Rendiconti
Accademia Nazionale delle Scienze detta dei XL
Memorie di Scienze Fisiche e Naturali
122° (2004), Vol. XXVIII, pp. 355-367

ORESTE NICROSINI *

Aspetti teorici generali: la complessità

La nuova scienza della complessità

Da alcuni anni a questa parte si sente sempre più spesso parlare di «scienza della complessità». A parere di molti si sta addirittura assistendo alla nascita di una vera e propria rivoluzione, in grado di influenzare moltissime discipline, sia delle scienze naturali e sociali che della tecnologia.

Come scrive M. Gell-Mann, premio Nobel per la fisica e fra i fondatori del centro di studi interdisciplinari sulla complessità di Santa Fe, «*una delle grandi sfide della scienza contemporanea è individuare la combinazione di semplicità e complessità, regolarità e casualità, ordine e disordine a partire dalla fisica delle particelle elementari e dalla cosmologia per arrivare al mondo dei sistemi complessi adattivi*». Questa tendenza verso un approccio unificato allo studio dei sistemi complessi è stata di recente resa possibile da un lato dalla disponibilità di calcolatori sempre più potenti e a basso costo, dall'altro dallo sviluppo di metodi teorici e computazionali innovativi nei campi della matematica, della fisica, dell'informatica e altri ancora. L'importanza di tale sviluppo risiede nel fatto che gli scienziati risultano avere a disposizione un paradigma per affrontare problemi tratti dai campi più disparati. I temi studiati coprono infatti uno spettro amplissimo che va dallo studio delle proprietà del genoma umano all'andamento dei mercati finanziari e delle organizzazioni aziendali, dal comportamento delle particelle elementari alla struttura a grande scala dell'Universo, dalla caratterizzazione delle leggi riguardanti eventi catastrofici quali i terremoti fino alla topologia del World Wide Web e di Internet.

Cos'è un sistema complesso

Ma cos'è un sistema complesso? E inoltre, lo studio della complessità è destinato a rimanere nel chiuso dell'accademia oppure può avere risvolti applicativi di interesse per la società e, in particolare, per il mondo delle imprese?

* Istituto Nazionale di Fisica Nucleare, Sezione di Pavia - Dipartimento di Fisica Nucleare e Teorica, Università di Pavia. Via A. Bassi, 6 - 27100 Pavia. E-mail: oreste.nicrosini@pv.infn.it

Definire un sistema complesso è esso stesso un problema complesso, al punto che oggi non esiste una definizione universalmente accettata, né tanto meno una *teoria della complessità.* Il modo più semplice per capire cosa sia la complessità è quindi quello di passare in rassegna un certo numero di esempi di sistemi da molti considerati come *sistemi complessi*.

Nello studio di vari fenomeni, sia naturali che sociali, si possono evidenziare due situazioni dinamiche estreme. Nella prima di queste il sistema sotto osservazione, che può essere semplice come il pendolo mostrato in Fig. 1 oppure estremamente complicato come un cronometro meccanico ad alta precisione, evolve in modo completamente prevedibile.

All'estremo opposto si collocano quei sistemi, siano essi complicatissimi oppure semplici come il pendolo doppio di Fig. 2, i quali, pur governati da una dinamica deterministica, si comportano in modo di fatto imprevedibile: sono i

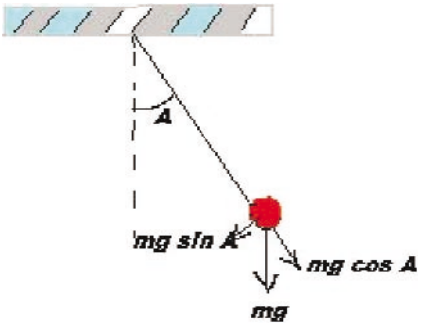

Fig. 1 - Il pendolo semplice.

