Rendiconti
Accademia Nazionale delle Scienze detta dei XL
Memorie di Matematica e Applicazioni
121° (2003), Vol. XXVII, fasc. 1, pagg. 1-34

WENCHANG CHU (*) - PIERLUIGI MAGLI (**)

Numeri poligonali ed equazioni diofantee (**)

SUNTO. — La successione dei numeri che sono sia quadrati che triangolari fu studiata intensivamente da Eulero e Goldbach nel diciottesimo secolo, i quali determinarono le relazioni ricorsive e le formule esplicite soddisfatte da tale successione. L'oggetto di questo articolo è generalizzare la successione ai numeri che sono, al tempo stesso, λ-gonali e μ-gonali: non ci risultano sviluppi in tal senso nella letteratura matematica. La procedura presentata prevede la riduzione di un'equazione diofantea quadratica ad una corrispondente equazione di Pell generalizzata che va risolta insieme a certe condizioni di congruenza indotte dalla riduzione stessa.

Polygonal Numbers and Diophantine Equations

SUMMARY. — In the eighteenth century, both square numbers and triangular numbers were investigated intensively by Euler and Goldbach, who determined the recurrence relations satisfied by the sequence and established the general formulae explicitly. It seems to the authors that the topics around this subject have not been explored in mathematical literature. As the first attempt to fill this gap, this paper will present a general procedure to deal with the problem. For the regular λ-gonal and μ-gonal numbers, the corresponding Diophantine equations will be reduced to the generalized Pell equations. The latter can be resolved by Lagrange-Matthews-Mollin method, which allows us to recover systematically the whole sequence of the regular (λ, μ)-polygonal numbers.

1. - NUMERI POLIGONALI REGOLARI

Fin dall'antichità è ben noto che i numeri triangolari ed i numeri quadrati sono

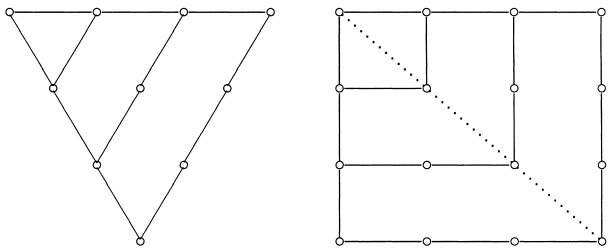
(*) Indirizzo dell'Autore: Dipartimento di Matematica, Università degli Studi di Lecce, Lecce-Arnesano, P.O. Box 193, 73100 Lecce, Italia; E-mail: chu.wenchang@unile.it
(**) Via Mare 95, San Pietro Vernotico (BR), 72027; E-mail: pierluigi.magli@libero.it
(***) Memoria presentata l'8 aprile 2003 da Giorgio Letta, uno dei XL.

rappresentati rispettivamente da:

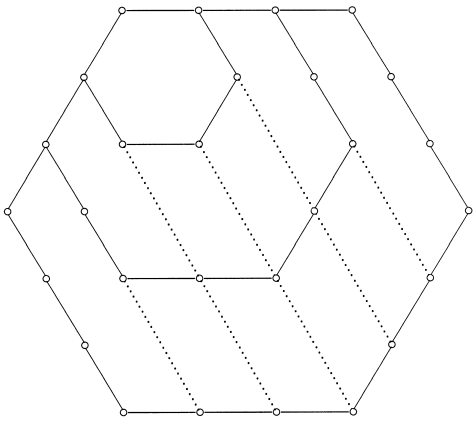
$$\mathcal{P}_3 = \left\{ \binom{n+1}{2} \,|\, n = 1, 2, \ldots \right\} \tag{1.1a}$$

$$\mathcal{P}_4 = \left\{ n^2 \,|\, n = 1, 2, \ldots \right\}. \tag{1.1b}$$

Geometricamente, essi possono essere illustrati dalle seguenti figure:



In generale, è possibile generalizzare queste successioni ad un generico poligono regolare. Fissato con λ il numero dei lati del poligono, detto λ-poligono, e con n la lunghezza dei lati, definiamo $p_\lambda(n)$ *l'n-esimo numero del λ-poligono regolare* con la seguente procedura ricorsiva. Poniamo $p_\lambda(1) := 1$. Sulla base di un λ-poligono con lunghezza dei lati uguali a n, possiamo costruire il poligono successivo con lunghezza dei lati uguali a $n+1$, prolungando di una unità due lati di *base* che si incrociano al punto di partenza e aggiungendo $\lambda - 2$ nuovi lati paralleli ai lati rimasti. Durante questa costruzione, abbiamo aggiunto $1 + n(\lambda - 2)$ nuovi punti. Questa procedura viene illustrata dalla seguente figura esagonale:



Così si stabilisce la seguente relazione ricorrente:

LEMMA 1 [Relazione ricorsiva]. *I numeri λ-poligonali $\{p_\lambda(n)\}_{n\geq 1}$ soddisfano la seguente relazione:*

$$p_\lambda(1) = 1, \quad p_\lambda(1+n) = 1 + (\lambda - 2)\, n + p_\lambda(n) \quad \textit{dove} \quad n = 1, 2, \dots .$$

È facile verificare, per il principio di induzione, che la soluzione della relazione ricorrente viene fornita dal seguente:

TEOREMA 2 (Numeri poligonali regolari): *I numeri λ-poligonali regolari sono dati da:*

$$p_\lambda(n) = n + (\lambda - 2)\binom{n}{2} \quad \textit{dove} \quad n = 1, 2, \dots . \tag{1.2}$$

Allora tutti i numeri poligonali regolari con λ lati sono dati da

$$\mathcal{P}_\lambda = \left\{ n + (\lambda - 2)\binom{n}{2} \,\middle|\, n = 1, 2, \dots \right\}.$$

In particolare, i numeri pentagonali sono

$$\mathcal{P}_5 = \left\{ \frac{3n^2 + n}{n} \,\middle|\, n = 1, 2, \dots \right\}$$

sui quali risulta una comunicazione tra Eulero e Goldbach nel millesettecento.

L'obiettivo di questo lavoro è determinare $P_\lambda \cap P_\mu$, i numeri naturali che sono sia λ-poligonali che μ-poligonali, detti in breve, numeri (λ, μ)-poligonali. Siano $\lambda, \mu \in \mathbb{N}$ con $\lambda \neq \mu$ e $\lambda, \mu \geq 3$, allora l'insieme $P_\lambda \cap P_\mu$ è fornito dalle soluzioni positive della seguente equazione diofantea

$$x + (\lambda - 2)\binom{x}{2} = y + (\mu - 2)\binom{y}{2}.$$

Indichiamo con $(x_n, y_n; z_n)$ la terna dei numeri naturali in cui z_n è sia il numero λ-poligonale con lunghezza del lato x_n, che il numero μ-poligonale con lunghezza del lato y_n. Osservando, per $(\lambda, \mu) = (3, 4)$, la seguente tabella:

n	x_n	y_n	z_n
1	1	1	1
2	8	6	36
3	49	35	1225
4	288	204	41616
5	1681	1189	1413721

Eulero notò, nel 1730, che numeri triangolari che siano anche quadrati sono della forma seguente:

$$x_n = \frac{(3+2\sqrt{2})^n + (3-2\sqrt{2})^n}{4} - \frac{1}{2} \quad (n \in \mathbb{N}) \tag{1.4a}$$

$$y_n = \frac{(3+2\sqrt{2})^n - (3-2\sqrt{2})^n}{4\sqrt{2}} \quad (n \in \mathbb{N}) . \tag{1.4b}$$

Solo successivamente (1778) egli provò che sono effettivamente tutti. Egli diede anche le seguenti formule ricorsive:

$$x_n = 6x_{n-1} - x_{n-2} + 2 , \qquad x_1 = 1 , \ x_2 = 8 \tag{1.5a}$$

$$y_n = 6y_{n-1} - y_{n-2} , \qquad y_1 = 1 , \ y_2 = 6 . \tag{1.5b}$$

Le soluzioni esplicite ci suggeriscono di ridurre l'equazione diofantea all'equazione di Pell generalizzata:

$$U^2 - DV^2 = N .$$

Dato che la teoria dell'equazione di Pell è molto sviluppata, sulla base di questa presenteremo una procedura generale per affrontare il problema dei numeri (λ, μ)-poligonali regolari. Perciò, riproduciamo come secondo capitolo una breve introduzione all'equazione di Pell generalizzata, che verrà applicata nel terzo capitolo in vari esempi specifici.

Non ci risulta che esista, nella letteratura matematica, alcuno sviluppo riguardante i numeri (λ, μ)-poligonali regolari, dopo quello di Eulero: è dunque nostra intenzione esplorare questo terreno vergine compiendo un'indagine più profonda sulla natura di questi numeri. Perciò, nella prima appendice, includiamo tutti gli esempi degli insiemi $\mathcal{P}_\lambda \cap \mathcal{P}_\mu$ per $3 \leqslant \lambda \neq \mu \leqslant 9$, sperando che siano utili sia per un'eventuale ricerca più approfondita, sia per chi abbia necessità di una consultazione in un proprio lavoro. Il calcolo presentato in questo articolo è stato effettuato maggiormente tramite *Computer Algebra*. I relativi programmi, sviluppati in *Mathematica*, sono inclusi alla fine dell'articolo nella seconda appendice, che crediamo possa facilitare il lettore nello studio e nella ricerca.

2. - Equazione di Pell Generalizzata

Dati due interi D ed N con D positivo, l'equazione a due incognite U e V

$$U^2 - DV^2 = N \tag{2.1}$$

viene chiamata equazione quadratica diofantea quando le soluzioni vanno ricercate tra i numeri interi. Quando D è un quadrato perfetto, questa equazione ha al più un numero finito di soluzioni, altrimenti, se esistono, esse sono infinite. In tal caso, l'equazione viene

chiamata *equazione di Pell generalizzata*, in confronto con l'equazione

$$u^2 - Dv^2 = 1 \tag{2.2}$$

denominata equazione di Pell associata alla (2.1).

Supposto che D non sia un quadrato perfetto, una coppia di interi (U, V) tale che $U^2 - DV^2 = N$ viene detta una soluzione dell'equazione (2.1).

