Rendiconti
Accademia Nazionale delle Scienze detta dei XL
Memorie di Matematica e Applicazioni
120° (2002), Vol. XXVI, fasc. 1, pagg. 35-53

MOHAMED EL KADIRI (*)

Morphismes finement biharmoniques (**)

RESUME. — Soit U un domaine fin de $\boldsymbol{R}^m$; un morphisme finement biharmonique de U dans $\boldsymbol{R}^n$ est un morphisme finement harmonique U dans $\boldsymbol{R}^n$ qui préserve les fonctions finement biharmoniques. Dans le présent article nous étudions cette notion et nous caractérisons, dans certains cas, les morphismes finement biharmoniques en termes de morphismes finement harmoniques de U dans $\boldsymbol{R}^n$ et des noyaux de couplage.

Morfismi finemente biarmonici

SUNTO. — Un morfismo finemento armonico di un dominio di $\boldsymbol{R}^m$ in $\boldsymbol{R}^n$ si dice finemente biarmonico se preserva le funzioni finemente biarmoniche. Nella presente memoria si studia questa nozione e la si caratterizza, in certi casi, per mezzo della nozione di nucleo di accoppiamento.

1. - INTRODUCTION

En théorie classique du Potentiel dans $\boldsymbol{R}^n$, la topologie fine est définie comme étant la moins fine des topologies rendant continues les fonctions surharmoniques dans $\boldsymbol{R}^n$. Cette topologie a été introduite en théorie classique du Potentiel par H. Cartan en 1940 et a ensuite été étendue au cadre des diverses théories axiomatiques du Potentiel par Brelot, Bauer et Constantinescu-Cornea.

Grâce à la théorie du balayage des mesures, Fuglede a développé dans [11] une théorie des fonctions finement harmoniques dans un ouvert fin (i.e., ouvert au sens de la topologie fine) d'un espace harmonique Ω vérifiant l'axiome de domination (en abrégé axiome (D)), généralisant la notion classique de fonction harmonique dans un ouvert ordinaire de Ω.

(*) Indirizzo dell'Autore: B.P. 726, Salé-Tabriquet, Salé, Maroc; e-mail: elkadiri@fsr.ac.ma
(**) Memoria presentata il 6 Agosto 2002 da Giorgio Letta, uno dei XL.

Les notions de topologie fine et de balayage des mesures ont été étendues par Smyrnelis dans le cadre de sa théorie axiomatique des fonctions biharmoniques. Cela permet de définir une notion de fonctions finement biharmoniques dans les ouverts fins d'un espace biharmonique de Smyrnelis ([22] et [23]) vérifiant l'axiome de domination. Cette notion a déjà fait l'objet d'un travail de l'auteur [9] dans le cas de l'espace biharmonique classique $\boldsymbol{R}^n$.

Rappelons que la théorie axiomatique des fonctions biharmoniques, inspirée par l'équation biharmonique classique, a été développée par Smyrnelis dans [22] et [23] et s'applique plus généralement à un opérateur obtenu par couplage de deux opérateurs différentiels L_1 et L_2 du second ordre elliptiques ou paraboliques dans un ouvert de $\boldsymbol{R}^n$. Dans cette théorie, un espace biharmonique est la donnée d'un espace localement compact muni d'un faisceau d'espaces vectoriels de couples de fonctions réelles continues vérifiant certains axiomes. A un tel espace sont associés deux espaces harmoniques. Beaucoup de résultats des théories classique ou axiomatique du Potentiel ont été étendus à ce cadre par Smyrnelis.

En théorie des espaces harmoniques, un problème intéressant est l'étude des applications entre espaces harmoniques qui préservent les structures harmoniques. Ces applications sont appelées des morphismes harmoniques.

La notion de morphisme harmonique a été introduite d'abord par Constantinescu et Cornea dans [3] comme une généralisation naturelle de la notion d'application holomorphe entre surfaces de Riemann; ensuite elle a été étendue par Fuglede au cadre des variétés riemaniennes dans [14]. Csink et Øksendal ([5] et [6]) ont donné une interprétation probabiliste de cette notion. L'étude des morphismes harmoniques a été étendue aux fonctions finement harmoniques par Fuglede [16] et Øksendal en a donné dans [21] une caractérisation stochastique.

Dans [10], nous avons introduit et étudié les morphismes biharmoniques, i.e. les applications préservant les structures biharmoniques, et nous avons montré en particulier que, sous certaines conditions, ce sont les morphismes harmoniques des espaces harmoniques associés à l'espace biharmonique de base qui agissent convenablement sur le noyau de couplage de ces espaces.

Dans le présent article nous étudions la notion de morphisme finement biharmonique dans le cas classique, i.e. les morphismes finement harmoniques d'un ouvert fin de $\boldsymbol{R}^m$ dans $\boldsymbol{R}^n$ qui préservent les fonctions finement biharmoniques, et nous obtenons des résultats analogues à ceux du cas biharmonique. Nous reviendrons à cette question dans un travail ultérieur pour une caractérisation stochastique des morphismes finement biharmoniques.

Nous avons considéré uniquement la théorie des fonctions biharmoniques au sens du Laplacien dans un ouvert Ω de l'espace $\boldsymbol{R}^d$, $d \geqslant 1$; dans un article ultérieur, nous reviendrons à l'extension au cadre général d'un espace biharmonique de Smyrnelis dont les espaces harmoniques associés vérifient les hypothèses de la théorie des fonctions finement harmoniques de Fuglede.

Les notations utilisées dans tout ce travail seront identiques à celles des travaux de

Fuglede et Smyrnelis cités dans la bibliographie. Pour distinguer les notions relatives à la topologie fine de celles relatives à la topologie initiale, on utilisera le mot fin (finement); on dira par exemple un domaine fin ou une fonction finement continue. Pour d'amples détails sur la théorie des fonctions finement harmoniques on renvoie à [11].

Le mot fonction signifiera toujours, sauf mention du contraire, fonction à valeurs dans $\overline{\boldsymbol{R}}$. Pour toute partie A de $\boldsymbol{R}^n$, on note $\overline{A}$ l'adhérence de A dans le compactifié d'Alexandroff de $\boldsymbol{R}^n$. Si (f_1, g_1) et (f_2, g_2) sont deux couples de fonctions sur un ensemble E, on adoptera les définitions suivantes concernant l'ordre produit usuel:

$$(f_1, g_1) \geqslant (f_2, g_2) \Leftrightarrow f_1 \geqslant f_2, \quad g_1 \geqslant g_2,$$

$$(f_1, g_1) > (f_2, g_2) \Leftrightarrow f_1 > f_2, \quad g_1 > g_2,$$

et on écrira tout simplement $(f, g) \geqslant 0$ (resp. $(f, g) > 0$) au lieu de $(f, g) \geqslant (0, 0)$ (resp. $(f, g) > (0, 0)$).

Tous les résultats de ce travail sont vrais pour les fonctions finement polyharmoniques d'ordre quelconque; nous n'avons considéré que le cas biharmonique pour des raisons de simplicité.

2. - Résultats préliminaires

Dans ce paragraphe nous allons faire quelques rappels sur la notion de couple finement hyperharmonique dans un ouvert fin de $\boldsymbol{R}^n$. Pour plus de détails sur cette notion on renvoie à [9].

Comme en théorie des espaces harmoniques, c'est la notion de balayée d'un couple de mesures qui permet de définir la notion de couples finement hyperharmoniques, surharmoniques ou harmoniques. A cet effet, nous rappelons le résultat suivant ([22], th. 7.11 et th. 7.12):

Théorème 2.1: *Soit $(X, \mathcal{H})$ un espace biharmonique fort au sens de Smyrnelis. Pour tout couple (μ, λ) de mesures de Radon positives sur X et toute partie E de X, il existe trois mesures de Radon positives μ^E, ν^E et λ^E sur X telles que, pour tout $\mathcal{H}$-potentiel $P = (p, q)$, on ait*

$$\int \widehat{P}_1^E \, d\mu = \int p \, d\mu^E + \int q \, d\nu^E,$$

$$\int \widehat{P}_2^E \, d\lambda = \int q \, d\lambda^E,$$

où $\widehat{P}^E = (\widehat{P}_1^E, \widehat{P}_2^E)$ est le couple balayé de P sur E.