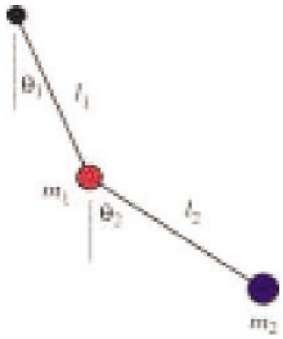

Fig. 2 - Il pendolo doppio.

cosiddetti *sistemi caotici*, il cui comportamento sembra estraneo a qualunque legge deterministica di fondo. In questi sistemi le equazioni della dinamica sono *non lineari,* gli effetti non lineari sono importanti e fanno sì che in certe situazioni essi manifestino un comportamento caotico, cioè criticamente dipendente dalle condizioni iniziali e tale da rendere di fatto imprevedibile l'evoluzione nel tempo del sistema. Cosa c'entra la complessità con tutto questo? Ebbene, esistono sistemi che possono venire a trovarsi, al variare delle condizioni cui sono sottoposti, in una situazione intermedia tra quella completamente prevedibile e quella caotica e imprevedibile. In tale situazione il sistema manifesta proprietà «emergenti»: al confine tra ordine e caos si assiste all'apparizione improvvisa (*emergence*) di regolarità inattese, come l'auto-organizzazione, ovvero la nascita spontanea di ordine dal caos. Questo comportamento, molto particolare, rappresenta una possibile definizione di complessità. Sulla base delle caratteristiche appena descritte, un sistema complesso si presenta in genere composto da molti elementi in interazione non lineare fra

loro, il cui comportamento *individuale* può essere ricondotto a semplici leggi, ma il cui comportamento *collettivo* non è direttamente deducibile dalle leggi valide per i singoli elementi. L'idealizzazione più semplice di sistema complesso è probabilmente fornita dalla *Mappa logistica*, un modello matematico discreto nel tempo sviluppato nell'ambito degli studi sulla dinamica delle popolazioni [1, 2, 3]. Essa è definita dall'equazione

$$x_{n+1} = \lambda\, x_n\, (1 - x_n),$$

che determina in modo univoco (seppure non lineare) il valore della variabile x ($0 \leq x \leq 1$) al «tempo» $n+1$ in funzione di quello al «tempo» n. Il comportamento del modello dipende in modo critico dal valore del parametro 8. Infatti, per valori di 8 (in ascissa in Fig. 3) fino a circa 3, la mappa converge ad un unico valore asin-

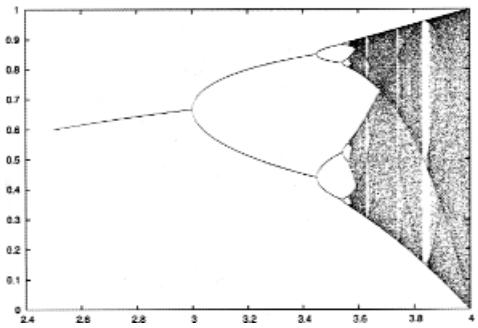

Fig. 3 - L'albero delle biforcazoni.

totico, indipendentemente dal valore di x utilizzato per generare la successione. Per valori di 8 compresi all'incirca tra 3 e 3.4 si realizza un prima biforcazione: il valore asintotico della successione oscilla (si auto-organizza) tra i due mostrati in figura. Al crescere di 8 la struttura si arricchisce sempre più di biforcazioni successive, finché il comportamento non diventa completamente caotico. In realtà, regioni caotiche sono continuamente alternate a regioni «auto organizzate», tanto che Fig. 3 è in realtà un frattale.

L'architettura dei sistemi complessi: i frattali

Nonostante le diversità esistenti fra i vari sistemi complessi, sembra comunque esserci una caratteristica comune da essi condivisa, e cioè di essere caratterizzati da un'architettura descrivibile mediante la cosidetta geometria dei frattali.

Secondo B. Mandelbrot, il matematico francese inventore della geometria frattale, «*un frattale è un oggetto geometrico fatto di parti in un certo senso simili al*

tutto». Questa può essere considerata la più semplice definizione di frattale. Ma cosa significa tale definizione? Significa che, se un oggetto è frattale, esso ci appare sempre con le stesse caratteristiche, a prescindere dalla risoluzione con la quale lo osserviamo, proprietà nota come *invarianza di scala*.

Si prenda, ad esempio, un'immagine di nuvole: esse sono fatte di grandi cumuli costituiti di molte protuberanze, a loro volta contenenti rigonfiamenti più piccoli, fatti di altri rigonfiamenti, e così via, fino alle dimensioni più piccole che si è in grado di vedere. La caratteristica più appariscente della forma delle nuvole è la struttura fortemente irregolare, «interrotta». Le nuvole sono esempi di oggetti geometrici non convenzionali, per lo studio dei quali è stata sviluppata la geometria frattale. Oltre alle nuvole, esistono moltissimi altri esempi di geometrie frattali, sia naturali che artificiali, quali le coste della Norvegia (Fig. 4), il profilo delle montagne e l'insieme di Mandelbrot (Fig. 5), per citarne alcuni.