L'equazione di Pell (2.2) ammette sempre infinite soluzioni; esse si possono determinare mediante lo sviluppo in frazione continua di $\sqrt{D}$. Se (u, v) è la soluzione minima positiva, allora tutte le soluzioni non negative dell'equazione di Pell sono date da

$$u_n \pm v_n \sqrt{D} = \{u \pm v\sqrt{D}\}^n, \qquad (n \in \mathbb{N}_0) \tag{2.3}$$

dalla quale seguono le formule esplicite:

$$u_n = \frac{1}{2}\{(u + v\sqrt{D})^n + (u - v\sqrt{D})^n\} \tag{2.4a}$$

$$v_n = \frac{1}{2\sqrt{D}}\{(u + v\sqrt{D})^n - (u - v\sqrt{D})^n\}. \tag{2.4b}$$

Inoltre, è facile verificare che le successioni $\{u_n, v_n\}$ soddisfano le relazioni ricorsive di secondo grado

$$u_{1+n} = 2\,u\,u_n - u_{n-1} \tag{2.5a}$$

$$v_{1+n} = 2\,u\,v_n - v_{n-1} \tag{2.5b}$$

e le relazioni incrociate di primo grado:

$$u_{1+n} = u\,u_n + v\,v_n D \tag{2.6a}$$

$$v_{1+n} = u\,v_n + v\,u_n. \tag{2.6b}$$

Se (U, V) è una soluzione dell'equazione (2.1) e (u, v) una soluzione dell'equazione di Pell associata, allora $(uU + vVD, uV + vU)$ generata dal prodotto

$$(u + v\sqrt{D}) \times (U + V\sqrt{D}) = (uU + vVD) + (uV + vU)\sqrt{D}$$

è di nuovo una soluzione di (2.1) grazie alla relazione

$$(uU + vVD)^2 - D(uV + vU)^2 = (u^2 - Dv^2) \times (U^2 - DV^2).$$

Possiamo applicare ciò per separare le soluzioni di (2.1) in classi di equivalenza. Due soluzioni (U, V) e (U', V') di (2.1) si dicono equivalenti se esiste una soluzione (u, v) dell'equazione di Pell associata (2.2) tale che

$$(U', V') = (uU + vVD, uV + vU).$$

È facile verificare che due soluzioni (U, V) e (U', V') sono equivalenti se e solo se

$$\frac{UU' - DVV'}{N} \in \mathbb{Z} \quad \text{e} \quad \frac{UV' - U'V}{N} \in \mathbb{Z}\,. \tag{2.7}$$

Se (U, V) è una soluzione della (2.1), allora tutte quattro le coppie $(\pm U, \pm V)$ sono soluzioni della (2.1), fra cui (U, V) e $(U, -V)$ vengono denominate *coniugate*. Notando che $(-1, 0)$ è una soluzione della (2.2), si ha che (U, V) e $(-U, -V)$ appartengono sempre alla stessa classe di soluzioni della (2.1).

Data una classe di equivalenza di soluzioni della (2.1), la soluzione (U_0, V_0) per cui la seconda componente assume il minimo valore non negativo si dice *soluzione fondamentale*. Ovviamente $(-U_0, V_0)$ è soluzione fondamentale della classe coniugata. Se (U_0, V_0) e $(-U_0, V_0)$ sono equivalenti, diremo soluzione fondamentale quella con prima componente non negativa.

Se (U_0, V_0) è una soluzione fondamentale della (2.1) e (u, v) è la soluzione minima positiva della (2.2), allora tutte le soluzioni nella classe di equivalenza contenente (U_0, V_0) sono generate dai prodotti

$$\pm(U_0 + V_0\sqrt{D}) \times (u \pm v\sqrt{D})^n, \qquad (n \in \mathbb{N}_0)\,.$$

Il seguente teorema ci dice dove cercare le soluzioni fondamentali.

Teorema 3 (Soluzioni fondamentali: vedi [6, § 6.2], [4, § 8.3] e [8, § 58]): *Se* (U_0, V_0) *è la soluzione fondamentale di una data classe di equivalenza di soluzioni dell'equazione* (2.1) *e se* (u, v) *è la soluzione minima positiva dell'equazione di Pell associata* (2.2), *allora valgono le seguenti disuguaglianze:*

$$(N > 0) \qquad \begin{cases} 0 < |U_0| \leqslant \sqrt{N(u+1)/2} \\ 0 \leqslant V_0 \leqslant \sqrt{N(u-1)/2D} \end{cases} \tag{2.8a}$$

$$(N < 0) \qquad \begin{cases} 0 \leqslant |U_0| \leqslant \sqrt{|N|(u-1)/2} \\ 0 < V_0 \leqslant \sqrt{|N|(u+1)/2D}. \end{cases} \tag{2.8b}$$

Sia (U_0, V_0) una soluzione fondamentale della (2.1) e $\{(u_n, v_n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ tutte le soluzioni della (2.2) esplicitate nelle (2.4a-2.4b). Allora le soluzioni $\{(U_n, V_n)\}$ generate da (U_0, V_0) sono

$$U_n + V_n\sqrt{D} = \pm\{(U_0 + V_0\sqrt{D}) \times (u_n \pm v_n\sqrt{D})\}\,, \qquad (n \in \mathbb{N}_0) \tag{2.9}$$

che costituiscono una classe d'equivalenza. Poichè i numeri poligonali sono tutti positivi, ci interessa sapere quali soluzioni tra quelle date dalla (2.9) sono positive. La seguente proposizione chiarisce tale punto.

PROPOSIZIONE 4 (Soluzioni positive): *Sia* (U_0, V_0) *una soluzione fondamentale della* (2.1) *con* U_0 *positivo. Quando* (U_0, V_0) *è equivalente alla sua coniugata* $(-U_0, V_0)$, *allora le soluzioni positive nella classe di equivalenza* (2.9) *generata da* (U_0, V_0) *sono:*

$$(U_0 u_n + V_0 v_n D,\ V_0 u_n + U_0 v_n)\,. \tag{2.10a}$$

Invece se (U_0, V_0) *non è equivalente alla sua coniugata* $(-U_0, V_0)$, *allora le soluzioni positive nelle classi di equivalenza* (2.9) *generate da* $(\pm U_0, V_0)$ *sono:*

$$(U_0 u_n \pm V_0 v_n D,\ \pm V_0 u_n + U_0 v_n)\,, \qquad N > 0 \tag{2.10b}$$

$$(\pm U_0 u_n + V_0 v_n D,\ V_0 u_n \pm U_0 v_n)\,, \qquad N < 0\,. \tag{2.10c}$$

DIMOSTRAZIONE: Ovviamente, il caso in cui $U_0 = 0$ ricade in (2.10a).

Sia (U_0, V_0) una soluzione fondamentale della (2.1), le soluzioni generate dalla (2.9) si possono esplicitare come segue:

$$(+U_0 u_n + V_0 v_n D,\ +V_0 u_n + U_0 v_n) \tag{2.11a}$$

$$(+U_0 u_n - V_0 v_n D,\ +V_0 u_n - U_0 v_n) \tag{2.11b}$$

$$(-U_0 u_n + V_0 v_n D,\ -V_0 u_n + U_0 v_n) \tag{2.11c}$$

$$(-U_0 u_n - V_0 v_n D,\ -V_0 u_n - U_0 v_n)\,. \tag{2.11d}$$

Se (U_0, V_0) non è equivalente alla coniugata $(-U_0, V_0)$, la classe di equivalenza generata da quest'ultima è

$$U_n + V_n\sqrt{D} = \pm\{(-U_0 + V_0\sqrt{D}) \times (u_n \pm v_n\sqrt{D})\}\,, \qquad (n \in \mathbb{N}_0) \tag{2.12}$$

e cioè:

$$(+U_0 u_n - V_0 v_n D,\ -V_0 u_n + U_0 v_n) \tag{2.13a}$$

$$(-U_0 u_n + V_0 v_n D,\ +V_0 u_n - U_0 v_n) \tag{2.13b}$$

$$(+U_0 u_n + V_0 v_n D,\ -V_0 u_n - U_0 v_n) \tag{2.13c}$$

$$(-U_0 u_n - V_0 v_n D,\ +V_0 u_n + U_0 v_n)\,. \tag{2.13d}$$

Naturalmente, se (U_0, V_0) e $(-U_0, V_0)$ sono equivalenti, le due classi di soluzioni sopra elencate coincidono. In tale caso, consideriamo solamente la classe (2.11), dove solo (2.11a) fornisce le soluzioni positive. Infatti, evidentemente, (2.11d) dà solo soluzioni negative e dimostriamo che accade lo stesso per (2.11b) e (2.11c).

Supponiamo per assurdo che le soluzioni date da (2.11b) siano positive:

$$\left.\begin{array}{l} U_0 u_n - V_0 v_n D > 0 \\ V_0 u_n - U_0 v_n \quad > 0 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{u_n}{v_n} > \dfrac{V_0}{U_0} D \\ \dfrac{u_n}{v_n} > \dfrac{U_0}{V_0} . \end{array}\right.$$

Notando dalla (2.2) che

$$(u_n/v_n)^2 = D + 1/v_n^2 \quad \Rightarrow \quad \lim_{n \to +\infty} \frac{u_n}{v_n} = \sqrt{D}$$

si ha

$$\frac{U_0}{V_0} \geqslant \sqrt{D} \geqslant \frac{U_0}{V_0} \quad \Rightarrow \quad \frac{U_0}{V_0} = \sqrt{D}$$

che è impossibile. La dimostrazione è analoga nel caso della (2.11c).

Se (U_0, V_0) non è equivalente alla sua coniugata $(-U_0, V_0)$, è ovvio che le soluzioni positive nella classe (2.11) sono date solo da (2.11a), che conferma la scelta del segno positivo in (2.10b) ed in (2.10c).

