Rendiconti
Accademia Nazionale delle Scienze detta dei XL
Memorie di Matematica e Applicazioni
120° (2002), Vol. XXVI, fasc. 1, pagg. 17-28

BELMESNAOUI AQZZOUZ (*) - MOHAMED EL KADIRI (**)

Quelques Remarques sur les Formes Biquadratiques Semi-définies Positives (***)

RÉSUMÉ. — Nous montrons que toute forme biquadratique semi-définie positive sur $\boldsymbol{R}^m \times \boldsymbol{R}^n$ se décompose en la somme de carrés de formes bilinéaires et de formes biquadratiques non minorées, pour l'ordre naturel sur les formes biquadratiques, par des carrés de formes bilinéaires non nulles que nous caractérisons et nous discutons le cas $m = n = 3$.

Some remarks on positive semidefinite biquadratic forms.

ABSTRACT. — For integers $m, n \geqslant 3$ we prove that every positive semidefinite biquadratic form on $\boldsymbol{R}^m \times \boldsymbol{R}^n$ is the sum of squares of bilinear forms and biquadratic forms which are not minorized, for the natural order on biquadratic forms, by squares of nonzero bilinear forms that we characterize, and we discuss the case $m = n = 3$.

1. - INTRODUCTION

Il est bien connu que toute forme quadratique semi-définie positive est la somme de carrés de formes linéaires. Pour les formes biquadratiques le problème suivant, par analogie avec le résultat précédent, est intéressant dans plusieurs de ses aspects:

Soit F une forme biquadratique

$$F(x, y) = \sum a_{jkpq} x_j x_k y_p y_q$$

aux variables réelles $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$ et $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, $m, n \geqslant 2$. Si F est se-

(*) Indirizzo dell'Autore: Université Ibn Tofail, Faculté des Sciences, Département de Mathématiques, B.P. 133, Kénitra, Maroc. E-mail: baqzzouz@hotmail.com
(**) Indirizzo dell'Autore: B.P. 726, Salé-Tabriquet, Salé, Maroc. E-mail: elkadiri@fsr.ac.ma
(***) Memoria presentata il 31 gennaio 2002 da Giorgio Letta, uno dei XL.

mi-définie positive (i.e., $F(x, y) \geqslant 0$, $\forall x, y$), existe -t-il des formes bilinéaires

$$f_i(x, y) = \sum \beta_{jp}^{(i)} x_j y_p$$

telles que $F = \sum_i f_i^2$? Pour $m = 2$ ou $n = 2$, une réponse affirmative a été donnée par Calderón [1, th. 1]. Dans [2] D-M. Choi a donné, pour $m = n = 3$, un exemple de forme biquadratique semi-définie positive qui n'est pas la somme de carrés de formes bilinéaires, montrant ainsi que la réponse au problème précédent est négative en général lorsque $m, n \geqslant 3$.

Soient m, n deux entiers $\geqslant 2$, on note $\boldsymbol{Q}_{m,n}^{+}$ le cône des formes biquadratiques semi-définies positives sur $\boldsymbol{R}^m \times \boldsymbol{R}^n$. L'importance des formes biquadratiques semi-définies positives réside dans leur lien avec les opérateurs linéaires sur les matrices symétriques réelles. On note $\mathcal{S}_n$ l'espace des matrices réelles symétriques d'ordre n, $\mathcal{S}_n^+$ le cône positif de $\mathcal{S}_n$ et $\boldsymbol{P}(\mathcal{S}_m, \mathcal{S}_n)$ le cône des opérateurs linéaires positifs de $\mathcal{S}_m$ dans $\mathcal{S}_n$. Un opérateur linéaire $A : \mathcal{S}_m \to \mathcal{S}_n$ est dit positif si $A(\mathcal{S}_m^+) \subset \mathcal{S}_n^+$, autrement dit, s'il transforme les matrices semi-définies positives en matrices semi-définies positives. A toute forme biquadratique $F \in \boldsymbol{Q}_{m,n}^{+}$ est associé un opérateur unique $A \in \boldsymbol{P}(\mathcal{S}_m, \mathcal{S}_n)$ tel que $F(x, y) = y^T A(xx^T)\, y$. Inversement, tout opérateur $A \in \boldsymbol{P}(\mathcal{S}_m, \mathcal{S}_n)$ définit, via la formule précédente, une forme biquadratique $F \in \boldsymbol{Q}_{m,n}^{+}$.