Fig. 4 - Le coste frastagliate della Norvegia.

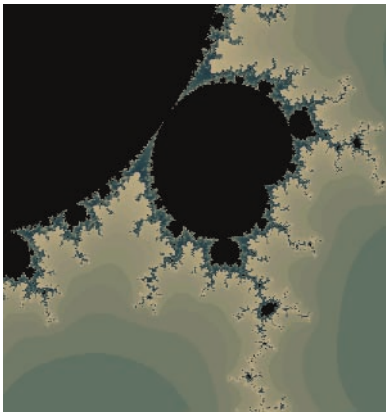

Fig. 5 - L'insieme di Mandelbrot.

Aspetti di complessità e strutture frattali si ritrovano sia nell'infinitamente grande che nell'infinitamente piccolo: nello studio dell'universo e in quello delle particelle elementari. Ad esempio, da studi molto recenti risulta che la struttura a grande scala dell'Universo è frattale, e su questi temi si è sviluppato un dibattito scientifico molto interessante (Fig. 6) [4]. Recentemente l'acceleratore LEP presso il CERN di Ginevra è stato utilizzato come «fabbrica» di bosoni Z^0 prodotti mediante annichilazione di elettroni e positroni ad energia sufficientemente elevata. I bosoni Z^0, decadendo a loro volta, producono coppie primarie quark-antiquark, alle quali segue lo sviluppo del «jet adronico» (quark, antiquark e gluoni) e il processo di «adronizzazione» a formare le particelle effettivamente rivelate negli apparati sperimentali. Il modello teorico che sta alla base della nostra descrizione del fenomeno, basato sulla cromodinamica quantistica, prevede che la struttura dei jet

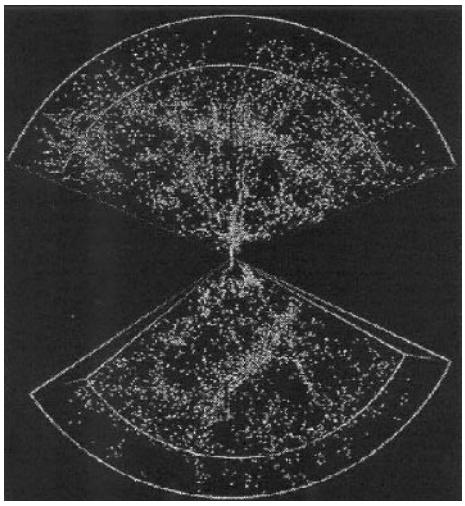

Fig. 6 - La distribuzione delle galassie.

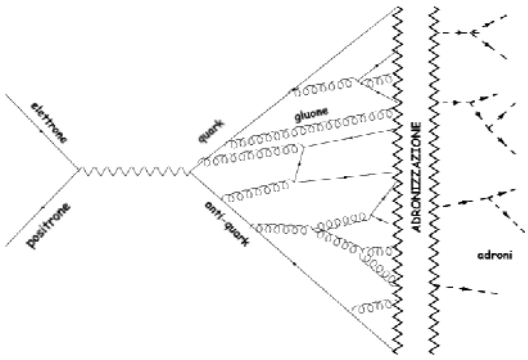

Fig. 7 - Produzione di partoni e adronizzazione.

adronici sia frattale (Fig. 7). E in effetti alcuni ricercatori hanno recentemente mostrato che i dati sperimentali esibiscono precisamente le caratteristiche geometriche previste dalla teoria (Fig. 8) [5, 6].