Controlliamo ora i casi esplicitati nella (2.13). È facile vedere che le soluzioni date da (2.13c) e (2.13d) contengono una componente negativa, occupiamoci pertanto di (2.13a) e (2.13b). Se le soluzioni date da (2.13a) sono positive vale:

$$\left.\begin{array}{l} U_0 u_n - V_0 v_n D > 0 \\ V_0 u_n - U_0 v_n \quad < 0 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{u_n}{v_n} > \dfrac{V_0}{U_0} D \\ \dfrac{u_n}{v_n} < \dfrac{U_0}{V_0} . \end{array}\right.$$

Segue

$$D \frac{V_0}{U_0} < \frac{u_n}{v_n} < \frac{U_0}{V_0} \quad \Rightarrow \quad U_0^2 - D V_0^2 > 0$$

che è vero per $N > 0$. Così abbiamo verificato la scelta del segno negativo in (2.10b). La dimostrazione è analoga per (2.13b) che corrispode al segno negativo in (2.10c). ■

Come per le relazioni ricorrenti (2.5a)-(2.5b) e (2.6a)-(2.6b) dell'equazione di Pell, non è difficile verificare tramite (2.9), che le soluzioni $\{U_n, V_n\}$ della (2.1) nella stessa classe di equivalenza soddisfano le relazioni ricorsive di secondo grado

(2.14a) $$U_{1+n} = 2uU_n - U_{n-1}$$

(2.14b) $$V_{1+n} = 2uV_n - V_{n-1}$$

e le relazioni incrociate di primo grado

$$U_{1+n} = uU_n + vV_n D \tag{2.15a}$$

$$V_{1+n} = uV_n + vU_n \tag{2.15b}$$

dove (u, v) è la soluzione minima positiva della (2.2).

SOMMARIO: Per risolvere l'equazione (2.1), basta procedere come segue:

(1) Trovare la soluzione minima positiva (u, v) dell'equazione di Pell associata (2.2). PQ-algoritmo: [4, § 8.1] e [9, § 7.9].

(2) Trovare tutte le soluzioni fondamentali (U_0, V_0) dell'equazione di Pell generalizzata (2.1) secondo il Teorema 3. Brute-force search: [4, § 8.3], [6, § 5.3]; LMM-algoritmo: [5], [7], [10].

(3) Applicando la Proposizione 4, stabilire le soluzioni positive della (2.1) generate dalla (2.9).

Per facilitare la lettura del lavoro, abbiamo presentato un progamma codicificato con *Mathematica* alla fine dell'articolo per calcolare la soluzione minima positiva dell'equazione di Pell associata e le soluzioni fondamentali dell'equazioni di Pell generalizzata.

3. - NUMERI (λ, μ)-poligonali regolari

Siano $\lambda, \mu \in \mathbb{N}$ con $\lambda \neq \mu$ e $\lambda, \mu \geqslant 3$. Le soluzioni della seguente equazione diofantea forniscono l'insieme $\mathcal{P}_\lambda \cap \mathcal{P}_\mu$:

$$p_\lambda(x) = p_\mu(y) \rightleftharpoons x + (\lambda - 2)\binom{x}{2} = y + (\mu - 2)\binom{y}{2} \tag{3.1}$$

che equivale alla seguente:

$$(\lambda - 2)\, x^2 - (\lambda - 4)\, x = (\mu - 2)\, y^2 - (\mu - 4)\, y\,.$$

L'equazione possiede le soluzioni banali $(x_0, y_0) = (0, 0)$ ed $(x_1, y_1) = (1, 1)$. Cerchiamo ora una trasformazione che renda l'equazione precedente del tipo (2.1), con i più piccoli coefficienti possibili. Data la simmetria dei due membri dell'equazione, è sufficente lavorare solo su un membro. Completando il quadrato, possiamo riformula-

re il primo come segue:

$$8p_\lambda(x) = 4(\lambda-2)\left\{x - \frac{\lambda-4}{2\lambda-4}\right\}^2 - \frac{(\lambda-4)^2}{\lambda-2}$$

$$= \frac{1}{\lambda-2}\{(2\lambda-4)\,x - (\lambda-4)\}^2 - \frac{(\lambda-4)^2}{\lambda-2}$$

$$= \frac{d^2(\lambda)}{\lambda-2}\left\{\frac{2\lambda-4}{d(\lambda)}x - \frac{\lambda-4}{d(\lambda)}\right\}^2 - \frac{(\lambda-4)^2}{\lambda-2}$$

dove

$$d(\lambda) = \gcd(\lambda-4,\, 2\lambda-4) = \begin{cases} 1, & \lambda \equiv_2 1 \\ 2, & \lambda \equiv_4 2 \\ 4, & \lambda \equiv_4 0 \end{cases} \tag{3.2}$$

e il simbolo $\equiv_m$ rappresenta la congruenza modulo m.

Pertanto (3.1) diventa

$$\frac{d^2(\lambda)}{\lambda-2}\left\{\frac{2\lambda-4}{d(\lambda)}x - \frac{\lambda-4}{d(\lambda)}\right\}^2 - \frac{(\lambda-4)^2}{\lambda-2}$$

$$= \frac{d^2(\mu)}{\mu-2}\left\{\frac{2\mu-4}{d(\mu)}y - \frac{\mu-4}{d(\mu)}\right\}^2 - \frac{(\mu-4)^2}{\mu-2}$$

e dunque

$$(\lambda-\mu)(\lambda\mu-2\lambda-2\mu) = (\mu-2)\,d^2(\lambda)\left\{\frac{2\lambda-4}{d(\lambda)}x - \frac{\lambda-4}{d(\lambda)}\right\}^2$$

$$-(\lambda-2)\,d^2(\mu)\left\{\frac{2\mu-4}{d(\mu)}y - \frac{\mu-4}{d(\mu)}\right\}^2.$$

Posto

$$c(\lambda,\mu) = \gcd\{d^2(\lambda)(\mu-2),\ d^2(\mu)(\lambda-2)\} \tag{3.3}$$

si ha che

$$\frac{(\lambda-\mu)(\lambda\mu-2\lambda-2\mu)}{c(\lambda,\mu)} = \frac{(\mu-2)\,d^2(\lambda)}{c(\lambda,\mu)}\left\{\frac{2\lambda-4}{d(\lambda)}x - \frac{\lambda-4}{d(\lambda)}\right\}^2$$

$$-\frac{(\lambda-2)\,d^2(\mu)}{c(\lambda,\mu)}\left\{\frac{2\mu-4}{d(\mu)}y - \frac{\mu-4}{d(\mu)}\right\}^2.$$

Siamo ora nelle condizioni di operare una prima trasformazione che avvicini la forma della nostra equazione a quella di (2.1).

Definendo

$$B(\lambda, \mu) = \frac{(\mu - 2)\, d^2(\lambda)}{c(\lambda, \mu)} \tag{3.4a}$$

$$M(\lambda, \mu) = \frac{(\lambda - \mu)(\lambda\mu - 2\lambda - 2\mu)}{c(\lambda, \mu)} \tag{3.4b}$$

possiamo vedere facilmente che

$$\gcd\{B(\lambda, \mu), B(\mu, \lambda)\} = 1 .$$

Pertanto (3.1) diventa

$$B(\lambda, \mu)\, X^2 - B(\mu, \lambda)\, Y^2 = M(\lambda, \mu) . \tag{3.5}$$

La trasformazione $\mathcal{S}: (x, y) \to \{X(x), Y(y)\}$ che lega le incognite delle (3.1) e (3.5) è esplicitata dalle seguenti relazioni:

$$\mathcal{S}: \begin{cases} X = \dfrac{2\lambda - 4}{d(\lambda)}\, x - \dfrac{\lambda - 4}{d(\lambda)} \\ Y = \dfrac{2\mu - 4}{d(\mu)}\, y - \dfrac{\mu - 4}{d(\mu)} . \end{cases}$$

Per ogni numero naturale n, consideriamo la decomposizione in due fattori $n = pq^2$, dove p e q sono numeri naturali con p privo di divisori quadratici. Nel nostro caso si ha

$$B(\lambda, \mu) = p(\lambda, \mu)\, q^2(\lambda, \mu) \tag{3.6}$$

dove $p(\lambda, \mu)$ è libero da quadrati, e pertanto l'equazione (3.5) si scrive come segue:

$$p(\lambda, \mu)\{q(\lambda, \mu)\, X\}^2 - p(\mu, \lambda)\{q(\mu, \lambda)\, Y\}^2 = M(\lambda, \mu) .$$

Supponiamo che sia $p(\lambda, \mu) < p(\mu, \lambda)$; moltiplicando ora per $p(\lambda, \mu)$

$$\{p(\lambda, \mu)\, q(\lambda, \mu)\, X\}^2 - p(\lambda, \mu)\, p(\mu, \lambda)\{q(\mu, \lambda)\, Y\}^2 = p(\lambda, \mu)\, M(\lambda, \mu)$$

e definendo la trasformazione $\mathcal{T}: (X, Y) \to \{U(X), V(Y)\}$ con

$$\mathcal{T}: \begin{cases} U = p(\lambda, \mu)\, q(\lambda, \mu)\, X \\ V = q(\mu, \lambda)\, Y \end{cases}$$

possiamo finalmente riscrivere (3.1) come un'equazione di Pell generalizzata:

$$U^2 - D(\lambda, \mu)\, V^2 = N(\lambda, \mu) \tag{3.7}$$

dove D e N sono così assegnati:

$$D(\lambda, \mu) = p(\lambda, \mu)\, p(\mu, \lambda) \tag{3.8a}$$

$$N(\lambda, \mu) = p(\lambda, \mu)\, M(\lambda, \mu)\,. \tag{3.8b}$$

La trasformazione composta $\Omega[\lambda, \mu] = \mathcal{T} \circ \mathcal{S} : (x, y) \to \{U(x), V(y)\}$ si esplicita come segue:

$$\Omega[\lambda, \mu] : \begin{cases} U = \left\{ \dfrac{2\lambda - 4}{d(\lambda)}\, x - \dfrac{\lambda - 4}{d(\lambda)} \right\} p(\lambda, \mu)\, q(\lambda, \mu) \\[2ex] V = \left\{ \dfrac{2\mu - 4}{d(\mu)}\, y - \dfrac{\mu - 4}{d(\mu)} \right\} q(\mu, \lambda)\,. \end{cases} \tag{3.9}$$

La sua inversa $\Omega'[\lambda, \mu] = \mathcal{S}' \circ \mathcal{T}'$ è determinata da:

$$\Omega'[\lambda, \mu] : \begin{cases} x = \dfrac{d(\lambda)\, U + (\lambda - 4)\, p(\lambda, \mu)\, q(\lambda, \mu)}{(2\lambda - 4)\, p(\lambda, \mu)\, q(\lambda, \mu)} \\[2ex] y = \dfrac{d(\mu)\, V + (\mu - 4)\, q(\mu, \lambda)}{(2\mu - 4)\, q(\mu, \lambda)}\,. \end{cases} \tag{3.10}$$

Nota: Se invece $p(\lambda, \mu) > p(\mu, \lambda)$ è comunque possibile ricondursi al caso dell'equazione (3.7): basta scambiare tra loro λ e μ in (3.1) e in (3.5). Data la simmetria di (3.5), l'equazione duale risulta del tipo (3.7) con coefficenti $D(\mu, \lambda) = D(\lambda, \mu)$ e $N(\mu, \lambda) = p(\mu, \lambda)\, M(\mu, \lambda)$ rispettivamente. Questo eventuale scambio tra λ e μ permette di scegliere l'equazione ridotta di Pell (3.7) con coefficiente costante N il più piccolo possibile, e ciò facilita la ricerca delle soluzioni.