Dans ce travail, nous déterminons le type de décomposition qu'il faut considérer pour les formes biquadratiques pour $m, n \geqslant 3$ et qui généralise le résultat des cas $m = 2$ ou $n = 2$. Plus précisement, nous montrons que toute forme biquadratique semi-définie positive est la somme de carrés de formes bilinéaires et de formes biquadratiques semi-définies positives qui ne sont pas minorées, pour l'ordre naturel sur les formes biquadratiques, par des carrés de formes bilinéaires non nulles, que nous caractériserons. Nous discuterons également le cas $m = n = 3$ pour lequel nous déterminons une nouvelle classe de formes biquadratiques semi-définies positives extrémales moyennant un exemple de D-M. Choi.

2. - Décomposition des formes biquadratiques semi-définies positives

On note $\mathcal{L}(\boldsymbol{R}^m, \boldsymbol{R}^n)$, ou tout simplement $\mathcal{L}(\boldsymbol{R}^n)$ si $n = m$, l'espace vectoriel réel des applications linéaires de $\boldsymbol{R}^m$ dans $\boldsymbol{R}^n$, et on identifie les éléments de $\mathcal{L}(\boldsymbol{R}^m, \boldsymbol{R}^n)$ avec leur matrices dans les bases canoniques de $\boldsymbol{R}^m$ et $\boldsymbol{R}^n$. On note également $\mathcal{GL}(\boldsymbol{R}^n)$ le groupe linéaire de $\boldsymbol{R}^n$, i.e. l'ensemble des éléments inversibles de $\mathcal{L}(\boldsymbol{R}^n)$.

Pour tout opérateur $A \in \boldsymbol{P}(\mathcal{S}_m, \mathcal{S}_n)$, nous définissons l'application π_A de $\mathcal{L}(\boldsymbol{R}^n, \boldsymbol{R}^m)$ dans $\boldsymbol{R}_+$ par

$$\pi_A(\Omega) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{i=l} \{y_i^T A(x_i x_i^T)\, y_i\}^{1/2};\ \Omega = \sum_{i=1}^{i=l} x_i y_i^T \right\}$$

pour tout $\Omega \in \mathcal{L}(\boldsymbol{R}^n, \boldsymbol{R}^m)$, où l'inf est pris sur toutes les décompositions $\Omega = \sum_{i=1}^{i=l} x_i y_i^T$ de Ω.

Il est facile de voir que la fonction π_A possède les propriétés suivantes:

i) Pour tout réel λ et tout $\Omega \in \mathcal{L}(\boldsymbol{R}^n, \boldsymbol{R}^m)$, on a $\pi_A(\lambda\Omega) = |\lambda|\pi_A(\Omega)$.

ii) Pour tous $\Omega_1, \Omega_2 \in \mathcal{L}(\boldsymbol{R}^n, \boldsymbol{R}^m)$, on a $\pi_A(\Omega_1 + \Omega_2) \leqslant \pi_A(\Omega_1) + \pi_A(\Omega_2)$.

Autrement dit la fonction π_A est convexe et homogène de degré 1.

iii) Si $A \leqslant B$ (i.e., $B - A \in \boldsymbol{P}(\mathcal{S}_n, \mathcal{S}_m)$), alors $\pi_A(\Omega) \leqslant \pi_B(\Omega)$ pour tout $\Omega \in \mathcal{L}(\boldsymbol{R}^n, \boldsymbol{R}^m)$.

On déduit de cette dernière propriété que l'ensemble $\{A \in \boldsymbol{P}(\mathcal{S}_m, \mathcal{S}_n);\ \pi_A \equiv 0\}$ est une bande de $\boldsymbol{P}(\mathcal{S}_m, \mathcal{S}_n)$. Pour $m, n \geqslant 3$ cette bande n'est pas réduite à 0 d'après le corollaire du théorème 3.2 ci-après et l'exemple de D-M. Choi (voir remarque 2 suivant la démonstration du th. 2.4 dans le présent travail); par contre elle l'est si $m = 2$ ou $n = 2$.