Anche nel campo dell'arte esistono esempi di frattali: alcuni ricercatori hanno recentemente dimostrato che le opere di J. Pollock lo sono (Fig. 9) [7]. Infatti, a differenza che nelle usuali tecniche pittoriche, Pollock usava un flusso continuo di colore tale da produrre sulla tela traiettorie continue irregolari. In questo modo le opere di Pollock appaiono come costituite da una densa rete di traiettorie di

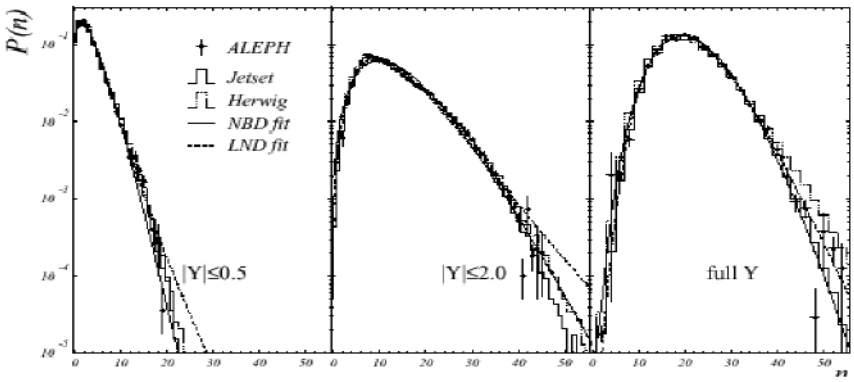

Fig. 8 - Distribuzione di molteplicità nei decadimenti adronici del bosone $Z°$ ALEPH Collaboration, Z. Phys. C69 (1995) 15.

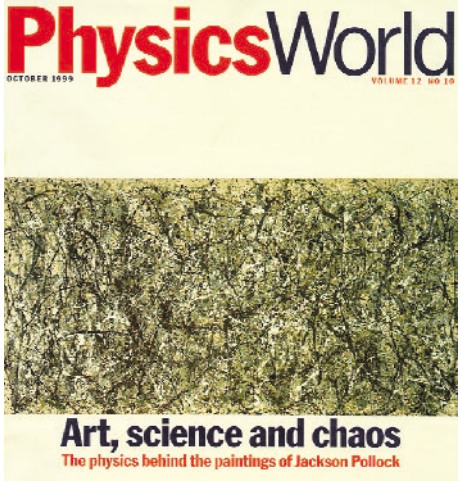

Fig. 9 - Arte e frattali.

colore. Questo processo ripetitivo e cumulativo, anche noto come pittura dinamica, è sorprendentemente simile al modo in cui le forme evolvono in natura.

Le reti complesse

In alcuni sistemi complessi, le caratteristiche fondamentali sono descritte non tanto dagli elementi costituenti quanto piuttosto dalle relazioni tra essi. Un esempio in questo senso è il Web. In questo caso gli elementi costituenti, detti nodi, sono le pagine Web ed i collegamenti sono i link fra le varie pagine. Per comprendere sistemi come il Web, ed in particolare sviluppare modelli capaci di fornire una spiegazione della loro complessa struttura, è nata la teoria delle reti.

La teoria delle reti ha una tradizione che risale al 1700 con i primi studi di Eulero, il quale pose i fondamenti della descrizione matematica delle reti: la teoria dei grafi. Uno dei primi modelli moderni di reti risale agli anni attorno al 1960 ed è la rete aleatoria o «democratica» descritta dai matematici ungheresi Erdös e Rényi. Questo tipo di rete descrive una sistema costituito da un numero fissato di nodi che hanno un valore medio di collegamenti, o grado, ben preciso. In queste reti i vari nodi sono indistinguibili gli uni dagli altri, in quanto tutti hanno in media lo stesso grado, da cui il termine reti «democratiche». Le reti democratiche hanno il pregio di essere semplici nella costruzione, ma non sono adatte a descrivere reti reali quali si osservano nella natura e nella società.

Per descrivere le reti reali e i loro principi organizzativi comuni (Fig. 10), in anni molto recenti è stato proposto un modello estremamente semplice, ma efficace, che permette di descrivere alcune delle caratteristiche principali delle reti che

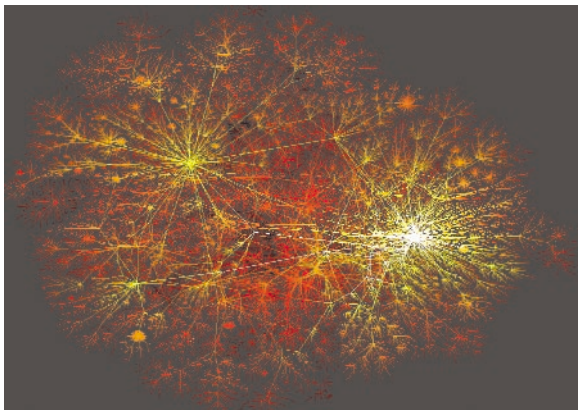

Fig. 10 - Una mappa della rete Internet, con i principali hub evidenziati.