Ricordando che $(x_0, y_0) = (0, 0)$ e $(x_1, y_1) = (1, 1)$ sono sempre soluzioni della (3.1), abbiamo che $\{U(0), V(0)\}$ e $\{U(1), V(1)\}$ ottenute dalla trasformazione composta $\Omega[\lambda, \mu]$ sono sempre soluzioni dell'equazione trasformata (3.7).

Osserviamo che $\Omega[\lambda, \mu]$ trasforma interi in interi, ma $\Omega'[\lambda, \mu]$ trasforma interi in razionali; pertanto per pervenire alle soluzioni di (3.1) è necessario innanzitutto risolvere l'equazione ridotta trovata, scegliere le sole soluzioni positive ed infine scartare quelle che non danno valori interi per x ed y.

Ora presentiamo alcuni esempi per mostrare la procedura appena descritta. Indichiamo con $\overline{\alpha}$, per semplicità, il coniugato di ogni numero algebrico α.

Esempio 1 $(\lambda, \mu) = (6, 3)$: *Numeri triangolari ed esagonali*: Questo è un caso molto particolare dell'equazione (3.1); effettivamente per tali valori di λ e μ, l'equazio-

ne dei numeri poligonali è riducibile ed è immediato quindi darne le soluzioni. Infatti, l'equazione (3.7) ridotta sotto la trasformazione (3.9) è:

$$U^2 - V^2 = 0 : \qquad \Omega[6, 3] \begin{cases} U = 2x + 1 \\ U = 4y - 1 \end{cases}$$

che è riducibile:

$$(U + V) \times (U - V) = 0 \rightleftharpoons (x + 2y) \times (1 + x - 2y) = 0 \, .$$

Ricordando che vanno scelte solo le soluzioni intere positive, esse possono esprimersi come segue:

n	x_n	y_n	z_n
1	1	1	1
2	3	2	6
3	5	3	15
4	7	4	28
5	9	5	45

$$\left.\begin{array}{l} x_n = 2n - 1 \\ y_n = n \end{array}\right\} \quad (n \in \mathbb{N})$$

dove in tabella sono riportati i primi cinque termini delle successioni. Evidentemente risulta che *tutti i numeri esagonali sono anche triangolari.*

Proviamo che questo è effettivamente l'unico caso in cui (3.7) è riducibile.

Infatti, dalle (3.4b) e (3.8b), si ha che $N(\lambda, \mu) = 0$ e/o $M(\lambda, \mu) = 0$ se e solo se

$$\lambda\mu - 2\lambda - 2\mu = 0 \rightleftharpoons (\lambda - 2)(\mu - 2) = 4 \, .$$

Sotto le restrizioni $\lambda > \mu$ e $\lambda, \mu \geqslant 3$, è facile osservare che essa porta alla sola soluzione $(\lambda, \mu) = (6, 3)$.

Esempio 2 $(\lambda, \mu) = (3, 4)$: *Numeri triangolari e quadrati*: L'equazione (3.7) e la trasformazione inversa (3.10) sono:

$$U^2 - 2V^2 = 1 : \qquad \Omega'[3, 4] \begin{cases} x = \dfrac{U - 1}{2} \\ y = \dfrac{V}{2} \, . \end{cases}$$

L'equazione è di Pell classica come (2.2) ed ha soluzione minima $(3, 2)$, per cui tutte

le sue soluzioni positive sono determinate dalla

$$U_n \pm V_n\sqrt{2} = (3 \pm 2\sqrt{2})^n, \qquad (n \in \mathbb{N})$$

che genera le formule esplicite:

$$\left.\begin{aligned} U_n &= \frac{\alpha^n + \overline{\alpha}^n}{2} \\ V_n &= \frac{\alpha^n - \overline{\alpha}^n}{2\sqrt{2}} \end{aligned}\right\} \quad \text{dove} \quad \begin{cases} \alpha = 3 + 2\sqrt{2} \\ \overline{\alpha} = 3 - 2\sqrt{2}. \end{cases}$$

Al fine di selezionare solo x ed y interi sotto la trasformazione $\Omega'[3, 4]$, dobbiamo ora tener presenti le condizioni di congruenza

$$U_n \equiv_2 1 \quad \text{e} \quad V_n \equiv_2 0 \qquad (n \in \mathbb{N})$$

vere per ogni $n \in \mathbb{N}_0$ come segue dal teorema binomiale:

$$U_n = \sum_{k \geqslant 0} \binom{n}{2k} 3^{n-2k} 2^{3k} \equiv_2 3^n \equiv_2 1$$

$$V_n = \sum_{k \geqslant 0} \binom{n}{2k+1} 3^{n-2k-1} 2^{3k+1} \equiv_2 0 .$$

Tramite la trasformazione $\Omega[3, 4]$, possiamo finalmente esprimere in modo esplicito le successioni delle soluzioni, riportando la tabella delle prime cinque soluzioni:

n	x_n	y_n	z_n
1	1	1	1
2	8	6	36
3	49	35	1225
4	288	204	41616
5	1681	1189	1413721

$$\left.\begin{aligned} x_n &= \frac{\alpha^n + \overline{\alpha}^n}{4} - \frac{1}{2} \\ y_n &= \frac{\alpha^n - \overline{\alpha}^n}{4\sqrt{2}} \end{aligned}\right\} \quad (n \in \mathbb{N})$$

che coincidono con quelle (1.4a)-(1.4b) trovate da Eulero.

Esempio 3 $(\lambda, \mu) = (5, 3)$: *Numeri triangolari e pentagonali*: In questo caso l'equazione (3.7) e la trasformazione inversa (3.10) diventano:

$$U^2 - 3V^2 = -2: \qquad \Omega'[5, 3] \begin{cases} x = \dfrac{U+1}{6} \\ y = \dfrac{V-1}{2}. \end{cases}$$

È semplice osservare che $(u, v) = (2, 1)$ è la soluzione minima dell'equazione di Pell associata $u^2 - 3v^2 = 1$, mentre le due soluzioni della trasformata

$$\Omega[5, 3](0, 0) = (-1, 1)$$

$$\Omega[5, 3](1, 1) = (5, 3)$$

sono equivalenti. Inoltre, è facile vedere che $(-1, 1)$ è equivalente alla sua coniugata $(1, 1)$. Secondo il Teorema 3, esiste la sola soluzione fondamentale $(1, 1)$, che genera una classe di soluzioni equivalenti. Le soluzioni positive selezionate da tale classe sono determinate dalla succesione (2.10a):

$$U_n = u_n + 3v_n$$

$$V_n = u_n + v_n$$

con le soluzioni dell'equazione di Pell classica fornite esplicitamente da:

$$\left.\begin{aligned} u_n &= \frac{\beta^n + \overline{\beta}^n}{2} \\ v_n &= \frac{\beta^n - \overline{\beta}^n}{2\sqrt{3}} \end{aligned}\right\} \quad \text{dove} \quad \begin{cases} \beta = 2 + \sqrt{3} \\ \overline{\beta} = 2 - \sqrt{3}. \end{cases}$$

Combinando le seguenti congruenze:

$$U_n = \sum_{k \geqslant 0} \binom{n}{2k} 2^{n-2k} 3^k + 3 \sum_{k \geqslant 0} \binom{n}{2k+1} 2^{n-2k-1} 3^k$$

$$\equiv_6 \left\{ \begin{matrix} 2^n + 3^{n/2}, & n \equiv_2 0 \\ 2^n + 3^{(n+1)/2}, & n \equiv_2 1 \end{matrix} \right\} \equiv_6 (-1)^n$$

$$V_n = \sum_{k \geqslant 0} \binom{n}{2k} 2^{n-2k} 3^k + \sum_{k \geqslant 0} \binom{n}{2k+1} 2^{n-2k-1} 3^k$$

$$\equiv_2 \left\{ \begin{matrix} 3^{n/2}, & n \equiv_2 0 \\ 3^{(n-1)/2}, & n \equiv_2 1 \end{matrix} \right\} \equiv_2 1$$

con la trasformazione $\Omega'[5, 3]$, possiamo affermare

$$x_n = \frac{U_{2n-1}+1}{6} \quad \& \quad y_n = \frac{V_{2n-1}-1}{2}$$

che si esprimono esplicitamente come segue:

$$\left.\begin{aligned} x_n &= \frac{\sqrt{3}-1}{12}\beta^{2n} - \frac{\sqrt{3}+1}{12}\overline{\beta}^{2n} + \frac{1}{6} \\ y_n &= \frac{\sqrt{3}-1}{4\sqrt{3}}\beta^{2n} + \frac{\sqrt{3}+1}{4\sqrt{3}}\overline{\beta}^{2n} - \frac{1}{2} \end{aligned}\right\} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Le prime cinque soluzioni sono riportate nella seguente tabella:

n	x_n	y_n	z_n
1	1	1	1
2	12	20	210
3	165	285	40755
4	2296	3976	7906276
5	31977	55385	1533776805