Les mesures μ^E et λ^E ne sont autres que les balayées des mesures μ et λ relative-

ment aux espaces harmoniques associés à l'espace biharmonique $(X, \mathcal{H})$. Si ces espaces sont égaux comme dans le cas considéré ici, on a $\mu^E = \lambda^E$ dès que $\mu = \lambda$.

Lorsque $\mu = \lambda = \varepsilon_x$, $x \in X$, on notera les mesures μ^E, ν^E et λ^E correspondantes dans le théorème précédent par μ_x^E, ν_x^E et λ_x^E respectivement. Ce sont ces mesures qui permettent de définir les notions de couples finement harmoniques et finement hyperharmoniques.

Dans la suite on considère un domaine Ω de $\boldsymbol{R}^n$, $n \geqslant 1$, qu'on suppose borné si $n \leqslant 2$. On note $\mathcal{H}_\Delta$ le faisceau biharmonique défini sur Ω par le Laplacien:

$$\mathcal{H}_\Delta(\omega) = \{(u, v) \in [\mathcal{C}^2(\omega)]^2 : \Delta u = -v, \Delta v = 0\},$$

pour tout ouvert ω de Ω. Le couple $(\Omega, \mathcal{H}_\Delta)$ est un espace biharmonique dont les espaces harmoniques associés sont identiques à l'espace harmonique classique défini par l'opérateur de Laplace sur Ω.

On rappelle d'après [8] que l'espace biharmonique $(\boldsymbol{R}^n, \mathcal{H}_\Delta)$ est fort si et seulement si $n \geqslant 5$. Par contre, si Ω est un domaine borné de $\boldsymbol{R}^n$, l'espace $(\Omega, \mathcal{H}_\Delta)$ est fort pour tout $n \geqslant 1$. Dans toute la suite on suppose que l'espace biharmonique $(\Omega, \mathcal{H}_\Delta)$ est fort (on dit alors que Ω est un domaine fort). Les couples $\mathcal{H}_\Delta$-harmoniques, $\mathcal{H}_\Delta$-hyperharmoniques,..., seront tout simplement appelés couples harmoniques, hyperharmoniques,.... On note $\mathcal{U}_+(\Omega)$ le cône des couples hyperharmoniques $\geqslant 0$ dans Ω.

Pour tout ouvert fin $\omega \subset \Omega$, et tout $x \in \omega$, on a $\mu_x^{C\omega} = \lambda_x^{C\omega} = \varepsilon_x^{C\omega}$, où $\varepsilon_x^{C\omega}$ est la balayée de la mesure ε_x sur $C\omega$ dans l'espace harmonique classique associé au Laplacien dans Ω.

Pour tout ouvert fin ω on désigne par $\partial_f \omega$ la frontière fine de ω et par $\widetilde{\omega}$ son adhérence fine. Il est bien connu que, pour tout $x \in \omega$, la mesure $\varepsilon_x^{C\omega}$ est portée par $\partial_f \omega$. Nous allons montrer que les mesures $\nu_x^{C\omega}$, $x \in \omega$, sont également portées par $\partial_f \omega$.

On note G_Ω le noyau de Green de Ω normalisé de sorte que, pour tout $y \in \Omega$, on ait, au sens des distributions, $\Delta G_\Omega(., y) = -\varepsilon_y$, où ε_y est la mesure de Dirac au point y. Soit V le noyau borélien défini sur Ω par

$$V(f) = \int G_\Omega(., y)\, f(y)\, dy$$

pour toute fonction borélienne $f \geqslant 0$ sur Ω. Ce noyau possède les propriétés suivantes:

1. Pour toute fonction hyperharmonique $v \geqslant 0$ dans Ω, $V(v)$ est la fonction hyperharmonique pure d'ordre 2 associée à v, i.e., la plus petite fonction hyperharmonique $u \geqslant 0$ dans Ω telle que le couple (u, v) soit hyperharmonique.

2. Pour tout couple hyperharmonique $(u, v) \geqslant 0$ dans Ω, on a

$$V(v) \prec u,$$

i.e., il existe une fonction hyperharmonique $t \geqslant 0$ dans Ω telle que $u = V(v) + t$.

Ces deux propriéteés permettent de faire le calcul du couple balayé sur une partie A de Ω d'un couple hyperharmonique $\Phi = (u, v) \geqslant 0$ dans Ω au moyen du balayage relativement à l'espace harmonique défini par le Laplacien sur Ω.

Dans la suite, si s et t sont des fonctions surharmoniques $\geqslant 0$ dans Ω telles que $s \prec t$, on note $t - s$ la fonction surharmonique u telle que $t = u + s$.

On note $\mathcal{P}'(\Omega)$ l'ensemble des couples potentiels finis continus dans Ω, dont les fonctions hyperharmoniques pures d'ordre 2 associées sont finies et continues.

Lemme 2.2: *Pour toute fonction hyperharmonique $v \geqslant 0$ dans Ω, il existe une suite croissante (q_n) d'éléments de $\mathcal{P}'(\Omega)$ telle que $v = \sup_n q_n$.*

Démonstration: On sait que toute fonction hyperharmonique $\geqslant 0$ dans Ω est l'enveloppe supérieure d'une suite croissante de potentiels finis et continus dans Ω; il suffit donc de montrer que tout potentiel fini continu dans Ω est l'enveloppe d'une suite croissante d'éléments de $\mathcal{P}'(\Omega)$. Soient q un potentiel fini continu sur Ω et (p_0, q_0) un couple potentiel fini continu > 0 sur Ω. On a $q = \sup_n \min(q, nq_0)$ et $V(\min(q, nq_0) \prec np_0$ car le couple $(np_0, \min(q, nq_0))$ est surharmonique $\geqslant 0$ dans Ω, donc $\min(q, nq_0) \in \mathcal{P}'(\Omega)$.

Proposition 2.3: *Pour tout couple surharmonique $(s, t) \geqslant 0$ dans Ω et toute partie A de Ω, on a*

$$(\widehat{s, t})^A = (\widehat{R}^A_{s - V(\widehat{R}^A_t)} + V(\widehat{R}^A_t), \widehat{R}^A_t),$$

où $\widehat{R}^A_t$ est la balayée ordinaire de t sur A.

Démonstration: Remarquons d'abord que l'on a

$$(\widehat{s, t})^A = (\widehat{\inf}\{u : u \geqslant s \text{ dans } A, (u, \widehat{R}^A_t) \in \mathcal{U}_+(\Omega)\}, \widehat{R}^A_t).$$

Or, pour tout couple $(u, \widehat{R}^A_t) \in \mathcal{U}_+(\Omega)$, on a, d'après ce qui précède,

$$u = V(\widehat{R}^A_t) + r,$$

où r est une fonction hyperharmonique $\geqslant 0$ dans Ω. D'autre part, comme $(s, \widehat{R}^A_t) \in \mathcal{U}_+(\Omega)$, on a également

$$s = V(\widehat{R}^A_t) + k,$$

où k est une fonction surharmonique $\geqslant 0$ dans Ω. On en déduit que

$$(\widehat{s, t})^A = (V(\widehat{R}^A_t) + \widehat{R}^A_k, \widehat{R}^A_t).$$

Or on a $k = s - V(\widehat{R}^A_t)$, d'où le résultat.

Corollaire 1: *Pour tout couple surharmonique* (s, t) *dans* Ω *et toutes les parties* A *et* B *de* Ω *telles que* $A \subset B$, *on a*

$$(\widehat{(\widehat{s,t})^A})^B = (\widehat{s,t})^A.$$

Démonstration: On a

$$(\widehat{s,t})^B = (\widehat{R}_{s - V(\widehat{R}_t^B)} + V(\widehat{R}_t^B), \widehat{R}_t^B).$$

En utilisant les relations bien connues $\widehat{R}^B_{\widehat{R}^A_u} = \widehat{R}^A_u$ et $\widehat{R}^B_{\widehat{R}^A_v} = \widehat{R}^A_v$ pour u et v hyperharmoniques $\geqslant 0$, on obtient

$$(\widehat{(\widehat{s,t})^B})^A = (\widehat{s,t})^A.$$

Corollaire 2: *Soient* ω *un ouvert fin de* Ω *tel que* $\tilde{\omega} \subset \Omega$ *et* $x \in \omega$. *Alors la mesure* ν_x^ω *est portée par* $b(C\omega)$, *la base de* $C\omega$ (*voir* [11], *chap.* 1).