ritroviamo in natura, nelle scienze sociali e in biologia [8]. Questo modello si basa su due assunti principali: la rete è in continua crescita ed inoltre la nascita di un nuovo nodo comporta che esso preferisca collegarsi a nodi che hanno già un numero elevato di connessioni. Grazie a questi due semplici assunti è possibile costruire una rete dove esistono, al contrario dei primi modelli di reti democratiche, pochi nodi, chiamati hub, che hanno un numero altissimo di connessioni e costituiscono il cuore della rete. Reti con questa struttura si dicono *scale-free*. Infatti, contando il numero di nodi che nella rete hanno lo stesso numero di connessioni si ottiene una legge di potenza, in base alla quale esistono moltissimi nodi che hanno poche connessioni, e pochi nodi che hanno molte connessioni, in accordo con una legge di potenza del tipo

$$\text{n° nodi con } K \text{ connessioni} \quad \propto \quad \frac{1}{K^{\gamma}}$$

Questa particolare legge rimane inalterata aumentando il numero di nodi della rete, cioè risulta indipendente dalla grandezza o scala della rete: da qui il nome *scale-free*.

Accanto al grado di connettività delle reti, un'altra caratteristica fondamentale è il diametro della rete, il quale misura il numero di collegamenti necessario per connettere due nodi qualsiasi. I primi studi quantitativi sulle reti sociali che misurano questa proprietà risalgono agli anni 1960. In questo contesto i nodi rappresentano le persone ed il collegamento la conoscenza dei due individui. Nel 1967, il sociologo statunitense S. Milgram escogitò un esperimento che permettesse di rivelare la rete di conoscenze «navigando» tra i vari nodi: inviò ad un certo numero di persone che vivevano sulla costa orientale degli USA delle lettere chiedendo di spe-

Tab. 1 – *Universalità del paradigma reti.*

RETE	NODI	COLLEGAMENTI
Metabolismo cellulare	Molecole coinvolte nella trasformazione di cibo in energia	Partecipare alla stessa reazione biochimica
Hollywood	Attori	Partecipare allo stesso film
Internet	Router	Le connessioni fisiche
Collaborazioni scientifiche	Scienziati	Aver scritto articoli in collaborazione
Relazioni sociali	Esseri umani	amicizia
Distribuzione en. elettrica	Impianti di produzione & consumo	Linee di trasmissione
Traffico aereo	Aeroporti	Voli di linea & commerciali
Relazioni economiche	Consiglio di Amministrazione (CDA) aziende	Avere un membro del CDA in comune
World Wide Web	Pagine web	Link tra le pagine

dirle a loro volta a dei conoscenti in modo che queste lettere arrivassero a un ben preciso destinatario di Chicago attraverso una catena di amici di amici. Il risultato fu sorprendente, in quanto Milgram notò che la maggior parte delle lettere passava attraverso sei persone prima di arrivare a destinazione. È quello che si chiama effetto *small world*. Pur essendo costituita da milioni di nodi, la distanza tra due nodi qualsiasi è molto piccola e praticamente indipendente dalla grandezza della rete. Volendo fare un esempio, la «distanza» tra un cittadino italiano qualsiasi e il presidente degli USA è mediamente di sei strette di mano.

I modelli descritti, oltre a riprodurre gli effetti di *scale-free* e *small world*, hanno permesso di evidenziare una proprietà che non era stata precedentemente osservata, ovvero la solidità delle reti. In una rete di tipo scale-free possono avvenire dei guasti che disattivano un nodo e di conseguenza i suoi collegamenti. Scegliendo in modo casuale il nodo da disattivare, vi è una buona probabilità che tale nodo non sia rilevante, poiché sono pochissimi i nodi con un grado di connettività talmente alto da garantire la solidità della rete. Viceversa, ad un attacco mirato la rete porge il suo tallone d'Achille: conoscendo i suoi nodi più importanti, un pirata informatico riesce ad oscurare l'intera rete attaccando pochi punti ben collegati.