Esempio 4 $(\lambda, \mu) = (5, 4)$: *Numeri quadrati e pentagonali*: L'equazione ridotta e la trasformazione inversa rispettivamente corrispondenti alla (3.7) ed alla (3.10) sono:

$$U^2 - 6V^2 = 1: \qquad \Omega'[5, 4] \begin{cases} x = \dfrac{U+1}{6} \\ y = \dfrac{V}{2}. \end{cases}$$

Abbiamo un'equazione di Pell classica con la soluzione minima positiva $(5, 2)$. Tutte le altre soluzioni positive sono date dalla relazione

$$U_n \pm V_n\sqrt{6} = (5 \pm 2\sqrt{6})^n \qquad (n \in \mathbb{N})$$

che si legge in modo esplicito come segue:

$$\left.\begin{aligned} U_n &= \frac{\gamma^n + \overline{\gamma}^n}{2} \\ V_n &= \frac{\gamma^n - \overline{\gamma}^n}{2\sqrt{6}} \end{aligned}\right\} \quad \text{dove} \quad \begin{cases} \gamma = 5 + 2\sqrt{6} \\ \overline{\gamma} = 5 - 2\sqrt{6}. \end{cases}$$

Considerate le congruenze

$$U_n = \sum_{k \geqslant 0} \binom{n}{2k} 5^{n-2k} 2^{3k} 3^k \equiv_6 5^n \equiv_6 (-1)^n$$

$$V_n = \sum_{k \geqslant 0} \binom{n}{2k+1} 5^{n-2k-1} 2^{1+3k} 3^k \equiv_2 0$$

possiamo esprimere direttamente tramite la trasformazione $\Omega'[5, 4]$, le due successioni delle soluzioni:

$$\left.\begin{aligned} x_n &= \frac{\gamma^{2n-1} + \overline{\gamma}^{2n-1}}{12} + \frac{1}{6} \\ y_n &= \frac{\gamma^{2n-1} - \overline{\gamma}^{2n-1}}{4\sqrt{6}} \end{aligned}\right\} \quad n \in \mathbb{N}\,.$$

I primi cinque valori sono i seguenti:

n	x_n	y_n	z_n
1	1	1	1
2	81	99	9801
3	7921	9701	94109401
4	776161	950599	90368458801
5	76055841	93149001	8676736387298001

Esempio 5 $(\lambda, \mu) = (5, 8)$: *Numeri pentagonali ed ottagonali*: L'equazione ridotta e la trasformazione sono:

$$U^2 - 2V^2 = -7: \qquad \Omega'[5, 8] \begin{cases} x = \dfrac{U+1}{6} \\ y = \dfrac{V+2}{6}\,. \end{cases}$$

L'equazione di Pell associata ha la soluzione minima $(u, v) = (3, 2)$, mentre il Teorema 3 fornisce la soluzione fondamentale $(U_0, V_0) = (1, 2)$ e la sua coniugata, che non

risultano equivalenti. Notando che le soluzioni dell'equazione di Pell associata sono:

$$\left.\begin{aligned} u_n &= \frac{\varrho^n + \overline{\varrho}^n}{2} \\ v_n &= \frac{\varrho^n - \overline{\varrho}^n}{2\sqrt{2}} \end{aligned}\right\} \quad \text{dove} \quad \begin{cases} \varrho = 3 + 2\sqrt{2} \\ \overline{\varrho} = 3 - 2\sqrt{2} \end{cases}$$

abbiamo le seguenti soluzioni positive:

$$U_n^{\pm} = 4v_n \pm u_n$$
$$V_n^{\pm} = 2u_n \pm v_n$$

grazie alla (2.10c) con $N = -7 < 0$.

Tenendo conto delle congruenze

$$U_n^{\pm} = \pm \sum_{k \geqslant 0} \binom{n}{2k} 3^{n-2k} 2^{3k} + 4 \sum_{k \geqslant 0} \binom{n}{2k+1} 3^{n-2k-1} 2^{3k+1}$$

$$\equiv_6 \left\{\begin{matrix} \pm(3^n + 2^{3n/2}), & n \equiv_2 0 \\ \pm 3 + 2^{3(n+1)/2}, & n \equiv_2 1 \end{matrix}\right\} \equiv_6 \begin{cases} \pm 1, & n \equiv_4 0 \\ -1, & n \equiv_4 1 \\ \mp 1, & n \equiv_4 2 \\ +1, & n \equiv_4 3 \end{cases}$$

$$V_n^{\pm} = 2 \sum_{k \geqslant 0} \binom{n}{2k} 3^{n-2k} 2^{3k} \pm \sum_{k \geqslant 0} \binom{n}{2k+1} 3^{n-2k-1} 2^{3k+1}$$

$$\equiv_6 \left\{\begin{matrix} 2^{(3n+2)/2}, & n \equiv_2 0 \\ \pm 2^{(3n-1)/2}, & n \equiv_2 1 \end{matrix}\right\} \equiv_6 \begin{cases} +2, & n \equiv_4 0 \\ \pm 2, & n \equiv_4 1 \\ -2, & n \equiv_4 2 \\ \mp 2, & n \equiv_4 3 \end{cases}$$

e la trasformazione Ω' [5, 8], otteniamo le seguenti due classi di soluzioni:

$$x_n^- = \frac{1 + U_{4n-3}^-}{6} = \frac{1 + 4v_{4n-3} - u_{4n-3}}{6}$$

$$y_n^- = \frac{2 + V_{4n-3}^-}{6} = \frac{2 + 2u_{4n-3} - v_{4n-3}}{6}$$

$$x_n^+ = \frac{1 + U_{4n-2}^+}{6} = \frac{1 + 4v_{4n-2} + u_{4n-2}}{6}$$

$$y_n^+ = \frac{2 + V_{4n-2}^+}{6} = \frac{2 + 2u_{4n-2} + v_{4n-2}}{6}$$

che si esprimono in modo unificato come segue:

$$\left.\begin{aligned} x_n^{\pm} &= \frac{1}{6} + \frac{2\sqrt{2} \pm 1}{12}\,\varrho^{4n+(3\pm 1)/2} - \frac{2\sqrt{2} \mp 1}{12}\,\overline{\varrho}^{4n+(3\pm 1)/2} \\ y_n^{\pm} &= \frac{1}{3} + \frac{2\sqrt{2} \pm 1}{12\sqrt{2}}\,\varrho^{4n+(3\pm 1)/2} + \frac{2\sqrt{2} \mp 1}{12\sqrt{2}}\,\overline{\varrho}^{4n+(3\pm 1)/2} \end{aligned}\right\} \quad n \in \mathbb{N}_0 .$$

Riportiamo in un'unica tabella i primi cinque valori generati dalle due successioni:

n	x_n	y_n	z_n
1	1	1	1
2	11	8	176
3	1025	725	1575425
4	12507	8844	234631320
5	1182657	836265	2098015778145

Esempio 6 $(\lambda, \mu) = (7, 4)$: Si hanno la seguente equazione ridotta e relativa trasformazione:

$$U^2 - 10V^2 = 9 : \qquad \Omega'[7, 4] \begin{cases} x = \dfrac{U+3}{10} \\ y = \dfrac{V}{2} . \end{cases}$$

L'equazione di Pell associata ha la soluzione minima $(u, v) = (19, 6)$ e la soluzione generale:

$$\left.\begin{aligned} u_n &= \frac{\sigma^n + \overline{\sigma}^n}{2} \\ v_n &= \frac{\sigma^n - \overline{\sigma}^n}{2\sqrt{10}} \end{aligned}\right\} \quad \text{dove} \quad \begin{cases} \sigma = 19 + 6\sqrt{10} \\ \overline{\sigma} = 19 - 6\sqrt{10}. \end{cases}$$

Dal Teorema 3 si ottengono le soluzioni fondamentali:

$$(U^0, V^0) = (3, 0)$$

$$(U^{\pm}, V^{\pm}) = (\pm 7, 2)$$

che danno in totale tre classi di soluzioni. In questo caso $N > 0$, pertanto le soluzioni positive sono date rispettivamente da (2.10a) e (2.10b):

$$\left.\begin{aligned} U_n^0 &= 3\,u_n \\ V_n^0 &= 3\,v_n \end{aligned}\right\} \quad \& \quad \begin{cases} U_n^{\pm} = 7\,u_n \pm 20\,v_n \\ V_n^{\pm} = 7\,v_n \pm 2\,u_n \end{cases}$$

dove u_n e v_n soddisfano le seguenti congruenze:

$$u_n = \sum_{k \geqslant 0} \binom{n}{2k} 19^{n-2k} 6^{2k} 10^k \equiv_{10} 19^n \equiv_{10} (-1)^n$$

$$v_n = \sum_{k \geqslant 0} \binom{n}{2k+1} 19^{n-2k-1} 6^{2k+1} 10^k \equiv_2 0 \, .$$

- $(U^0, V^0) = (3, 0)$: Le congruenze

$$U_n^0 = 3\, u_n \equiv_{10} 3(-1)^n$$

$$V_n^0 = 3\, v_n \equiv_2 0$$

ci condizionano a scegliere gli indici dispari per avere soluzioni intere:

$$x_n^0 = \frac{3 + U_{2n-1}^0}{10} = \frac{3 + 3\, u_{2n-1}}{10}$$

$$y_n^0 = \frac{V_{2n-1}^0}{2} = \frac{3\, v_{2n-1}}{2} \, .$$

Pertanto, si ha che

$$\left.\begin{aligned} x_n^0 &= \frac{3(\sigma^{2n-1} + \overline{\sigma}^{2n-1})}{20} + \frac{3}{10} \\ y_n^0 &= \frac{3(\sigma^{2n-1} - \overline{\sigma}^{2n-1})}{4\sqrt{10}} \end{aligned}\right\} \quad n \in \mathbb{N} \, .$$