Démonstration: Soit $x \in \omega$. D'après le théorème 2.1, on a, pour tout potentiel $P = (p, q)$ dans Ω,

$$\widehat{P}_1^{C\omega}(x) = \int p d\varepsilon_x^{C\omega} + \int q d\nu_x^{C\omega}.$$

Comme $\widehat{\widehat{P}^{C\omega}}^{C\omega} = \widehat{P}^{C\omega}$ d'après le lemme précédent, on a aussi, toujours d'après le théorème 2.1,

$$\widehat{P}_1^{C\omega}(x) = \int \widehat{P}_1^{C\omega} d\varepsilon_x^{C\omega} + \int \widehat{P}_2^{C\omega} d\nu_x^{C\omega}.$$

Comme $\widehat{P}_2^{C\omega} = \widehat{R}_q^{C\omega}$, on en déduit alors que

$$\int (q - \widehat{R}_q^{C\omega})\, d\nu_x^{C\omega} = 0\,,$$

soit

$$\int q d\nu_x^{C\omega} = \int \widehat{R}_q^{C\omega} d\nu_x^{C\omega},$$

pour tout $q \in \mathcal{P}'(\Omega)$. D'où, d'après le lemme 2.2,

$$\int q d\nu_x^{C\omega} = \int \widehat{R}_q^{C\omega} d\nu_x^{C\omega}$$

pour tout potentiel q, ce qui montre bien que $\nu_x^{C\omega}$ est portée par $b(C\omega)$.

Comme $b(C\omega) \subset \partial_f \omega$, on voit donc que, pour tout $x \in \omega$, la mesure $\nu_x^{C\omega}$ est portée par $\partial_f \omega$.

Proposition 2.4: *Soit* ω *un ouvert fin tel que* $\tilde{\omega} \subset \Omega$. *Alors, pour tout* $x \in \omega$, *la mesure* $\nu_x^{C\omega}$ *ne charge pas les ensembles polaires.*

DÉMONSTRATION: Soit $x \in \omega$. Comme la mesure $\nu_x^{C\omega}$ est portée par $\partial_f \omega$, il suffit de montrer que $\nu_x^{C\omega}$ ne charge pas les polaires contenus dans $\partial_f \omega$. Soit A un ensemble polaire $\subset \partial_f \omega$, on peut trouver un couple potentiel $P = (p, q)$ dans Ω avec $p = q = +\infty$ sur A et $p(x) + q(x) < +\infty$. On a alors $\int q d\nu_x^{C\omega} \leqslant p(x) < +\infty$, d'où le résultat.

Dans toute la suite, f-lim et f-lim inf désigneront respectivement les limites fine et fine inférieure, c'est-à-dire au sens de la topologie fine. Pour un couple $F = (u, v)$ de fonctions sur un ouvert fin U de Ω, on note $\text{f-}\liminf_{x \to y} F(x)$ le couple $(\text{f-}\liminf_{x \to y} u(x), \text{f-}\liminf_{x \to y} v(x))$.

On rappelle d'abord qu'une fonction u sur un ouvert fin U de Ω est dite finement hyperharmonique dans U si u est finement s.c.i., à valeurs dans $]-\infty, +\infty]$, et si, pour tout ouvert fin relativement compact ω tel que $\overline{\omega} \subset U$, sur lequel u est bornée inférieurement, et tout $x \in \omega$, on a

$$u(x) \geqslant \int^* u d\varepsilon_x^{C\omega}.$$

DÉFINITION 2.5: *Un couple (u, v) de fonctions sur un ouvert fin U de Ω est dit finement hyperharmonique dans U si u et v sont finement s.c.i. à valeurs dans $]-\infty, +\infty]$, et si, pour tout ouvert fin relativement compact ω tel que $\overline{\omega} \subset U$, u et v bornées inférieurement sur ω, et tout $x \in \omega$, on a*

$$u(x) \geqslant \int^* u d\varepsilon_x^{C\omega} + \int^* v d\nu_x^{C\omega}, \quad v(x) \geqslant \int^* v d\varepsilon_x^{C\omega}.$$

REMARQUE: Les intégrales $\int^* u d\varepsilon_x^{C\omega}$, $\int^* v d\nu_x^{C\omega}$ et $\int^* v d\varepsilon_x^{C\omega}$ ont bien un sens puisque les mesures ε_x^{CU} et ν_x^{CU} sont portées par $\partial_f \omega$ et ne chargent pas les polaires.

Un couple (u, v) de fonctions sur un ouvert fin U de Ω est dit finement hypoharmonique dans U si le couple $(-u, -v)$ est finement hyperharmonique dans U.

On note $\mathcal{U}_f(U)$ l'ensemble des couples finement hyperharmoniques dans un ouvert fin U de Ω, et $\mathcal{U}_f^+(U)$ celui des couples finement hyperharmoniques $\geqslant 0$ dans U. Il résulte aussitôt de la définition 2.5 que $\mathcal{U}_f^+(U)$ est un cône convexe de sommet 0.

DÉFINITION 2.6: *Un couple (u, v) de fonctions sur un ouvert fin U de Ω à valeurs dans $\mathbf{R}$ est dit finement harmonique dans U s'il est à la fois finement hyperharmonique et finement hypoharmonique dans U.*

Ainsi, un couple finement biharmonique dans un ouvert fin U de Ω est un couple (u, v) de fonctions finies, finement continues sur U, qui vérifient les formules de la moyenne:

$$u(x) = \int u d\varepsilon_x^{C\omega} + \int v d\nu_x^{C\omega}, \quad v(x) = \int v d\varepsilon_x^{C\omega},$$

pour tout ouvert fin relativement compact $\omega \subset \overline{\omega} \subset U$, sur lequel u et v sont bornées, et tout $x \in \omega$.

En adaptant les techniques de la théorie des fonctions finement harmoniques, on démontre, comme dans [11] (cf. th. 9.4), le

THÉORÈME 2.7: *Un couple (u, v) de fonctions finement s.c.i. sur un ouvert fin U de Ω, à valeurs dans $]-\infty, +\infty]$, est finement hyperharmonique dans U si, et seulement si, la topologie fine induite sur U admet une base $\mathcal{B}$ formée d'ouvert fins ω tels que $\widetilde{\omega} \subset U$ et*

$$u(x) \geqslant \int^* u d\varepsilon_x^{C\omega} + \int^* v d\nu_x^{C\omega}, \quad v(x) \geqslant \int^* v d\varepsilon_x^{C\omega}$$

pour tout $x \in \omega$.

On déduit du théorème 2.7 les propriétés suivantes des couples finement hyperharmoniques:

1. L'ensemble $\mathcal{U}_f(U)$ est un cône convexe de sommet 0.

2. Si U_1 et U_2 sont des ouverts fins de Ω tels que $U_1 \subset U_2$ et si $F = (u, v) \in \mathcal{U}_f(U_2)$, alors $F|_{U_1} = (u|_{U_1}, v|_{U_1}) \in \mathcal{U}_f(U_1)$.

3. Si $(U_i)_{i \in I}$ est une famille d'ouverts fins de Ω et si F est un couple de fonctions sur $U = \bigcup_{i \in I} U_i$ tel que $F|U_i \in \mathcal{U}_f(U_i)$ pour tout $i \in I$, alors $F \in \mathcal{U}_f(U)$.

Ces propriétés, vraies aussi pour les couples finement biharmoniques, permettent, quitte à se restreindre aux composantes finement connexes de l'ouvert fin U, de se ramener au cas où U est un domaine fin (que l'on fixera dans la suite de ce paragraphe et du suivant). On rappelle que la topologie fine est localement connexe (voir [11], cor. du th. 9.11). Quitte à ajouter à U l'ensemble polaire des points irréguliers de sa frontière fine, on le supposera, grâce au principe de prolongement par continuité fine, régulier (donc un K_σ de Ω).