Si F est une forme biquadratique semi-définie positive, on notera π_F l'application π_A où A est l'opérateur de $\boldsymbol{P}(\mathcal{S}_m, \mathcal{S}_n)$ associé à F. Nous verrons dans la suite qu'une forme biquadratique $F \in \boldsymbol{Q}^+_{m,n}$ est non minorée par le carré d'une forme bilinéaire non nulle si, et seulement si, $\pi_F = 0$.

On note $\widehat{\mathrm{Ext}}(\boldsymbol{P}(\mathcal{S}_m, \mathcal{S}_n))$ l'ensemble des génératrices extrémales du cône $\boldsymbol{P}(\mathcal{S}_m, \mathcal{S}_n)$, et on dira qu'un opérateur de $\boldsymbol{P}(\mathcal{S}_m, \mathcal{S}_n)$ est extrémal s'il appartient à une génératrice extrémale de $\boldsymbol{P}(\mathcal{S}_m, \mathcal{S}_n)$. De même, on dira qu'une forme biquadratique $F \in \boldsymbol{Q}^+_{m,n}$ est extrémale si elle appartient à une génératrice extrémale du cône $\boldsymbol{Q}^+_{m,n}$. Il est clair qu'une forme biquadratique $F \in \boldsymbol{Q}^+_{m,n}$ est extrémale si et seulement si l'opérateur $A \in \boldsymbol{P}(\mathcal{S}_m, \mathcal{S}_n)$ associé à F est extrémal.

Soit $\Sigma \in \mathcal{L}(\boldsymbol{R}^m, \boldsymbol{R}^n)$. On définit un opérateur $\varrho(\Sigma) \in \mathcal{L}(\mathcal{S}_m, \mathcal{S}_n)$ en posant pour tout $\Phi \in \mathcal{S}_m$:

$$\varrho(\Sigma)(\Phi) = \Sigma\Phi\Sigma^T,$$

où Σ^T est l'opérateur transposé de Σ. Pour tout $x \in \boldsymbol{R}^m$, on a $\varrho(\Sigma)(xx^T) = (\Sigma x)(\Sigma x)^T$; il résulte alors de la théorie spectrale classique que $\varrho(\Sigma)$ définit un opérateur de $\boldsymbol{P}(\mathcal{S}_m, \mathcal{S}_n)$.

Les propriétés suivantes sont faciles à vérifier:

i) Pour tous $\Sigma_1 \in \mathcal{L}(\boldsymbol{R}^m, \boldsymbol{R}^n)$, $\Sigma_2 \in \mathcal{L}(\boldsymbol{R}^n, \boldsymbol{R}^p)$, on a

$$\varrho(\Sigma_2)\,\varrho(\Sigma_1) = \varrho(\Sigma_2\Sigma_1)$$

ii) Si $\Sigma \in \mathcal{GL}(\boldsymbol{R}^n)$, alors $\varrho(\Sigma) \in \mathcal{GL}(\mathcal{S}_n)$ et l'on a

$$\varrho(\Sigma)^{-1} = \varrho(\Sigma^{-1}).$$

Soit Q une forme bilinéaire sur $\boldsymbol{R}^m \times \boldsymbol{R}^n$, alors il existe un opérateur $\Sigma \in \mathcal{L}(\boldsymbol{R}^m, \boldsymbol{R}^n)$ tel que $Q(x, y) = y^T\Sigma x$, d'où $Q^2(x, y) = y^T\varrho(\Sigma)(xx^T)\,y$ pour tout

couple $(x, y) \in \boldsymbol{R}^m \times \boldsymbol{R}^n$, autrement dit, l'opérateur associé à la forme biquadratique Q^2 est $\varrho(\Sigma)$.