- $(U^{\pm}, V^{\pm}) = (\pm 7, 2)$: Secondo le congruenze

$$U_n^{\pm} = 7\, u_n \pm 20\, v_n \equiv_{10} 7\, u_n \equiv_{10} 3(-1)^{n+1}$$

$$V_n^{\pm} = 7\, v_n \pm 2\, u_n \equiv_2 0 + 0 \equiv_2 0$$

dobbiamo prendere allora solo gli indici pari per qualunque scelta del segno in (2.10b):

$$x_n^{\pm} = \frac{3 + U_{2n}^{\pm}}{10} = \frac{3 + 7\, u_{2n} \pm 20\, v_{2n}}{10}$$

$$y_n^{\pm} = \frac{V_{2n}^{\pm}}{2} = \frac{7\, v_{2n} \pm 2\, u_{2n}}{2}$$

da cui otteniamo pertanto altre due classi di soluzioni di (3.1):

$$\left.\begin{aligned} x_n^{\pm} &= \frac{7 \pm 2\sqrt{10}}{20}\,\sigma^{2n} + \frac{7 \mp 2\sqrt{10}}{20}\,\overline{\sigma}^{2n} + \frac{3}{10} \\ y_n^{\pm} &= \frac{7 \pm 2\sqrt{10}}{4\sqrt{10}}\,\sigma^{2n} - \frac{7 \mp 2\sqrt{10}}{4\sqrt{10}}\,\overline{\sigma}^{2n} \end{aligned}\right\} \quad n \in \mathbb{N}\,.$$

Abbiamo così ottenuto tre famiglie di soluzioni in tutto. La tabella dei cinque valori iniziali delle soluzioni è la seguente:

n	x_n	y_n	z_n
1	1	1	1
2	6	9	81
3	49	77	5929
4	961	1519	2307361
5	8214	12987	168662169

Esempio 7 $(\lambda, \mu) = (9, 8)$: L'equazione ridotta e la corrispondente trasformazione sono date da:

$$U^2 - 42\,V^2 = 57: \qquad \Omega'[9, 8] \begin{cases} x = \dfrac{U + 15}{42} \\[2ex] y = \dfrac{V + 2}{6}\,. \end{cases}$$

La soluzione minima dell'equazione di Pell associata è $(u, v) = (13, 2)$, che genera tutte le altre soluzioni positive:

$$\left.\begin{aligned} u_n &= \frac{\tau^n + \overline{\tau}^n}{2} \\ v_n &= \frac{\tau^n - \overline{\tau}^n}{2\sqrt{42}} \end{aligned}\right\} \quad \text{dove} \quad \begin{cases} \tau = 13 + 2\sqrt{42} \\ \overline{\tau} = 13 - 2\sqrt{42}. \end{cases}$$

Dal Teorema 3 si hanno le soluzioni fondamentali $(U^{\pm}, V^{\pm}) = (\pm 15, 2)$. Poichè $N > 0$, per (2.10b), le soluzioni positive sono:

$$U_n^{\pm} = 15\,u_n \pm 84\,v_n$$

$$V_n^{\pm} = 15\,v_n \pm 2\,u_n.$$

In relazione alle congruenze

$$U_n^{\pm} = 15\,u_n \pm 84\,v_n \equiv_{42} 15 \sum_{k \geqslant 0} \binom{n}{2k} 13^{n-2k} 2^{2k} 42^k$$

$$\equiv_{42} 15 \times 13^n \equiv_{42} 15 \times (-1)^n$$

$$V_n^{\pm} = 15\,v_n \pm 2\,u_n \equiv_6 \pm 2 \sum_{k \geqslant 0} \binom{n}{2k} 13^{n-2k} 2^{2k} 42^k$$

$$+ 15 \sum_{k \geqslant 0} \binom{n}{2k+1} 13^{n-2k-1} 2^{2k+1} 42^k$$

$$\equiv_6 0 \pm 2 \times 13^n \equiv_6 \pm 2$$

si devono scegliere il segno negativo e gli indici dispari. Allora le successioni

$$x_n = \frac{15 + U_{2n-1}^{-}}{42} = \frac{15 + 15\,u_{2n-1} - 84\,v_{2n-1}}{42}$$

$$y_n = \frac{2 + V_{2n-1}^{-}}{6} = \frac{2 + 15\,v_{2n-1} - 2\,u_{2n-1}}{6}$$

si esprimono esplicitamente come segue:

$$\left.\begin{aligned} x_n &= \frac{15 - 2\sqrt{42}}{84}\,\tau^{2n-1} + \frac{15 + 2\sqrt{42}}{84}\,\overline{\tau}^{2n-1} + \frac{5}{14} \\ y_n &= \frac{15 - 2\sqrt{42}}{12\sqrt{42}}\,\tau^{2n-1} - \frac{15 + 2\sqrt{42}}{12\sqrt{42}}\,\overline{\tau}^{2n-1} + \frac{1}{3} \end{aligned}\right\} \quad n \in \mathbb{N}\,.$$

Riportiamo, infine, la tabella delle prime cinque soluzioni:

n	x_n	y_n	z_n
1	1	1	1
2	425	459	631125
3	286209	309141	286703855361
4	192904201	208360351	130242107189808901
5	130017145025	140434567209	5916560300125654501 4625

A. - Appendice: gli insiemi $\mathcal{P}_\lambda \cap \mathcal{P}_\mu$ per $3 \leqslant \lambda \neq \mu \leqslant 9$

In questa appendice completiamo gli esempi per $3 \leqslant \lambda \neq \mu \leqslant 9$, riportando però schematicamente solo i passaggi essenziali ed i risultati finali.

A1. $(\lambda, \mu) = (7, 3)$. Equazione ridotta e trasformazione:

$$U^2 - 5V^2 = 4: \qquad \Omega'[7, 3] \begin{cases} x = \dfrac{U+3}{10} \\ y = \dfrac{V-1}{2} \end{cases}.$$

♠: Soluzione minima positiva della Pell associata: $(9, 4)$.
♢: Soluzioni fondamentali della ridotta: $(2, 0)$ e $(\pm 3, 1)$.
♡: Formule esplicite (ω, $\varpi = 9 \pm 4\sqrt{5}$):

$$\left.\begin{aligned} x_n^{\pm} &= \frac{3 \pm \sqrt{5}}{20}\,\omega^{2n-1} + \frac{3 \mp \sqrt{5}}{20}\,\varpi^{2n-1} + \frac{3}{10} \\ y_n^{\pm} &= \frac{3 \pm \sqrt{5}}{4\sqrt{5}}\,\omega^{2n-1} - \frac{3 \mp \sqrt{5}}{4\sqrt{5}}\,\varpi^{2n-1} - \frac{1}{2} \end{aligned}\right\} \quad n \in \mathbb{N}.$$

♣: I primi cinque esempi:

n	x_n	y_n	z_n
1	1	1	1
2	5	10	55
3	221	493	121771
4	1513	3382	5720653
5	71065	158905	12625478965

A2. $(\lambda, \mu) = (8, 3)$. Equazione ridotta e trasformazione

$$U^2 - 6V^2 = 10: \qquad \Omega'[8, 3] \begin{cases} x = \dfrac{U+4}{12} \\ y = \dfrac{V-1}{2} \end{cases}.$$

♠: Soluzione minima positiva della Pell associata: $(5, 2)$.
♢: Soluzioni fondamentali della ridotta: $(\pm 4, 1)$.

♡: Formule esplicite (ω, $\varpi = 5 \pm 2\sqrt{6}$):

$$\left.\begin{aligned} x_n^{\pm} &= \frac{4 \pm \sqrt{6}}{24}\,\omega^{2n-1} + \frac{4 \mp \sqrt{6}}{24}\,\varpi^{2n-1} + \frac{1}{3} \\ y_n^{\pm} &= \frac{4 \pm \sqrt{6}}{4\sqrt{6}}\,\omega^{2n-1} - \frac{4 \mp \sqrt{6}}{4\sqrt{6}}\,\varpi^{2n-1} - \frac{1}{2} \end{aligned}\right\} \quad n \in \mathbb{N}\,.$$

♣: I primi cinque esempi:

n	x_n	y_n	z_n
1	1	1	1
2	3	6	21
3	63	153	11781
4	261	638	203841
5	6141	15041	113123361

A3. $(\lambda, \mu) = (9, 3)$. Equazione ridotta e trasformazione

$$U^2 - 7V^2 = 18: \qquad \Omega'[9, 3] \begin{cases} x = \dfrac{U+5}{14} \\[2ex] y = \dfrac{V-1}{2}\,. \end{cases}$$

♠: Soluzione minima positiva della Pell associata: $(8, 3)$.
♢: Soluzioni fondamentali della ridotta: $(9, 3)$ e $(\pm 5, 1)$.
♡: Formule esplicite (ω, $\varpi = 8 \pm 3\sqrt{7}$):

$$\left.\begin{aligned} x_n &= \frac{9 + 3\sqrt{7}}{28}\,\omega^n + \frac{9 - 3\sqrt{7}}{28}\,\varpi^n + \frac{5}{14} \\ y_n &= \frac{9 + 3\sqrt{7}}{4\sqrt{7}}\,\omega^n - \frac{9 - 3\sqrt{7}}{4\sqrt{7}}\,\varpi^n - \frac{1}{2} \end{aligned}\right\} \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

♣: I primi cinque esempi:

n	x_n	y_n	z_n
1	1	1	1
2	10	25	325
3	154	406	82621
4	2449	6478	20985481
5	39025	103249	5330229625

A4. $(\lambda, \mu) = (6, 4)$. Equazione ridotta e trasformazione

$$U^2 - 2V^2 = 1: \qquad \Omega'[6, 4] \begin{cases} x = \dfrac{U+1}{4} \\ y = \dfrac{V}{2}. \end{cases}$$

♠: Soluzione minima positiva della Pell associata: $(3, 2)$.
♢: Soluzione fondamentale della ridotta: $(1, 0)$.
♡: Formule esplicite (ω, $\varpi = 3 \pm 2\sqrt{2}$):

$$\left.\begin{aligned} x_n &= \frac{\omega^{2n-1} + \varpi^{2n-1}}{8} + \frac{1}{4} \\ y_n &= \frac{\omega^{2n-1} - \varpi^{2n-1}}{4\sqrt{2}} \end{aligned}\right\} \quad n \in \mathbb{N}.$$