Studi molto recenti hanno mostrato che le caratteristiche descritte si ritrovano con sorprendente regolarità in reti presenti in vari contesti, che spaziano dalle scienze sociali al metabolismo cellulare, toccando anche il mondo degli affari e delle collaborazioni scientifiche (Tabella 1). Data la diffusione delle reti, le possibili

implicazioni di un'approfondita comprensione della loro struttura e delle loro proprietà sono numerose. Ad esempio, in medicina, la conoscenza precisa delle reti interne alla cellula umana potrebbe aiutare a prevedere e controllare gli effetti collaterali dei farmaci e consentire lo sviluppo di nuovi farmaci mirati. In economia, capire come sono interconnesse società ed economie potrebbe permettere di evitare fallimenti finanziari a catena, così come la comprensione dei meccanismi di diffusione di un contagio attraverso una rete potrebbe fornire agli esperti di marketing metodi efficaci per indirizzare l'interesse dei consumatori verso nuovi prodotti.

I mercati finanziari e l'econofisica

Un ulteriore, importante esempio di sistema complesso è costituito dal mercato finanziario. La complessità di questo sistema risiede nel fatto che dall'interazione fra i vari soggetti operanti nel mercato finanziario emergono effetti collettivi (l'andamento dei prezzi delle azioni, per esempio) che non sono immediatamente riconducibili alle scelte operate dai singoli. Trovare una dinamica deterministica (ammesso che essa esista) che descriva le scelte dei singoli operatori non assicura quindi la prevedibilità a priori delle grandezze che sono significative per il sistema «mercato» considerato come un tutto. Per questa ragione le grandezze di mercato interessanti, come ad esempio l'andamento di un indice azionario o il prezzo di un particolare strumento finanziario, vengono generalmente descritte da variabili *stocastiche*, ovvero che assumono valori casuali (Fig. 11).

La modellizzazione del mercato finanziario mediante i processi stocastici ha una lunga e prestigiosa tradizione, che trae origine dagli studi dei primi del 1900 del matematico francese L. Bachelier per arrivare al modello formulato nel 1973 da F. Black, M. Scholes e R.C. Merton, che ha meritato il premio Nobel per l'economia nel 1997. Questo modello consente di determinare il valore di strumenti finanziari attivamente scambiati nei mercati finanziari e noti sotto il nome di derivati, in

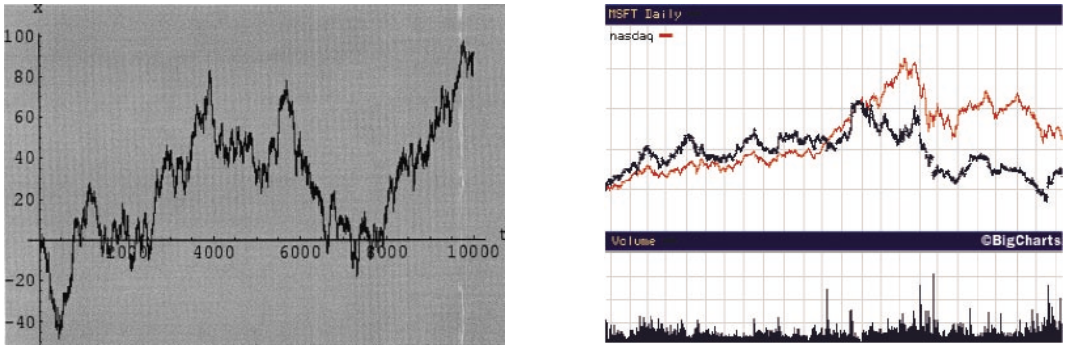

Fig. 11 - L'andamento degli indici azionari è ben descritto da variabili stocastiche. Il moto di una particella Browniana (sinistra) e l'indice NASDAQ (destra).