THÉORÈME 2.1: ([5] pour $m = n$) *Pour tout* $\Sigma \in \mathcal{L}(\boldsymbol{R}^m, \boldsymbol{R}^n)$, *l'opérateur* $\varrho(\Sigma)$ *appartient à* $\widehat{\mathrm{Ext}}(\boldsymbol{P}(\mathcal{S}_m, \mathcal{S}_n))$.

DÉMONSTRATION: Le cas où $\Sigma = 0$ est trivial; on suppose donc que $\Sigma \neq 0$. Soit $x \in \boldsymbol{R}^m$, alors on a $\varrho(\Sigma)(xx^T) = (\Sigma x)(\Sigma x)^T \in \widehat{\mathrm{Ext}}(\mathcal{S}_n^+)$. Si $A \in \boldsymbol{P}(\mathcal{S}_m, \mathcal{S}_n)$, non nul, est tel que $\varrho(\Sigma) - A \in \boldsymbol{P}(\mathcal{S}_m, \mathcal{S}_n)$, alors $\varrho(\Sigma)(xx^T) - A(xx^T) \in \mathcal{S}_m^+$, et, par suite, il existe un réel $\alpha(x) \in [0, 1]$ tel que $A(xx^T) = \alpha(x)\varrho(\Sigma)(xx^T)$. On va montrer qu'on peut choisir le réel $\alpha(x)$ indépendant de x, ce qui démontrera le théorème. Posons $A(xx^T) = (a_{ij}(x))_{1 \leqslant i, j \leqslant n}$ et $\Sigma = (b_{ij})_{1 \leqslant i \leqslant n,\, 1 \leqslant j \leqslant m}$. Comme la matrice $(a_{ij}(x))$ est positive non identiquement nulle, il existe un entier i, $1 \leqslant i \leqslant m$, tel que le polynôme $P = a_{ii}$ soit non identiquement nul. Posons aussi $Q(x) = \left(\sum_{j=1}^{j=d} b_{ij} x_j\right)$, on a alors $P(x) = \alpha(x)\, Q(x)^2$ pour tout x. Le polynôme P étant homogène positif de degré 2, on peut écrire, pour tout $x \in \boldsymbol{R}^m$, $P(x) = P_1(x)^2 + P_2(x)^2 + \ldots + P_r(x)^2$, où $P_1, P_2, \ldots, P_r$ sont des formes linéaires sur $\boldsymbol{R}^m$. La relation $P(x) = \alpha(x)\, Q^2(x)$ pour tout x entraine que les formes linéaires $P_1, P_2, \ldots P_r$ et Q ont les mêmes noyaux, donc proportionnelles, ce qui permet bien de choisir $\alpha(x)$ indépendant de x et achève la démonstration du théorème.

Le théorème suivant donne une caractérisation des opérateurs de $\boldsymbol{P}(\mathcal{S}_m, \mathcal{S}_n)$ qui ne sont pas minorés, au sens de l'ordre défini par $\boldsymbol{P}(\mathcal{S}_m, \mathcal{S}_n)$, par un opérateur de la forme $\varrho(\Sigma)$, $\Sigma \in \mathcal{L}(\boldsymbol{R}^m, \boldsymbol{R}^n)$ non nul; ces opérateurs correspondent aux formes biquadratiques non minorées par des carrés de formes bilinéaires non nulles:

THÉORÈME 2.2: *Soit* $A \in \boldsymbol{P}(\mathcal{S}_m, \mathcal{S}_n)$, *non nul, alors les assertions suivantes sont équivalentes:*

i) *Il existe* $\Sigma \in \mathcal{L}(\boldsymbol{R}^m, \boldsymbol{R}^n)$, *non nul tel que* $A \geqslant \varrho(\Sigma)$.