DÉFINITION 2.8: *Un couple (u, v) finement hyperharmonique dans U est dit finement surharmonique dans U si les fonctions u et v sont finies sur un ensemble finement dense dans U.*

Il n'est pas difficile de voir que, d'après ([11], th. 12.9), pour qu'un couple $(u, v) \in \mathcal{U}_f(U)$ soit finement surharmonique, il faut et il suffit que les fonctions u et v soient finies en au moins un point de U.

On note aussi $\mathcal{S}_f^+(U)$ le cône des couples finement surharmoniques $\geqslant 0$ dans U, et $\mathcal{S}_f^{1,+}(U)$ celui des fonctions finement surharmoniques $\geqslant 0$ dans U.

DÉFINITION 2.9: *Un couple* $P = (p_1, p_2) \in \mathcal{S}_f^+(U)$ *est appelé potentiel fin si tout couple* (u, v) *finement hypoharmonique dans* U *qui le minore au sens de l'ordre naturel produit est* $\leqslant 0$.

On note $\mathcal{P}_f(U)$ l'ensemble des couples potentiels fins dans U. Alors $\mathcal{P}_f(U)$ est un sous-cône de $\mathcal{S}_f^+(U)$. C'est même une bande de $\mathcal{S}_f^+(U)$, i.e.,

$$\forall P, Q \in \mathcal{S}_f^+(U) : P + Q \in \mathcal{P}_f(U) \Rightarrow P, Q \in \mathcal{P}_f(U).$$

Comme en théorie des fonctions finement harmoniques, un couple $H \in \mathcal{S}_f^+(U)$ sera dit invariant s'il est orthogonal pour l'ordre spécifique à la bande des couples potentiels fins. On note $\mathcal{H}_i(U)$ l'ensemble des couples invariants; $\mathcal{H}_i(U)$ est un sous-cône de $\mathcal{S}_f^+(U)$. C'est aussi une bande de $\mathcal{S}_f^+(U)$. On a donc:

$$\forall S \in \mathcal{S}_f^+(U), \exists!\, P \in \mathcal{P}_f(U), \exists!\, H \in \mathcal{H}_i(U) : S = P + H.$$

Il est clair que tout couple finement biharmonique est invariant, mais la réciproque est fausse en général. En effet, si h est une fonction invariante dans U qui n'est pas finement harmonique, le couple $(h, 0)$ est invariant, mais il n'est pas finement biharmonique.

3. - COUPLES FINEMENT HYPERHARMONIQUES PURS

Comme en théorie des fonctions biharmoniques, la notion de fonction finement hyperharmonique pure d'orde 2 associée à une fonction finement hyperharmonique $\geqslant 0$ joue un rôle fondamental.

PROPOSITION 3.1: ([9], Proposition 7.1) *Soit* v *une fonction finement hyperharmonique* $\geqslant 0$ *dans un ouvert fin* ω *de* Ω. *Alors la fonction*

$$u_0 = \widehat{\inf}\{u \geqslant 0 ; (u, v) \in \mathcal{U}_f^+(\omega)\}$$

est finement hyperharmonique dans ω *et l'on a* $(u_0, v) \in \mathcal{U}_f^+(\omega)$.

Comme en théorie des fonctions biharmoniques, nous adoptons la définition suivante:

DÉFINITION 3.2: *La fonction* u_0 *de la proposition précédente est appelée la fonction finement hyperharmonique pure d'ordre 2 associée à* v *dans* ω.

Soit $(u, v) \in \mathcal{U}_f^+(U)$; on dit que (u, v) est pur si u est la fonction finement hyperharmonique pure d'ordre 2 associée à v.

REMARQUE: Si (u, v) est un couple finement surharmonique pur dans U, alors u est un potentiel fin. En effet, si w est une minorante finement hyporharmonique de u dans

U, alors le couple $(u-w, v)$ est finement hyperharmonique $\geqslant 0$ dans U, de sorte que $u-w \leqslant u$ et, par suite, $w \leqslant 0$.

Pour alléger les écritures, on notera dans la suite $V_0(v)$ la fonction finement hyperharmonique d'ordre 2 associée à une fonction finement hyperharmonique $v \geqslant 0$ dans U. Cette notation sera justifiée par la suite (th. 3.5).

Proposition 3.3: ([9], Proposition 7.4) *Soient v_1 et v_2 deux fonctions finement hyperharmoniques $\geqslant 0$ dans U. Alors, si $v_1 \leqslant v_2$, on a $V_0(v_1) \leqslant V_0(v_2)$.*

Proposition 3.4: ([9], Proposition 7.5) *Soit $(s_1, s_2) \in \mathcal{S}_f^+(U)$. On a alors $V_0(s_2) \prec s_1$, i.e. il existe $t \in \mathcal{S}_f^{1,+}(U)$ tel que $V_0(s_2) + t = s_1$.*

On note G_U le noyau de Green fin de U. On rappelle que G_U est défini par

$$G_U(x, y) = [G_\Omega(.\,, y) - \widehat{R}^{CU}_{G_\Omega(.\,, y)}](x), \ \forall x, y \in U,$$

où la fonction entre crochets est prolongée par continuité fine au point y et où $CU = \Omega \backslash U$.

Pour tout $y \in U$, la fonction $G_U(.\,, y) : x \mapsto G_U(x, y)$ est un potentiel fin finement harmonique dans $U \backslash \{y\}$, et tout potentiel fin vérifiant cette propriété est proprtionnel à $G_U(.\,, y)$ (voir [12]).

Il résulte aussitôt de la définition de G_U que, pour tout $x \in U$, la fonction $y \mapsto G_U(x, y)$ est borélienne sur U. Soit V_U le noyau borélien sur U défini par

$$V_U f(x) = \int G_U(x, y)\, f(y)\, dy$$

pour toute fonction borélienne $f \geqslant 0$ sur U. On remarquera que si $U = \Omega$, alors $V_U = V$.

Théorème 3.5: ([9], Théorème 7.13) *Pour toute fonction finement hyperharmonique $v \geqslant 0$ dans U, $V_U(v)$ est la fonction hyperharmonique pure d'ordre 2 associée à v.*

Soit (p, q) un couple finement surharmonique pur fini dans U, avec $q > 0$. D'après le théorème 3.5, on a

$$p(x) = V_U(q)(x) = \int G_U(x, y)\, q(y)\, dy, \quad \forall x \in U.$$

Notons $\mathcal{V}$ le noyau borélien sur U défini par

$$\mathcal{V} f(x) = \int G_U(x, y)\, q(y)\, f(y)\, dy, \quad \forall x \in U,$$

pour toute fonction borélienne $f \geqslant 0$ sur U. Si v est une fonction finement hyperharmonique $\geqslant 0$ dans U, on a

$$V_U(v) = \int G_U(.\,, y)\, v(y)\, dy = \mathcal{V}(v/q). \tag{1}$$

Nous terminons ce paragraphe par le lemme suivant qui sera utile dans la suite:

LEMME 3.6: *Soient* (u, v) *un couple finement hyperharmonique pur dans* U *et* (U_n) *une suite croissante d'ouverts fins recouvrant* U. *Pour tout* n, *soit* u_n *la fonction hyperharmonique pure d'ordre 2 associée à* v *dans* U_n. *Alors on a* $u = \sup_n u_n$.

DÉMONSTRATION: Pour tout n, le couple (u, v) est finement hyperharmonique dans U_n, donc $u \geqslant u_n$. D'où $u \geqslant \sup_n u_n$. D'autre part, il n'est pas difficile de vérifier que, si $n \geqslant m$, alors $u_n \geqslant u_m$ dans U_m, de sorte que le couple $(\sup_n u_n, v) = \sup_n (u_n, v)$ est finement hyperharmonique dans tout ouvert U_n, donc dans U. On en déduit que $\sup_n u_n \geqslant$ $\geqslant u$. Le lemme est démontré.

4. - MORPHISMES FINEMENT BIHARMONIQUES

Soit U un domaine fin de $\boldsymbol{R}^m$, qu'on suppose borné si $m \leqslant 5$.