♣: I primi cinque esempi:

n	x_n	y_n	z_n
1	1	1	1
2	25	35	1225
3	841	1189	1413721
4	28561	40391	1631432881
5	970225	1372105	1882672131025

A5. $(\lambda, \mu) = (8, 4)$. Equazione ridotta e trasformazione

$$U^2 - 3V^2 = 1: \qquad \Omega'[8, 4] \begin{cases} x = \dfrac{U+1}{3} \\ y = V. \end{cases}$$

♠: Soluzione minima positiva della Pell associata: $(2, 1)$.
♢: Soluzione fondamentale della ridotta: $(1, 0)$.
♡: Formule esplicite (ω, $\varpi = 2 \pm \sqrt{3}$):

$$\left.\begin{aligned} x_n &= \frac{\omega^{2n-1} + \varpi^{2n-1}}{6} + \frac{1}{3} \\ y_n &= \frac{\omega^{2n-1} - \varpi^{2n-1}}{2\sqrt{3}} \end{aligned}\right\} \quad n \in \mathbb{N}.$$

♣: I primi cinque esempi:

n	x_n	y_n	z_n
1	1	1	1
2	9	15	225
3	121	209	43681
4	1681	2911	8473921
5	23409	40545	1643897025

A6. $(\lambda, \mu) = (9, 4)$. Equazione ridotta e trasformazione

$$U^2 - 14V^2 = 25: \qquad \Omega'[9,4] \begin{cases} x = \dfrac{U+5}{14} \\ y = \dfrac{V}{2}. \end{cases}$$

♠: Soluzione minima positiva della Pell associata: $(15, 4)$.
♢ Soluzioni fondamentali della ridotta: $(5, 0)$ e $(\pm 9, 2)$.
♡ Formule esplicite (ω, $475 = 15 \pm 4\sqrt{14}$):

$$\left.\begin{aligned} x_n^{\pm} &= \frac{9 \pm 2\sqrt{14}}{28}\,\omega^n + \frac{9 \mp 2\sqrt{14}}{28}\,\varpi^n + \frac{5}{14} \\ y_n^{\pm} &= \frac{9 \pm 2\sqrt{14}}{4\sqrt{14}}\,\omega^n - \frac{9 \mp 2\sqrt{14}}{4\sqrt{14}}\,\varpi^n \end{aligned}\right\} \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

♣: I primi cinque esempi:

n	x_n	y_n	z_n
1	1	1	1
2	2	3	9
3	18	33	1089
4	49	91	8281
5	529	989	978121

A7. $(\lambda, \mu) = (5, 6)$. Equazione ridotta e trasformazione

$$U^2 - 3V^2 = -2: \qquad \Omega'[5,6] \begin{cases} x = \dfrac{U+1}{6} \\ y = \dfrac{V+1}{4} \end{cases}.$$

♠: Soluzione minima positiva della Pell associata: $(2, 1)$.
◇: Soluzione fondamentale della ridotta: $(1, 1)$.
♡: Formule esplicite (ω, $\varpi = 2 \pm \sqrt{3}$):

$$\left.\begin{aligned} x_n &= \frac{5+3\sqrt{3}}{12}\,\omega^{4n} + \frac{5-3\sqrt{3}}{12}\,\varpi^{4n} + \frac{1}{6} \\ y_n &= \frac{5+3\sqrt{3}}{8\sqrt{3}}\,\omega^{4n} - \frac{5-3\sqrt{3}}{8\sqrt{3}}\,\varpi^{4n} + \frac{1}{4} \end{aligned}\right\} \qquad n \in \mathbb{N}.$$

♣: I primi cinque esempi:

n	x_n	y_n	z_n
1	1	1	1
2	165	143	40755
3	31977	27693	1533776805
4	6203341	5372251	57722156241751
5	1203416145	1042188953	2172315626468283465

A8. $(\lambda, \mu) = (7, 5)$. Equazione ridotta e trasformazione

$$U^2 - 15V^2 = 66: \qquad \Omega'[7,5] \begin{cases} x = \dfrac{U+9}{30} \\ y = \dfrac{V+1}{6} \end{cases}.$$

♠: Soluzione minima positiva della Pell associata: $(4, 1)$.
◇: Soluzioni fondamentali della ridotta: $(\pm 9, 1)$.

♡: Formule esplicite (ω, $\varpi = 4 \pm \sqrt{15}$):

$$\left.\begin{aligned} x_n &= \frac{9-\sqrt{15}}{60}\,\omega^{2n-1} + \frac{9+\sqrt{15}}{60}\,\varpi^{2n-1} + \frac{3}{10} \\ y_n &= \frac{9-\sqrt{15}}{12\sqrt{15}}\,\omega^{2n-1} - \frac{9+\sqrt{15}}{12\sqrt{15}}\,\varpi^{2n-1} + \frac{1}{6} \end{aligned}\right\} \quad n \in \mathbb{N}\,.$$

♣: I primi cinque esempi:

n	x_n	y_n	z_n
1	1	1	1
2	42	54	4347
3	2585	3337	16701685
4	160210	206830	64167869935
5	9930417	12820113	246532939589097

A9. $(\lambda, \mu) = (9, 5)$. Equazione ridotta e trasformazione

$$U^2 - 21\,V^2 = 204: \qquad \Omega'[9,5] \begin{cases} x = \dfrac{U+15}{42} \\[2ex] y = \dfrac{V+1}{6}\,. \end{cases}$$

♠: Soluzione minima positiva della Pell associata: $(55, 12)$.
◇: Soluzioni fondamentali della ridotta: $(\pm 15, 1)$, $(\pm 27, 5)$ e $(\pm 48, 10)$.
♡: Formule esplicite (ω, $\varpi = 55 \pm 12\sqrt{21}$):

$$\left.\begin{aligned} x_n^{\pm} &= \frac{5}{14} + \frac{(21 \pm 6) + (2 \pm 3)\sqrt{21}}{84}\,\omega^{2n+(1\mp 1)/2} \\ &\quad + \frac{(21 \pm 6) - (2 \pm 3)\sqrt{21}}{84}\,\varpi^{2n+(1\mp 1)/2} \\ y_n^{\pm} &= \frac{1}{6} + \frac{(21 \pm 6) + (2 \pm 3)\sqrt{21}}{12\sqrt{21}}\,\omega^{2n+(1\mp 1)/2} \\ &\quad - \frac{(21 \pm 6) - (2 \pm 3)\sqrt{21}}{12\sqrt{21}}\,\varpi^{2n+(1\mp 1)/2} \end{aligned}\right\} \quad n \in \mathbb{N}_0\,.$$

♣: I primi cinque esempi:

n	x_n	y_n	z_n
1	1	1	1
2	14	21	651
3	7189	10981	180868051
4	165026	252081	95317119801
5	86968201	132846121	26472137730696901

A10. $(\lambda, \mu) = (7, 6)$. Equazione ridotta e trasformazione

$$U^2 - 5V^2 = 4: \qquad \Omega'[7,6] \begin{cases} x = \dfrac{U+3}{10} \\ y = \dfrac{V+1}{4} \end{cases}.$$

♠: Soluzione minima positiva della Pell associata: $(9, 4)$.
♢: Soluzioni fondamentali della ridotta: $(2, 0)$ e $(\pm 3, 1)$.
♡: Formule esplicite (ω, $\varpi = 9 \pm 4\sqrt{5}$):

$$\left.\begin{aligned} x_n &= \frac{3-\sqrt{5}}{20}\,\omega^{2n-1} + \frac{3+\sqrt{5}}{20}\,\varpi^{2n-1} + \frac{3}{10} \\ y_n &= \frac{3-\sqrt{5}}{8\sqrt{5}}\,\omega^{2n-1} - \frac{3+\sqrt{5}}{8\sqrt{5}}\,\varpi^{2n-1} + \frac{1}{4} \end{aligned}\right\} \quad n \in \mathbb{N}.$$

♣: I primi cinque esempi:

n	x_n	y_n	z_n
1	1	1	1
2	221	247	121771
3	71065	79453	12625478965
4	22882613	25583539	1309034909945503
5	7368130225	8237820025	135723357520344181255

A11. $(\lambda, \mu) = (8, 6)$. Equazione ridotta e trasformazione

$$U^2 - 6V^2 = 10: \qquad \Omega'[8,6] \begin{cases} x = \dfrac{U+4}{12} \\ y = \dfrac{V+1}{4}. \end{cases}$$

♠: Soluzione minima positiva della Pell associata: $(5, 2)$.
◇: Soluzioni fondamentali della ridotta: $(\pm 4, 1)$.
♡: Formule esplicite (ω, $\varpi = 5 \pm 2\sqrt{6}$):

$$\left.\begin{aligned} x_n &= \frac{4-\sqrt{6}}{24}\,\omega^{2n-1} + \frac{4+\sqrt{6}}{24}\,\varpi^{2n-1} + \frac{1}{3} \\ y_n &= \frac{4-\sqrt{6}}{8\sqrt{6}}\,\omega^{2n-1} - \frac{4+\sqrt{6}}{8\sqrt{6}}\,\varpi^{2n-1} + \frac{1}{4} \end{aligned}\right\} \qquad n \in \mathbb{N}.$$

♣: I primi cinque esempi:

n	x_n	y_n	z_n
1	1	1	1
2	63	77	11781
3	6141	7521	113123361
4	601723	736957	1086210502741
5	58962681	72214241	10429793134197921

A12. $(\lambda, \mu) = (9, 6)$. Equazione ridotta e trasformazione

$$U^2 - 7V^2 = 18: \qquad \Omega'[9,6] \begin{cases} x = \dfrac{U+5}{14} \\ y = \dfrac{V+1}{4}. \end{cases}$$

♠: Soluzione minima positiva della Pell associata: $(8, 3)$.
◇: Soluzioni fondamentali della ridotta: $(\pm 5, 1)$ e $(9, 3)$.

