa per delimitare i confini della sua nuova città: Cartagine.

Didone, nella storia appena descritta, si trovò a dover risolvere il problema seguente, che nella matematica prende il nome di "problema isoperimetrico":

Data una curva di lunghezza fissata, scegliere la forma che massimizza l'area racchiusa.

Questo problema si può formulare, in maniera equivalente, come:

Fissata l'area che si vuole racchiudere con una curva, scegliere la forma che minimizza la lunghezza.

In matematica, questo è chiamato problema isoperimetrico nel piano.

Esistono versioni di questo problema anche in dimensione maggiore.

Per esempio, il problema isoperimetrico nello spazio si formula come segue:

Fissato il volume che si vuole racchiudere con una superficie, scegliere la forma che minimizza l'area.

La risposta su quale sia la scelta ottimale ce la danno le bolle di sapone: una sfera! Infatti, fissata la quantità d'aria racchiusa nella bolla, le bolle di sapone aggiustano la loro forma per minimizzare l'energia di tensione, la quale è proporzionale all'area della superficie.

Questa risposta non è ovviamente una dimostrazione matematica: dimostrare rigorosamente che la sfera sia la soluzione del problema isoperimetrico nello spazio richiede strumenti molto avanzati di matematica.

Una domanda naturale che ci si può porre, una volta dimostrato che la sfera è la forma ottimale, riguarda la "stabilità" di tale configurazione.

Notiamo infatti che le forme esatte sono idealizzate ed in natura ci sono forze e fattori esterni che agiscono sul sistema: gravità, vento, temperatura, ecc.

Sia dunque ε l'energia delle forze che agiscono sul sistema. Possiamo stimare, in termini di ε, quanto una bolla di sapone possa cambiare di forma?

Questo problema, che si può formulare matematicamente usando la cosiddetta "disuguaguanza isoperimetrica", è stato studiato a partire dagli inizi del 1900.

Circa 100 anni dopo, abbiamo capito che si può usare il trasporto ottimale come strumento per capire come le particelle si muovono durante il processo di deformazione e dimostrare il seguente teorema [2]:

La forma della bolla di sapone può cambiare al più di $\sqrt{\varepsilon}$.

Trasporto ottimale ed equazioni semigeostrofiche

Le equazioni semigeostrofiche sono un sistema di equazioni alle derivate parziali usate in meteorologia per studiare il movimento di grandi fronti atmosferici.

Mike Cullen, un meteorologo inglese, intorno al 1990 si accorse che le particelle di vapore acqueo seguono un trasporto ottimale. Questo legame tra trasporto ottimale e nuvole fu subito oggetto di grande interesse scientifico. Purtroppo però, nonostante questa connessione, per oltre venti anni nessuno fu in grado di sfruttarla, a causa della mancanza di alcuni risultati nella teoria matematica del trasporto ottimale. Sviluppando tale teoria [3] siamo riusciti a risolvere le equazioni semigeostrofiche [4-5].

Il trasporto ottimale al di fuori della matematica

Come menzionato precedentemente, negli ultimi 40 anni il transporto ottimale ha avuto tante applicazioni e connessioni con altre aree della matematica. Il trasporto ottimale va però ben oltre la matematica. Per esempio, si usa in: urbanistica, progettazione ingegneristica, statistica, idrodinamica, biologia, riconoscimento d'immagini, intelligenza artificiale, finanza, ecc.

Per fare alcuni esempi concreti:

- Trasferimento di colori: il trasporto ottimale si può usare per 'trasportare' in maniera efficiente i colori da un'immagine all'altra.
- Reti Generative Avversarie (GANs): si può usare il trasporto ottimale per discriminare tra immagini reali ed immagini "finte" che sono state create da una rete neurale.

È importante menzionare che, per le applicazioni, occorre avere algoritmi efficienti per calcolare il trasporto ottimale. Il libro di Cuturi e Peyre [6] discute molto bene questo argomento.

Conclusioni

Il trasporto ottimale, nato come un problema concreto con applicazioni militari ed economiche, ha poi avuto importanti applicazioni nella matematica, ed ora è diventato uno strumento che va anche al di fuori della matematica e dell'economia. Considerato quante applicazioni inaspettate abbiamo avuto in questi anni, è probabile che in futuro il trasporto ottimale ci riserverà ancora tante sorprese.

BIBLIOGRAFIA

[1] A. Figalli, F. Glaudo. An Invitation to Optimal Transport, Wasserstein Distances, and Gradient Flows, EMS Textbooks in Mathematics. European Mathematical Society (EMS), Zürich, 2021. 144 pp.

[2] A. Figalli, F. Maggi, A. Pratello. A mass transportation approach to quantitative isoperimetric inequalities, Invent. Math. 182 (2010), no. 1, 167-211.

[3] G. De Philippis, A. Figalli. $W^{2,1}$ regularity for solutions of the Monge-Ampère equation, Invent. Math. 192 (2013), no. 1, 55-69.

[4] L. Ambrosio, M. Colombo, G. De Philippis, A. Figalli. Existence of Eulerian solutions to the semigeostrophic equations in physical space: the 2-dimensional periodic case, Comm. Partial Differential Equations 37 (2012), no. 12, 2209-2227.

[5] L. Ambrosio, M. Colombo, G. De Philippis, A. Figalli. A global existence result for the semigeostrophic equations in three dimensional convex domains, Discrete Contin. Dyn. Syst. 34 (2014), no. 4, 1251-1268.

[6] G. Peyré, M. Cuturi. Computational Optimal Transport. https://arxiv.org/abs/1803.00567