ii) *L'application* π_A *est non identiquement nulle.*

DÉMONSTRATION: i) implique ii). Soit $\Sigma \in \mathcal{L}(\boldsymbol{R}^m, \boldsymbol{R}^n)$, non nul, et soit $A \geqslant \varrho(\Sigma)$, alors on a $y^T A(xx^T)\, y \geqslant (y^T \Sigma x)^2$ pour tous $x \in \boldsymbol{R}^m$, $y \in \boldsymbol{R}^n$. Soit $\Omega = \sum_{i=1}^{i=l} x_i y_i^T \in \mathcal{L}(\boldsymbol{R}^n, \boldsymbol{R}^m)$, alors

$$\sum_{i=1}^{i=l} \{y_i^T A(x_i x_i^T)\, y_i\}^{1/2} \geqslant \sum_{i=1}^{i=l} [(y_i^T \Sigma x_i)^2]^{1/2}$$

$$= \sum_{i=1}^{i=l} |y_i^T \Sigma x_i| \geqslant |tr(\Sigma\Omega)|,$$

donc $\pi_A(\Omega) \geqslant |tr(\Sigma\Omega)|$ pour tout Ω, et par suite π_A est non identiquement nulle.

ii) implique i). Soit $A \in \boldsymbol{P}(\mathcal{S}_m, \mathcal{S}_n)$, non nul. La fonction π_A, non identiquement

nulle, est sous-linéaire. D'après le théorème de Hahn-Banach il existe une forme linéaire $l \neq 0$ sur $\mathcal{L}(\boldsymbol{R}^n, \boldsymbol{R}^m)$ telle que $|l(\Omega)| \leqslant \pi_A(\Omega)$ pour tout $\Omega \in \mathcal{L}(\boldsymbol{R}^n, \boldsymbol{R}^m)$. L'espace $\mathcal{L}(\boldsymbol{R}^n, \boldsymbol{R}^m)$ possède une structure euclidienne définie par le produit scalaire $\langle \Lambda, \Omega \rangle_{tr} = tr(\Lambda \Omega^T)$, donc d'après le théorème de Riesz, il existe $\Sigma \in \mathcal{L}(\boldsymbol{R}^m, \boldsymbol{R}^n)$ tel que $l(xy^T) = y^T \Sigma x$, d'où

$$(y^T \Sigma x)^2 \leqslant y^T A(xx^T)\, y, \quad \forall x \in \boldsymbol{R}^m, \quad \forall y \in \boldsymbol{R}^n,$$

et par suite $A \geqslant \varrho(\Sigma)$.

En termes de formes biquadratiques, le théorème précédent exprime qu'une forme biquadratique semi-définie positive F sur $\boldsymbol{R}^m \times \boldsymbol{R}^n$ est non minorée par le carré d'une forme bilinéaire non nulle si, et seulement si, on a $\pi_F = 0$.

Corollaire: *Soit $A \in \widehat{\mathrm{Ext}}(\boldsymbol{P}(\mathcal{S}_m, \mathcal{S}_n))$, non nul, alors les assertions suivantes sont équivalentes:*

i) *Il existe $\Sigma \in \mathcal{L}(\boldsymbol{R}^m, \boldsymbol{R}^n)$, non nul tel que $A = \varrho(\Sigma)$.*

ii) *L'application π_A est non identiquement nulle.*

On déduit de ce théorème que les éléments extrémaux de $\boldsymbol{P}(\mathcal{S}_m, \mathcal{S}_n)$ se répartissent en deux catégories: ceux qui sont de la forme $E = \varrho(\Sigma)$, $\Sigma \in \mathcal{L}(\boldsymbol{R}^m, \boldsymbol{R}^n)$, et ceux pour lesquels on a $\pi_E = 0$.

Remarque: À cause de la convexité et l'homogénéité positive de l'application π_A, pour vérifier qu'elle est non identiquement nulle, il suffit de le vérifier sur les éléments d'une base de $\mathcal{L}(\boldsymbol{R}^n, \boldsymbol{R}^m)$. Nous pensons qu'il doit y avoir des moyens pratiques de le faire.

Nous pouvons maintenant énoncer le

Théorème 2.3: *Soit $F \in \boldsymbol{Q}^+_{m,n}$, alors il existe des formes bilinéaires $Q_1, Q_2, \ldots, Q_p$ sur $\boldsymbol{R}^m \times \boldsymbol{R}^n$ et des formes biquadratiques semi-définies positives $G_1, G_2, \ldots, G_q$ telles que*

$$F = Q_1^2 + \ldots + Q_p^2 + G_1 + \ldots G_q$$

et $\pi_{G_i} = 0$ pour tout i, $1 \leqslant i \leqslant q$.