♡: Formule esplicite (ω, $\varpi = 8 \pm 3\sqrt{7}$):

$$\left.\begin{aligned} x_n^{\pm} &= \frac{9 \pm 3\sqrt{7}}{28}\,\omega^{4n-3} + \frac{9 \mp 3\sqrt{7}}{28}\,\varpi^{4n-3} + \frac{5}{14} \\ y_n^{\pm} &= \frac{9 \pm 3\sqrt{7}}{8\sqrt{7}}\,\omega^{4n-3} - \frac{9 \mp 3\sqrt{7}}{8\sqrt{7}}\,\varpi^{4n-3} + \frac{1}{4} \end{aligned}\right\} \quad n \in \mathbb{N}\,.$$

♣: I primi cinque esempi:

n	x_n	y_n	z_n
1	1	1	1
2	10	13	325
3	39025	51625	5330229625
4	621946	822757	1353857339341
5	2517635809	3330519121	22184715227362706161

A13. $(\lambda, \mu) = (7, 8)$. Equazione ridotta e trasformazione

$$U^2 - 30V^2 = -39: \qquad \Omega'[7, 8]\left\{\begin{aligned} x &= \frac{U+9}{30} \\ y &= \frac{V+2}{6}\,. \end{aligned}\right.$$

♠: Soluzione minima positiva della Pell associata: $(11, 2)$.
◇: Soluzioni fondamentali della ridotta: $(\pm 9, 2)$.
♡: Formule esplicite (ω, $\varpi = 11 \pm 2\sqrt{30}$):

$$\left.\begin{aligned} x_n &= \frac{21 + 4\sqrt{30}}{60}\,\omega^{2n} + \frac{21 - 4\sqrt{30}}{60}\,\varpi^{2n} + \frac{3}{10} \\ y_n &= \frac{21 + 4\sqrt{30}}{12\sqrt{30}}\,\omega^{2n} - \frac{21 - 4\sqrt{30}}{12\sqrt{30}}\,\varpi^{2n} + \frac{1}{3} \end{aligned}\right\} \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

♣: I primi cinque esempi:

n	x_n	y_n	z_n
1	1	1	1
2	345	315	297045
3	166145	151669	69010153345
4	80081401	73103983	16032576845184901
5	38599068993	35235967977	3724720317758036481633

A14. $(\lambda, \mu) = (9, 7)$. Equazione ridotta e trasformazione

$$U^2 - 35V^2 = 310: \qquad \Omega'[9,7]\begin{cases} x = \dfrac{U+25}{70} \\ y = \dfrac{V+3}{10}. \end{cases}$$

♠: Soluzione minima positiva della Pell associata: $(6, 1)$.
♢: Soluzioni fondamentali della ridotta: $(\pm 25, 3)$.
♡: Formule esplicite (ω, $\varpi = 6 \pm \sqrt{35}$):

$$\left.\begin{aligned} x_n &= \frac{25-3\sqrt{35}}{140}\,\omega^{2n-1} + \frac{25+3\sqrt{35}}{140}\,\varpi^{2n-1} + \frac{5}{14} \\ y_n &= \frac{25-3\sqrt{35}}{20\sqrt{35}}\,\omega^{2n-1} - \frac{25+3\sqrt{35}}{20\sqrt{35}}\,\varpi^{2n-1} + \frac{3}{10} \end{aligned}\right\} \quad n \in \mathbb{N}.$$

♣: I primi cinque esempi:

n	x_n	y_n	z_n
1	1	1	1
2	88	104	26884
3	12445	14725	542041975
4	1767052	2090804	10928650279834
5	250908889	296879401	220343446399977901

B. - Appendice: programmi con mathematica

Riportiamo le principali macro generate con *Mathematica*, che ci hanno permesso di valutare in maniera pressochè immediata, le soluzioni fondamentali dell'equazione ridotta e la relativa trasformazione. In particolare, il comando **scheda** $[\lambda, \mu]$ mostra schematicamente tali risultati.

```
(* SQUARE - FREE - FACTORIZATION *)
pp[n_]:=Product [(Part[FactorInteger[n],k][[1]])
                ^(Mod[Part[FactorInteger[n],k][[2]],2]),
                 {k,1,Length[FactorInteger[n]]}]
qq[n_]:=Product [(Part[FactorInteger[n],k][[1]])
                ^((Part[FactorInteger[n],k][[2]]
            -Mod[Part[FactorInteger[n],k][[2]],2])/2),
                 {k,1,Length[FactorInteger[n]]]
```

```
(* PARAMETER - REPLACEMENTS *)
dd[m_]:=GCD[m-4,2m-4]
cc[m_,n_]:=GCD[(m-2) * (dd[n])^2,(n-2) * (dd[m])^2]
bb[m_,n_]:=(n-2) * (dd[m])^2/cc[m,n]
mm[m_,n_]:=(m-n) * (m * n-2m-2n)/cc[m,n]
PP[m_,n_]:=pp[bb[m,n]]
QQ[m_,n_]:=qq[bb[m,n]]
DD[m_,n_]:=PP[m,n] * PP[n,m]
nn[m_,n_]:=PP[m,n] * mm[m,n]

(* VARIABLE AND TRANSFORMATIONS *)
ff[m_,x_]:=x+(m-2) * x(x-1)/2
xx[m_,x_]:=x * (2m-4)/dd[m]-(m-4)/dd[m]
uv[{m_,n_},x_]:=xx[m,x] * PP[m,n] * QQ[m,n]
vu[{m_,n_},y_]:=xx[n,y] * QQ[n,m]
xy[{m_,n_},u_]:=(dd[m] * u+(m-4) * PP[m,n] * QQ[m,n])
                /((2m-4) * PP[m,n] * QQ[m,n])
yx[{m_,n_},v_]:=(dd[n] * v+(n-4) * QQ[n,m])/((2n-4) * QQ[n,m])

(* EQUATIONS ON THE NUMBERS OF REGULAR (p,q)-POLYGONS *)
eqnm[m_,n_]:=StringForm[""="",
                Factor[2 * ff[m,x]],Factor[2 * ff[n,y]]]
diof[m_,n_]:=StringForm[""-"=" dove X=" & Y="",
  bb[m, n]X^2,bb[n, m]Y^2,mm[m,n],xx[m,x],xx[n,y]]
pell[m_,n_]:=ColumnForm[StringForm[""-"="dove U="&V="",
  U^2,DD[m,n]V^2,nn[m,n],uv[{m,n},x],vu[{m,n},y]]}]
(* SOLUTIONS OF THE PELL (and generalized) EQUATIONS *)
minixx[m_,n_]:=Block [{k},ToExpression[For[k=1,
              IntegerQ[Sqrt[1+DD[m,n] * k^2]]==False,k=k+1];
                     Sqrt[1+DD[m,n] * k^2]]]
miniyy[m_,n_]:=Block [{k},ToExpression[For[k=1,
IntegerQ             [Sqrt[1+DD[m,n] * k^2]]==False,k=k+1];k]]
minima[m_,n_]:=Block [{k},ToExpression[For[k=1,
              IntegerQ[Sqrt[1+DD[m,n] * k^2]]==False,k=k+1];
                     {Sqrt[1+DD[m,n] * k^2],k}]]
fdp[m_,n_]:=Block[{k},Partition[Flatten[Table[
 If[IntegerQ[Sqrt[(k^2-nn[m,n])/DD[m,n]]],{k,
             Sqrt[(k^2-nn[m,n])/DD[m,n]]},{}],{k,1,
             Sqrt[nn[m,n] * (1+minixx[m,n])/2]}]],2]]
fdn[m_,n_]:=Block[{k},Partition[Flatten[Table[
 If[IntegerQ[Sqrt[(k^2-nn[m,n])/DD[m,n]]],
            {k,Sqrt[(k^2-nn[m,n])/DD[m,n]]},{}],
            {k,0,Sqrt[nn[m,n] * (1-minixx[m,n])/2]}]],2]]
```

```
(* CATALOGUE ON THE NUMBERS OF REGULAR (p,q)–POLYGONS *)
scheda[m_,n_]:=ColumnForm[{
    StringForm["Equazione dei (“,“)–numeri:“”,m,n,eqnm[m,n]],
    StringForm["Diofantea equazione:“”,diof[m,n]],
    StringForm["Pell equazione:“”,pell[m, n]],
SequenceForm ["Trasformazione inversa:","x=",xy[{m,n},U],
                " & ", "y = ",yx[{m,n},V]],
SequenceForm ["Soluzione minima positiva
                (",u^2–DD[m,n] * v^2,"=1):",minima[m,n]],
SequenceForm ["Soluzioni fondamentali positive:",
                 If[nn[m,n]>0,fdp[m,n],fdn[m,n]]]}]
```

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

[1] L. E. Dickson, *History of the Theory of Numbers: Volume II - Diophantine Analysis*, New York Stechert, 1934.

[2] G. H. Hardy - E. M. Wright, *An Introduction to the Theory of Numbers*, Oxford University Press, 1979.

[3] L. K. Hua, *Introduction to the Theory of Numbers*, Springer-Verlag, Berlin - New York, 1982.

[4] V. J. Leveque, *Topics in Number Theory*, Addison-Wesley, New York, 1956.

[5] K. Matthews, *The Diophantine equation* $x^2 - Dy^2 = N$, Expositiones Mathematicae, 18 (2000), 323-331.

[6] R. E. Mollin, *Fundamental Number Theory with Applications*, CRC Press, Boca Raton, 1998.

[7] R. E. Mollin, *Simple continued fraction solutions for Diophantine equations*, Expositiones Mathematicae, 19 (2001), 55-73.

[8] T. Nagell, *Introduction to Number Theory*, Chelsea Publishing Company, New York, 1981.

[9] I. Niven - H. S. Zuckerman - H. L. Montgomery, *An Introduction to the Theory of Numbers John Wiley & Sons*, New York, 1991.

[10] J. Robertson, *Solving the generalized Pell equation* $x^2 - Dy^2 = N$, Preprint, 2000-2002.

Direttore responsabile: Prof. A. Ballio - Autorizz. Trib. di Roma n. 7269 dell'8-12-1959
«Monograf» - Via Collamarini, 5 - Bologna