DÉFINTION 4.1: *On appelle morphisme finement biharmonique de* U *dans* $\boldsymbol{R}^n$, $n \geqslant 1$, *toute application finement continue* φ *de* U *dans* $\boldsymbol{R}^n$ *telle que, pour tout ouvert fin* ω *de* $\boldsymbol{R}^n$ *et tout couple finement hyperharmonique* (u, v) *dans* ω, *le couple* $(u \circ \varphi, v \circ \varphi)$ *soit finement hyperharmonique dans* $\varphi^{-1}(\omega)$.

On rappelle qu'un morphisme finement harmonique de U dans $\boldsymbol{R}^n$ est une application finement continue φ de U dans $\boldsymbol{R}^n$ telle que, pour tout ouvert fin ω de $\boldsymbol{R}^n$ et toute fonction finement hyperharmonique u dans ω, la fonction $u \circ \varphi$ soit finement hyperharmonique dans $\varphi^{-1}(\omega)$.

Il résulte de la définition 4.1. que si (h, k) est un couple biharmonique dans un ouvert fin ω de $\boldsymbol{R}^n$, alors le couple $(h \circ \varphi, k \circ \varphi)$ est biharmonique dans $\varphi^{-1}(\omega)$.

Comme dans [16], on démontre de la même manière le

THÉORÈME 4.2: *Soit* φ *une fonction finement continue de* U *dans* $\boldsymbol{R}^n$. *Alors* φ *est un morphisme finement biharmonique si et seulement si, pour tout ouvert fin* ω *de* $\boldsymbol{R}^n$ *et tout couple finement harmonique* (h, k) *dans* ω, *le couple* $(u \circ \varphi, v \circ \varphi)$ *est finement biharmonique dans* $\varphi^{-1}(\omega)$.

PROPOSITION 4.3: *Si* φ *est un morphisme finement biharmonique de* U *dans* $\boldsymbol{R}^n$, *alors* φ *est un morphisme finement harmonique de* U *dans* $\boldsymbol{R}^n$.

DÉMONSTRATION: Soient ω un ouvert de $\boldsymbol{R}^n$ et u une fonction finement hyperharmonique dans ω; alors le couple $(u, 0)$ est finement hyperharmonique dans ω, donc le couple $(u \circ \varphi, 0)$ est finement hyperharmonique dans $\varphi^{-1}(\omega)$, de sorte que $u \circ \varphi$ est finement hyperharmonique dans $\varphi^{-1}(\omega)$, d'où le résultat.

La réciproque de la proposition précédente est fausse en général comme le montrent les contre-exemples suivants, empruntés de [10]:

1. Il est bien connu d'après [16] que les morphismes harmoniques d'un domaine D de $\boldsymbol{R}^2 = \boldsymbol{C}$ dans $\boldsymbol{C}$, D muni de sa structure classique d'espace harmonique définie par le Laplacien, sont exactement les fonctions $\varphi : D \to \boldsymbol{C}$ telles que φ ou $\overline{\varphi}$ soit holomorphe. En particulier, les fonctions constantes sont des morphismes finement harmoniques de $\boldsymbol{C}$ dans lui-même. Cependant, il est facile de vérifier que ce ne sont pas des morphismes finement biharmoniques.

Plus généralement, les fonctions constantes $\varphi : U \to \boldsymbol{R}^n$ ne sont pas des morphismes finement biharmoniques, autrement dit, un morphisme finement biharmonique $\varphi : U \to \boldsymbol{R}^n$ ne peut pas être constant, et, par conséquent, $\varphi(U)$ est, d'après [16], un ouvert fin de $\boldsymbol{R}^n$. Ces morphismes peuvent paraître triviaux; nous allons donner un autre exemple, celui-ci non trivial.

2. Soit B la boule unité de $\boldsymbol{C}$, et soit f: $B \to B$ définie par $f(z) = z^2$. On vérifie aisément que le couple (u, v) de fonctions définies sur B par

$$u(z) = \frac{3}{16} + \frac{1}{16}|z|^4 - \frac{1}{4}|z|^2$$

et

$$v(z) = 1 - |z|^2$$

est un couple surharmonique pur. La fonction $v \circ f$ est surharmonique car f est holomorphe (donc un morphisme harmonique). D'autre part, on a

$$u \circ f(z) = \frac{3}{16} + \frac{1}{16}|z|^8 - \frac{1}{4}|z|^4,$$

et un calcul élémentaire donne

$$\Delta[u \circ f](z) = 4|z|^6 - 4|z|^2,$$

mais on n'a pas $\Delta[u \circ f] \leqslant -v \circ f$, comme on peut le voir en prenant $|z|$ voisin de 0, et par suite le couple $(u \circ f, v \circ f)$ n'est pas hyperharmonique. Comme les fonctions $u \circ f$ et $v \circ f$ sont bornées sur B, on en déduit d'après ([9], th. 7.14) que le couple $(u \circ f, v \circ f)$ n'est pas finement hyperharmonique.

Ces exemples montrent que la condition de la proposition précédente ne caractérise pas les morphismes finement biharmoniques. Il faut encore une condition supplémentaire liée aux noyaux de couplage V_U et $V_{\varphi(U)}$ (lorsque $\varphi(U)$ est contenu dans un domaine fort de $\boldsymbol{R}^n$ ou $n \geqslant 5$). Rappelons que, d'après [15], l'image d'un ouvert fin de U par un morphisme finement harmonique non constant de U sur $\boldsymbol{R}^n$ est un ouvert fin de $\boldsymbol{R}^n$. Il résulte alors de la proposition précédente

et de l'exemple 1 ci-dessus, que l'image de U par un morphisme finement biharmonique de U dans $\boldsymbol{R}^n$ est un ouvert fin de $\boldsymbol{R}^n$.

THÉORÈME 4.4: *Soit φ un morphisme finement biharmonique de U dans $\boldsymbol{R}^n$. Supposons qu'il existe un couple finement surharmonique pur $(p_0, q_0) > 0$ dans $\varphi(U)$ tel que $(p_0 \circ \varphi, q_0 \circ \varphi)$ soit un couple pur dans U. Alors, pour tout couple finement hyperharmonique pur $(u, v) \geqslant 0$ dans $\varphi(U)$, le couple $(u \circ \varphi, v \circ \varphi)$ est finement hyperharmonique pur sur U.*

DÉMONSTRATION: Posons $(p, q) = (p_0 \circ \varphi, q_0 \circ \varphi)$, alors p et p_0 sont des potentiels fins (voir remarque suivant la définition 3.2). On a

i) $V_U q = p$ et $V_{\varphi(U)} q_0 = p_0$ d'après le théorème 3.5,

ii) $V_U f$ (resp. $V_{\varphi(U)} f$) est finement harmonique dans $U \setminus \operatorname{Supp}_f(f)$ (resp. $\varphi(U) \setminus \operatorname{Supp}_f(f)$), pour toute fonction borelienne f sur U (resp. $\boldsymbol{R}^m$), où $\operatorname{Supp}_f(f)$ est le support fin de f.

Considérons maintenant les opérateurs W_1 et W_2 définis sur l'ensemble des fonctions boréliennes bornées $\geqslant 0$ sur $\varphi(U)$ par $W_1 g = V_U(g \circ \varphi)$ et $W_2 g = (V_{\varphi(U)} g) \circ \varphi$. Alors on a, en combinant le théorème 8.1.1 et l'exercice 8.1.1 de [4], $W_1 = W_2$. En particulier, si (u, v) est un couple pur, on a $W_1(v/q_0) = W_2(v/q_0)$, soit $V_U((v \circ \varphi)/q) = (V_{\varphi(U)}(v/q_0)) \circ \varphi$, d'où le résultat d'après la formule (1).