quanto il loro valore deriva dall'andamento di altri strumenti finanziari, detti sottostanti. L'idea chiave del modello e la sua natura stocastica consistono nel descrivere l'evoluzione nel tempo dei titoli sottostanti mediante variabili casuali estratte da una distribuzione di probabilità nota come curva di Gauss o gaussiana. Nonostante questa ipotesi risulti oggi piuttosto restrittiva, il modello è quotidianamente utilizzato nella pratica dagli operatori finanziari, ai fini della determinazione del prezzo delle opzioni (tipi molto importanti di derivati) e della gestione del rischio finanziario. Tuttavia è oggi noto, grazie ad accurate analisi empiriche dei dati finanziari, che deviazioni dal comportamento gaussiano sono presenti quando la dinamica dei rendimenti di un bene finanziario viene studiata su dati di alta frequenza, cioè su orizzonti temporali inferiori a un giorno borsistico o addirittura di pochi minuti. Importanti risultati in questo ambito sono stati, in particolare, ottenuti da gruppi di fisici che, applicando metodi propri della fisica statistica e teorica all'analisi dei mercati finanziari, hanno mostrato che la distribuzione dei rendimenti ad alta fequenza è «leptokurtica», presenta cioè un picco significativo e assottigliato per rendimenti prossimi a zero e probabilità di elevati rendimenti molto maggiori che nel caso gaussiano. In gergo, si usa dire che la distribuzione ha code grasse, ovvero un andamento corrispondente agli eventi rari descritto da una legge di potenza, che risulta caratteristica di distribuzioni di probabilità note come distribuzioni stabili di Lévy (Fig. 12) [9]. Questi risultati, che indicano che l'andamento di un bene finanziario segue un cammino a caso (random walk) di tipo non-gaussiano, possono avere impatto su una gestione più efficiente del rischio associato ai portafogli finanziari e rappresentano solo un esempio degli studi condotti da fisici che da un decennio a questa parte hanno cominciato ad interessarsi all'analisi e modellizzazione dei mercati finanziari. Questo filone di ricerche ha portato alla nascita di una nuova disciplina, l'*econofisica*, il cui obiettivo è contribuire, assieme alle ricerche di economisti e matematici, alla comprensione del mercato finanziario come sistema

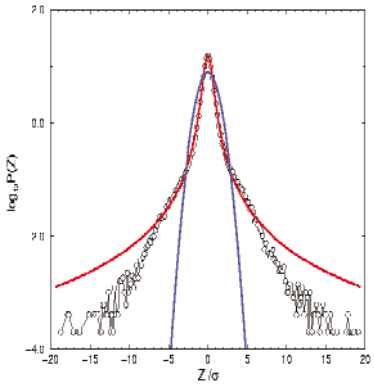

Fig. 12 - La distribuzione dei rendimenti ad alta frequenza è leptokurtica.

complesso. Val la pena sottolineare come, in questo ambito di ricerche, spesso vengano utilizzati gli strumenti più raffinati della fisica teorica (si veda ad esempio [10]).

Valenze applicative e formazione

Gli argomenti trattati finora hanno un potenziale applicativo molto consistente. Sulla base di questo fatto, nell'ambito dell'Istituto Universitario di Studi Superiori (IUSS) dell'Università di Pavia è stata recentemente fondata la Scuola Europea di Studi Avanzati (ESAS) in «Metodi per la Gestione di Sistemi Complessi», che si esprime principalmente attraverso il Master Internazionale di secondo livello in «Complessità e sue applicazioni Interdisciplinari». Il Master, al quale si accede dopo una laurea specialistica (o titolo equipollente), si rivolge a laureati in discipline scientifiche ed economiche provenienti da Università italiane e straniere. Esso è di natura fortemente interdisciplinare, ed è organizzato e gestito da una collaborazione di fisici, economisti e ingegneri, sul lato accademico, e da numerosi e importanti partner aziendali, quali UBM, Vodafone, Siemens, STMicroelectronics, SAS, HI-KNOW, FMR. Esso risponde alle esigenze di un mercato che richiede conoscenze avanzate per affrontare attività professionali nei campi della gestione manageriale del rischio finanziario, dell'innovazione industriale, dell'information e communication technology e della gestione e analisi dei dati. Il coinvolgimento di grandi aziende nel master è frutto della collaborazione pluriennale con l'Università di Pavia e dimostra la necessità, per qualsiasi professionista che voglia operare efficacemente in ambiti complessi, di possedere una conoscenza specifica di moderne tecniche quantitative di simulazione, analisi e modellazione di sistemi. Affiancano queste aziende leader centri di eccellenza nella ricerca scientifica e tecnologica come l'INFN (Istituto Nazionale di Fisica Nucleare), AIFIRM (Associazione Italiana Financial Risk Management) ed ENBIS (European Network for Industrial and Business Statistics). Informazioni dettagliate sulla Scuola e sul Master sono disponibili all'indirizzo http://www.unipv.it/complexity.

Conclusioni

Come abbiamo visto, la complessità appare caratteristica di un vastissimo insieme di fenomeni, sia naturali che sociali.