Nous terminons ce paragraphe par un résultat sur l'action des morphismes finement biharmoniques sur les couples invariants:

THÉORÈME 4.5: *Soit φ un morphisme biharmonique fin de U dans $\boldsymbol{R}^n$. Alors, pour tout couple invariant $H = (h, k)$ sur un ouvert fin ω de $\boldsymbol{R}^n$ contenu dans $\varphi(U)$, le couple $H \circ \varphi = (h \circ \varphi, k \circ \varphi)$ est invariant dans $\varphi^{-1}(\omega)$.*

DÉMONSTRATION: En effet, H est quasi partout égal l'enveloppe supérieure des couples finement hypoharmoniques qui le minorent, d'où le résultat puisque pour tout couple finement hypoharmonique (u, v) minorant H, le couple $(u \circ \varphi, v \circ \varphi)$ est finement hypoharmonique et minore $H \circ \varphi$ et que l'image réciproque par φ d'un polaire est polaire (sinon l'image de U par φ serait polaire, ce qui est absurde car φ est non constante).

5. - CARACTÉRISATION DE CERTAINS MORPHISMES BIHARMONIQUES.

LEMME 5.1: *Soit h une fonction finement harmonique bornée dans un ouvert fin ω borné de $\boldsymbol{R}^n$ telle que* $\text{f-}\lim_{x \in \omega,\, x \to \xi} h(x) = 0$ pour tout $\xi \in \partial_f \omega$. Alors $h = 0$ dans ω.

DÉMONSTRATION: D'après les hypothèses, on peut trouver un ouvert borné Ω de $\boldsymbol{R}^n$

tel que $\overline{\omega} \subset \Omega$ et un potentiel $p > 0$ fini continu dans Ω tel que $|h| \leqslant p$ dans ω. Appliquant le principe du minimum fin ([11], th. 10.8) à h et $-h$, on obtient le résultat cherché.

LEMME 5.2: *Soient ω un ouvert fin régulier de $\boldsymbol{R}^m$, $\overline{\omega} \subset \boldsymbol{R}^m$, k une fonction finement harmonique > 0 dans un ouvert fin contenant $\overline{\omega}$ et h'_ω la fonction finement hyperharmonique pure d'ordre 2 associée à k dans ω. Alors $\lim_{x \to \xi} h'_\omega(x) = 0$ pour tout $\xi \in \partial_f \omega$.*

DÉMONSTRATION: Il est facile de vérifier que le couple (h'_ω, k) n'est rien d'autre que la solution du problème de Riquier fin dans ω pour la donnée frontière $(0, k|_{\partial\omega})$, d'où le résultat d'après ([9], th. 9.2).

Dans toute la suite, U est un domaine fin régulier de $\boldsymbol{R}^m$ et n est un entier $\geqslant 1$.

THÉORÈME 5.3: *Soit φ un morphisme finement biharmonique de U dans $\boldsymbol{R}^n$ tel que $\overline{\varphi^{-1}(K)} \subset U$ pour tout compact K de $\boldsymbol{R}^n$ contenu dans $\varphi(U)$. Alors, pour tout ouvert fin régulier ω relativement compact de $\boldsymbol{R}^n$ tel que $\overline{\omega} \subset \varphi(U)$ et tout couple pur (u, v) dans ω, le couple $(u \circ \varphi, v \circ \varphi)$ est pur dans $\varphi^{-1}(\omega)$.*

DÉMONSTRATION: Soit ω un ouvert fin régulier relativement compact de $\boldsymbol{R}^n$ tel que $\overline{\omega} \subset \varphi(U)$. Soit k la fonction constante égale à 1 dans $\varphi(U)$. Alors la fonction finement hyperharmonique pure h'_ω associée à k dans ω est un potentiel fin dans ω et le couple (h'_ω, k) est finement biharmonique dans ω ([9], prop. 7.3). Notons h_1 la fonction hyperharmonique pure d'ordre 2 associée à $k \circ \varphi$. En veru de la proposition 4.3, le couple $(h'_\omega \circ \varphi, k \circ \varphi)$ est finement biharmonique $\geqslant 0$ dans $\varphi^{-1}(\omega)$, donc on a $h'_\omega \circ \varphi \geqslant h_1$. D'autre part, la fonction $h'_\omega \circ \varphi - h_1$ est finement harmonique dans $\varphi^{-1}(\omega)$ et l'on a

$$\mathrm{f}-\liminf_{x \in \varphi^{-1}(\omega),\, x \to \xi} (h'_\omega \circ \varphi - h_1)(x) = 0$$

pour tout $\xi \in \partial_f[\varphi^{-1}(\omega)]$, car $\overline{\varphi^{-1}(\omega)} \subset U$ d'après les hypothèses du théorème. La fonction $h'_\omega \circ \varphi - h_1$ est finement harmonique et bornée dans $\varphi^{-1}(\omega)$; on en déduit, en vertu du lemme 5.1, que $h'_\omega \circ \varphi - h_1 = 0$ dans $\varphi^{-1}(\omega)$; autrement dit, le couple $(h'_\omega \circ \varphi, k \circ \varphi)$ est pur. Il en résulte, d'après le théorème 4.4, que, pour tout couple pur (u, v) dans ω, le couple $(u \circ \varphi, v \circ \varphi)$ est pur dans $\varphi^{-1}(\omega)$.

COROLLAIRE: *Soit φ un morphisme finement biharmonique de U dans $\boldsymbol{R}^n$ tel que $\overline{\varphi^{-1}(K)} \subset U$ pour tout compact K de $\boldsymbol{R}^n$ contenu dans $\varphi(U)$. Alors, pour tout couple pur (u, v) dans $\varphi(U)$, le couple $(u \circ \varphi, v \circ \varphi)$ est pur.*

DÉMONSTRATION: Soit (ω_n) une suite croissante d'ouverts fins réguliers relativement compacts recouvrant $\varphi(U)$ et tels que $\overline{\omega}_n \subset \varphi(U)$ pour tout n, et soit (u, v) un couple pur dans $\varphi(U)$. Pour tout n, notons u_n la fonction hyperharmonique pure d'ordre 2 associée à v dans U_n. On a alors $u = \sup_n u_n$, d'où $u \circ \varphi = \sup_n u_n \circ \varphi$. Comme les

couples $(u_n \circ \varphi, v_n \circ \varphi)$ sont purs d'après le théoème précèdent, il résulte du lemme 3.6 que le couple $(u \circ \varphi, v \circ \varphi)$ est pur.

En adaptant la démonstration du théorème 9.9 de [11] aux couples finement surharmoniques, on obtient la

PROPOSITION 5.4: *Soit (u', v') un couple finement surharmonique fini dans un ouvert fin $U_1 \subset U$; alors, pour tout $x \in U_1$, on peut trouver un ouvert fin relativement compact de $\boldsymbol{R}^m$ tel que $x \in \omega \subset \overline{\omega} \subset U_1$ et deux couples $(p, q) \geqslant 0$ et $(u, v) \geqslant 0$ finement surharmoniques dans U avec les propriétés suivantes*:

i) $(u, v) = (u', v') + (p, q)$ *dans* ω,

ii) *le couple* (p, q) *est finement harmonique dans* ω.

LEMME 5.5: *Soit φ un morphisme finement harmonique non constant de U dans $\boldsymbol{R}^n$. Supposons que, pour tout potentiel fin pur (p, q) dans $\varphi(U)$, le couple $(p \circ \varphi, q \circ \varphi)$ soit pur. Alors, pour tout couple finement hyperharmonique $(u, v) \geqslant 0$ dans $\varphi(U)$, le couple $(u \circ \varphi, v \circ \varphi)$ est finement hyperharmonique dans U. Si de plus (u, v) est finement harmonique dans un ouvert fin ω contenu dans $\varphi(U)$, alors $(u \circ \varphi, v \circ \varphi)$ est finement harmonique dans $\varphi^{-1}(\omega)$.*

DÉMONSTRATION: Soit (p, q) un couple potentiel fin dans $\varphi(U)$. On a alors, d'après ([9], Proposition 7.5), $(p, q) = (p_1, 0) + (p_2, q)$, où p_1 est un potentiel fin et (p_2, q) est un couple pur dans $\varphi(U)$. On en déduit, d'après les hypothèses du lemme, que le couple $(p \circ \varphi, q \circ \varphi) = (p_1 \circ \varphi, 0) + (p_2 \circ \varphi, q \circ \varphi)$ est finement hyperharmonique. Si (u, v) est un couple finement hyperharmonique $\geqslant 0$ dans $\varphi(U)$, on peut trouver une suite croissante de couples potentiels fins (p_n, q_n) dans $\varphi(U)$ tels que $(u, v) = \sup_n (p_n, q_n)$, d'où $(u \circ \varphi, v \circ \varphi) = \sup_n (p_n \circ \varphi, q_n \circ \varphi)$ et donc le résultat d'après ce qui précède et la proposition 7.7 de [9].

Dans la suite on suppose $n \geqslant 5$.

PROPOSITION 5.6: *Soit $\varphi : U \to \boldsymbol{R}^n$ une fonction finement continue. On suppose que φ est un morphisme finement harmonique non constant de U dans $\boldsymbol{R}^n$ et que, pour tout potentiel fin pur $(p, q) > 0$ dans $\varphi(U)$, le couple $(p \circ \varphi, q \circ \varphi)$ est pur. Alors φ est un morphisme finement biharmonique.*

DÉMONSTRATION: Supposons que les hypothèses de la proposition soient vérifiées. Soit ω un ouvert fin de $\boldsymbol{R}^n$ tel que $\omega \subset \varphi(U)$ et $x_0 \in \omega$, et soit (u, v) un couple finement surharmonique dans ω. Supposons d'abord $(u, v) \geqslant 0$. D'après la proposition précédente, on peut trouver un potentiel fin (p, q) dans $\varphi(U)$, finement harmonique dans un voisinage fin ω_1 de x_0, avec $\overline{\omega}_1 \subset \omega$, et un couple (u_0, v_0) finement surharmonique $\geqslant 0$ dans $\varphi(U)$ tel que l'on ait $(u_0, v_0) = (u, v) + (p, q)$ dans ω_1, et donc $(u_0 \circ \varphi, v_0 \circ \varphi) = (u \circ \varphi, v \circ \varphi) + (p \circ \varphi, q \circ \varphi)$ dans $\varphi^{-1}(\omega_1)$. Mais, d'après le lemme précédent, le couple $(u_0 \circ \varphi, v_0 \circ \varphi)$ est finement hyperharmonique dans

$\varphi^{-1}(\omega_1)$ et $(p \circ \varphi, q \circ \varphi)$ est finement harmonique dans $\varphi^{-1}(\omega_1)$; donc le couple $(u \circ \varphi, v \circ \varphi)$ est finement hyperharmonique dans $\varphi^{-1}(\omega_1)$. Comme x_0 et ω sont arbitraires, on en déduit que le couple $(u \circ \varphi, v \circ \varphi)$ est finement hyperharmonique dans $\varphi^{-1}(\omega)$.

Si (u, v) est de signe quelconque, on peut se ramener au cas précédent en ajoutant localement à (u, v) un couple biharmonique pur $(h, k) \geqslant 0$ convenable, le couple $(h \circ \varphi, k \circ \varphi)$ étant biharmonique d'après le lemme précédent.

Maintenant nous pouvons énoncer le

THÉORÈME 5.7: *Soit $\varphi : U \to \boldsymbol{R}^n$ une fonction finement continue. On suppose que φ est un morphisme finement harmonique non constant de U dans $\boldsymbol{R}^n$ tel que $\overline{\varphi^{-1}(K)} \subset U$ pour tout compact K de $\boldsymbol{R}^n$ contenu dans $\varphi(U)$. Alors les conditions suivantes sont équivalentes:*

i) *φ est un morphisme finement biharmonique.*

ii) *Pour tout potentiel fin pur (p, q) dans $\varphi(U)$, le couple $(p \circ \varphi, q \circ \varphi)$ est pur.*

DÉMONSTRATION: L'implication i) $\Rightarrow$ ii) a été démontrée au corollaire du théorème 5.3. L'implication ii) $\Rightarrow$ i) a fait l'objet de la proposition 5.6.

COROLLAIRE: *Soit $\varphi : U \to \boldsymbol{R}^n$ une fonction finement continue. On suppose que φ est un morphisme finement harmonique non constant de U dans $\boldsymbol{R}^n$ tel que $\overline{\varphi^{-1}(K)} \subset U$ pour tout compact K de $\boldsymbol{R}^n$ contenu dans $\varphi(U)$. Alors les conditions suivantes sont équivalentes:*

i) *φ est un morphisme finement biharmonique.*

ii) *Pour tout couple finement hyperharmonique pur $(u, v) \geqslant 0$ dans $\varphi(U)$, le couple $(u \circ \varphi, v \circ \varphi)$ est pur.*

En termes de noyaux de couplage, nous avons la caractérisation suivante des morphismes finement biharmoniques:

THÉORÈME 5.8: *Soit $\varphi : U \to \boldsymbol{R}^n$, $n \geqslant 5$, une fonction finement continue. On suppose que φ est un morphisme finement harmonique non constant de U dans $\boldsymbol{R}^n$ tel que $\overline{\varphi^{-1}(K)} \subset U$ pour tout compact K de $\boldsymbol{R}^n$ contenu dans $\varphi(U)$. Alors les conditions suivantes sont équivalentes:*

i) *φ est un morphisme finement biharmonique.*

ii) *On a*

$$(V_{\varphi(U)} f) \circ \varphi = V_U(f \circ \varphi)$$

pour toute fonction borélienne $f \geqslant 0$ sur $\varphi(U)$.

DÉMONSTRATION: L'implication ii) $\Rightarrow$ i) est immédiate en vertu du théorème précédent et du théorème 3.5. Prouvons l'implication i) $\Rightarrow$ ii). Pour toute fonction borélienne $f \geqslant 0$ bornée sur Ω (resp. $\boldsymbol{R}^n$), notons $V_1 f$ (resp. $V_2 f$) la fonction $V_U(f|_U)$ (resp. $V_{\varphi(U)}(f|_{\varphi(U)})$) prolongée par 0 dans $\Omega \backslash U$ (resp. $\boldsymbol{R}^n \backslash \varphi(U)$). Alors V_1 et V_2 définissent des noyaux boréliens sur Ω et $\boldsymbol{R}^n$ respectivement et, d'après le corollaire précédent, on a $(V_2 q) \circ \varphi = V_1(q \circ \varphi)$ dans U pour tout $q \in \mathcal{P}'(\boldsymbol{R}^n)$. D'où $(V_2 q) \circ \varphi = V_1(q \circ \varphi)$ dans U pour tout potentiel q fini continu dans $\boldsymbol{R}^n$ d'après le lemme 2.2. Comme l'ensemble des différences de potentiels finis continus nulles en dehors d'un compact K de $\boldsymbol{R}^n$ est dense dans l'ensemble des fonctions finies continues à support contenu dans K, on en déduit que l'on a $(V_2 f) \circ \varphi = V_1(f \circ \varphi)$ pour toute fonction f finie continue à support compact. Il en résulte que l'on a aussi, d'après le théorème des classes monotones, $(V_2 f) \circ \varphi = V_1(f \circ \varphi)$ et donc $(V_{\varphi(U)} f) \circ \varphi = V_U(f \circ \varphi)$, pour toute fonction borélienne $f \geqslant 0$ sur $\varphi(U)$.

REMARQUES: 1. Nous ignorons si, dans les théorèmes 5.6 et 5.7, on peut se passer de l'hypothèse $\overline{\varphi^{-1}(K)} \subset U$ pour tout compact K de $\boldsymbol{R}^n$ contenu dans $\varphi(U)$.

2. Les théorèmes 5.7 et 5.8 sont encore vrais pour $n \leqslant 4$ si l'on suppose, en plus, que $\varphi(U)$ est borné ou, plus généralement, contenu dans un domaine fort de $\boldsymbol{R}^n$.

Nous terminons ce travail par une autre caractérisation des morphismes finement biharmoniques. Soit n un entier $\geqslant 5$. Le noyau de couplage V relatif à l'espace biharmonique $\boldsymbol{R}^n$ muni du faisceau $\mathcal{H}_\Delta$ du paragraphe 2 est donné par

$$Vf(x) = \frac{1}{\sigma_n(n-2)} \int \frac{f(y)}{\|x-y\|^{n-2}}\, dy$$

pour toute fonction borélienne $f \geqslant 0$ sur $\boldsymbol{R}^n$, où σ_n désigne l'aire de la sphère unité de $\boldsymbol{R}^n$ (voir [8]).