Un aspetto fondamentale della complessità è il fatto che essa compaia in sistemi composti da numerosi «individui», in interazione tra loro mediante meccanismi non lineari. Non solo: si tratta di effetti collettivi, che emergono nel momento in cui il sistema viene considerato come un complesso indivisibile, il cui comportamento non è dato semplicemente dalla somma dei comportamenti individuali. Questo implica una visione nuova della scienza, al di là del cosidetto approccio riduzionista.

Una seconda caratteristica della complessità è nel fatto che essa si manifesta in quella sfumata regione di confine tra ordine e caos, dove le leggi deterministiche

non sono più sufficienti e le leggi statistiche non ancora applicabili. Per questa ragione, alcuni ritengono che sarà necessario sviluppare una matematica nuova, la matematica della complessità.

Un ulteriore tratto identificativo della complessità sta nel fatto che la fenomenologia dei sistemi complessi è trasversale ai vari ambiti delle scienze, dalla fisica all'economia, dalla biologia all'ingegneria, e così via. Inoltre, le ricerche sui sistemi complessi hanno una forte valenza applicativa e possono avere conseguenze importanti per molte applicazioni, dallo sviluppo di farmaci alla sicurezza di Internet, dalla messa a punto di migliori modelli per la gestione del rischio finanziario alla realizzazione di più efficienti strategie di marketing.

Va osservato infine che la disponibilità di computer sempre più potenti rende oggi, rispetto al passato, lo studio dei sistemi complessi un campo di ricerca percorribile e ricco di prospettive. Da questo punto di vista, una delle sfide più affascinanti è la comprensione di quei particolari sistemi complessi, detti adattivi, il cui comportamento evolve anche in funzione degli stimoli ricevuti dall'ambiente esterno, per meglio adattarsi al mutare delle condizioni. L'origine della vita e il funzionamento degli organismi viventi rappresentano la frontiera che si intravede.

Forse siamo agli albori di una nuova concezione della scienza, in grado di abbattere le barriere culturali e integrare i saperi specifici delle varie discipline.

Ringraziamenti

Desidero ringraziare i colleghi e amici Giorgio Goggi e Guido Montagna. Con Guido, alcuni anni or sono, ho cominciato ad affiancare all'attività di ricerca sulla fenomenologia delle interazioni fondamentali quella sulla scienza della complessità. Guido ha inoltre avuto la pazienza di leggere criticamente il manoscritto. Soprattutto grazie alla spinta di Giorgio è nata la ESAS citata nel testo. Concepire e realizzare la Scuola è stato per noi tre una sfida importante ma al tempo stesso ricca di soddisfazione: stiamo verificando in prima persona che le più avanzate ricerche in ambito accademico possono essere travasate con profitto al mondo del lavoro. La risposta entusiastica delle aziende coinvolte nella gestione della Scuola è per noi fonte di orgoglio e stimolo a proseguire sulla strada intrapresa. Infine desidero ringraziare anche i miei collaboratori più giovani, Giacomo Bormetti, Carlo Carloni Calame e Michele Treccani: il presente lavoro non sarebbe stato possibile senza il loro costante e prezioso aiuto.

BIBLIOGRAFIA

[1] R.M. May, *Nature* 261 (1976), 459.
[2] M. Feigenbaum, *J. Stat. Phys.* 19 (1978), 25.
[3] C.S. Bertuglia e F. Vaio, «*Non linearità, caos, complessità», Le dinamiche dei sistemi naturali e sociali*, Bollati Boringhieri, 2003.
[4] F. Sylos Labini, M. Montuori, L. Pietronero, *Phys. Report* 293 (1998) 61.
[5] E.A. de Wolf, I.M. Dremin, W. Kittel, *Phys. Rep.* 270 (1996), 1.
[6] I.M. Dremin, J.W. Gary, *Phys. Rep.* 349 (2001), 301.
[7] R. Taylor, A. Micolich, D. Jonas, *Physics World* vol. 12 n. 10 (1999).
[8] R. Albert, A.L. Barabasi, *Rev. Mod. Phys.* 74 (2002) 47.
[9] R.N. Mantegna and H.E. Stanley, *Nature* 376 (1995) 46; dati da Standard & Poor's 500, New York Stock Exchange, Gennaio 1984 - Dicembre 1989.
[10] G. Montagna, O. Nicrosini, N. Moreni, *Physica* A310 (2002) 450.