La caractérisation analytique des morphismes finement harmoniques fait appel à la notion de gradient d'une fonction finement harmonique. A cet effet rappelons d'abord la

PROPOSITION 5.9: ([19], Proposition 1) *Soit ω un ouvert fin de $\boldsymbol{R}^n$ et f une fonction finement harmonique dans ω. Alors il existe une fonction $h = (h_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ sur ω à valeurs dans $\boldsymbol{R}^n$ vérifiant la condition suivante:*

Pour tout $x \in \omega$, il existe un voisinage fin compact (en topologie euclidienne) $V(x)$ de x et une suite de fonctions harmoniques f_ν, chacune définie sur un ouvert $V_\nu \supset V(x)$ telle que $f_\nu \to f$ uniformément sur $V(x)$ et, pour tout i, $\frac{\partial f_\nu}{\partial x_i} \to h_i$ dans $L^2(V(x), dv)$, où dv est la mesure de Lebesgue n-dimensionnelle.

Cette proposition traduit la différentiabilité généralisée des fonctions finement

harmoniques. On définit alors le gradient généralisé de f par $\nabla f = (h_i)_{1 \leq i \leq n}$. Il faut remarquer que ∇f ne dépend pas de la suite des voisinages fins $V_\nu(x)$ et de la suite de fonctions (f_ν) (voir [19]).

On rappelle aussi la caractérisation suivante des morphismes finement harmoniques d'un ouvert fin de $\boldsymbol{R}^m$ dans $\boldsymbol{R}^n$ (munis du faisceau harmonique classique défini par le Laplacien) (voir [21]):

THÉORÈME 5.10: *Pour une fonction φ de U de $\boldsymbol{R}^m$, $m \geq 2$, dans $\boldsymbol{R}^n$, $n \geq 2$, les conditions suivantes sont équivalentes*;

i) *φ est un morphisme finement harmonique.*

ii) *Les composantes φ_j $(1 \leq j \leq n)$ de φ, les produits $\varphi_i \varphi_j$ $(i \neq j)$ et les différences $\varphi_i^2 - \varphi_j^2$ sont finement harmoniques dans U.*

iii) *Les composantes φ_j $(1 \leq j \leq n)$ de φ sont finement harmoniques dans U et on a $\nabla \varphi_i \nabla \varphi_j = \delta_{ij} |\nabla \varphi_i|^2$ presque partout sur U, où $\nabla \varphi_i$ est le gradient défini dans la proposition 5.9.*

Pour les morphismes finement biharmoniques nous pouvons maintenant, moyennant les théorèmes 5.8 et 5.10 et la proposition 4.3, énoncer le

THÓRÈME 5.11: *Soit φ une application d'un domaine U fin de $\boldsymbol{R}^m$, $m \geq 5$ (ou seulement $m \geq 2$ si U est borné), dans $\boldsymbol{R}^n$, $n \geq 5$, telle que $\overline{\varphi^{-1}(K)} \subset U$ pour tout compact $K \subset \varphi(U)$. Alors les conditions suivantes sont équivalentes:*

i) *φ est un morphisme finement biharmonique.*

ii) *Les composantes φ_j $(1 \leq j \leq n)$ de φ, les produits $\varphi_i \varphi_j$ $(i \neq j)$ et les différences $\varphi_i^2 - \varphi_j^2$ sont finement harmoniques dans U, et l'on a*

$$\int_{\varphi(U)} f(y)\, G_{\varphi(U)}(\varphi(x), y)\, dy = \int_U f(\varphi(y))\, G_U(x, y)\, dy$$

pour toute fonction borélienne positive sur $\varphi(U)$.

iii) *Les composantes φ_j $(1 \leq j \leq n)$ de φ sont finement harmoniques dans U et on a $\nabla \varphi_i \nabla \varphi_j = \delta_{ij} |\nabla \varphi_i|^2$ presque partout sur U et*

$$\int_{\varphi(U)} f(y)\, G_{\varphi(U)}(\varphi(x), y)\, dy = \int_U f(\varphi(y))\, G_U(x, y)\, dy$$

pour toute fonction borélienne $f \geq 0$ sur $\boldsymbol{R}^n$.

REMARQUE: Le théorème 5.11 est vrai pour tout $n \leq 4$ si on suppose que $\varphi(U)$ est contenu dans un domaine fort de $\boldsymbol{R}^n$.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[1] N. Bouleau, *Espaces biharmoniques et couplages de processus de Markov*, J. Math. Pures Appl., 58 (1979), 187-204.

[2] N. Bouleau, *Thèse de Doctorat d'État ès Sciences*, Université de Paris VI, 1979.

[3] C. Constantinescu - A. Cornea, *Compactifications of harmonic spaces*, Nagoya Math. J., 25 (1965), 1-57.

[4] C. Constantinescu - A. Cornea, *Potential Theory on Harmonic spaces*, Springer Verlag Heidelberg, 1972.

[5] L. Csink - B. Øksendal, *A stochastic characterization of harmonic morphisms*, Preprint, University of Oslo, 1987.

[6] L. Csink - B. Øksendal, *Stochastic harmonic morphisms: Functions mapping the paths of one diffusion into the paths of another*, Ann. Inst. Fourier, 33 (1983), 219-240.

[7] C. Dellacherie - P. A. Meyer, *Probabilités et Potentiel*, chap. I à IV, Hermann, Paris, 1975.

[8] M. El Kadiri, *Représentation intégrale dans le cadre de la théorie axiomatique des fonctions biharmoniques*, Rev. Roum. Math. Pures Appl., 42 (1997), 579-589.

[9] M. El Kadiri, *Fonctions finement biharmoniques*, Rend. Accad. Naz. XL, 5 (2000), 43-62.

[10] M. El Kadiri, *Morphismes biharmoniques*, preprint.

[11] B. Fuglede, *Finely harmonic functions*, Lecture Notes in Math. 289, Springer-Verlag, 1972.

[12] B. Fuglede, *Sur la fonction de Green dans un domaine fin*, Ann. Inst. Fourier, 25 (1975), 201-206.

[13] B. Fuglede, *Représentation intégrale des potentiels fins*, C. R. Acad. Sci., Paris, 300, Série I (1985), 129 -132.

[14] B. Fuglede, *Harmonic morphisms between Riemannian manifolds*, Ann. Inst. Fourier, 28 (1978), 107-144.

[15] B. Fuglede, *Harmonic morphisms*, Lecture Notes in Math., 747 (1975), Springer, 123-132.

[16] B. Fuglede, *Harmonic morphisms*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A, I Mathematica, Helsinki, 2 (1976), 113-127.

[17] L. L. Helms, *Introduction to Potential Theory*, Wiley-Interscience, 1969.

[18] R. M. Hervé, *Recherches axiomatiques sur la théorie des fonctions surharmoniques et du potentiel*, Ann. Inst. Fourier, 12 (1962), 415-517.

[19] H. Masaoka, *A characterization of finely harmonic morphisms in* $\boldsymbol{R}^n$, J. Math. Kyoto, 26-2 (1986), 223-231.

[20] M. Nicolescu, *Les fonctions polyharmoniques*, Paris, Hermann, 1936.

[21] B. Øksendal, *Finely harmonic morphisms*, Brownian path preserving functions and conformal martingales, Inventiones Math., 75 (1984), 179-187.

[22] E. P. Smyrnelis, *Axiomatique des fonctions biharmoniques, 1e section*, Ann. Inst. Fourier, 26, 1 (1975), 35-98.

[23] E. P. Smyrnelis, *Axiomatique des fonctions biharmoniques, 2e section*, Ann. Inst. Fourier, 26, 3 (1976), 1-47.

[24] E. P. Smyrnelis, *Sur la fonction hyperharmonique d'ordre 2*, Lecture Notes in Math., 787 (1978), 277-294.

Direttore responsabile: Prof. A. Ballio - Autorizz. Trib. di Roma n. 7269 dell'8-12-1959
«Monograf» - Via Collamarini, 5 - Bologna