En termes d'opérateurs le théorème précédent s'énonce comme suit:

Théorème 2.4: *Soit $A \in \boldsymbol{P}(\mathcal{S}_m, \mathcal{S}_n)$, alors il existe des matrices $\Sigma_1, \ldots, \Sigma_p \in \mathcal{L}(\boldsymbol{R}^m, \boldsymbol{R}^n)$ et des opérateurs $B_1, \ldots, B_q \in \boldsymbol{P}(\mathcal{S}_m, \mathcal{S}_n)$ tels que*

$$A = \varrho(\Sigma_1) + \ldots + \varrho(\Sigma_p) + B_1 + \ldots + B_q$$

et $\pi_{B_i} = 0$, $\forall i$, $1 \leqslant i \leqslant q$.

Pour démontrer le théorème 2.4 nous avons besoin d'établir un résultat auxiliaire. Rappelons pour cela qu'une base compacte du cône $\boldsymbol{P}(\mathcal{S}_m, \mathcal{S}_n)$ est une section affine compacte $\mathcal{C}$ de $\boldsymbol{P}(\mathcal{S}_m, \mathcal{S}_n)$ telle que $\boldsymbol{P}(\mathcal{S}_m, \mathcal{S}_n) = \boldsymbol{R}_+ \mathcal{C}$.

Lemme 2.5: *Le cône $\boldsymbol{P}(\mathcal{S}_m, \mathcal{S}_n)$ admet une base compacte.*

Démonstration: Soient $\{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$ et $\{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ les bases canoniques de $\boldsymbol{R}^m$ et $\boldsymbol{R}^n$ respectivement. Considérons l'ensemble

$$\mathcal{C} = \left\{ A \in \boldsymbol{P}(\mathcal{S}_m, \mathcal{S}_n); \sum_{i,j} f_j^T A(e_i e_i^T)\, f_j = 1 \right\},$$

alors $\mathcal{C}$ est une base compacte de $\boldsymbol{P}(\mathcal{S}_m, \mathcal{S}_n)$. En effet, il est clair que $\mathcal{C}$ est une section affine de $\boldsymbol{P}(\mathcal{S}_m, \mathcal{S}_n)$, il suffit donc de montrer qu'elle est compacte. Pour cela il suffit de montrer que si un opérateur $A \in \boldsymbol{P}(\mathcal{S}_m, \mathcal{S}_n)$ est tel que $\sum_{i,j} f_j^T A(e_i e_i^T)\, f_j = 0$, alors $A = 0$. Soit donc A un tel opérateur, alors on a, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, $A(xx^T) = 0$ pour tout $x \in \boldsymbol{R}^m$, et donc, d'après la théorie spéctrale classique, $A = 0$. Le lemme est donc démontré.

Démonstration du théorème 2.4: D'après le lemme précédent et le théorème de Carathéodory, pour tout $A \in \boldsymbol{P}(\mathcal{S}_m, \mathcal{S}_n)$, il existe des éléments extrémaux A_1, $A_2, \ldots, A_r$ de $\mathcal{C}$ et des réels $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r \geqslant 0$ tels que $A = \lambda_1 A_1 + \ldots + \lambda_l A_r$. Or, d'après le corollaire du théorème 2.2, les opérateurs $A_1, \ldots, A_r$ se répartissent en deux classes: ceux qui sont de la forme $\varrho(\Sigma)$, $\Sigma \in \mathcal{L}(\boldsymbol{R}^m, \boldsymbol{R}^n)$, et ceux qui vérifient $\pi_{A_i} \equiv 0$, d'où le théorème.

Remarques 1: Pour $m = 2$ ou $n = 2$, on a, dans le théorème précédent, $G_1 = G_2 = \ldots = G_q = 0$ d'après le théorème 1 de [1] et le théorème 2.3.

2. La décomposition dans le théorème 2.1 ou 2.2 n'est pas unique en général. La décomposition d'une forme biquadratique $F = F_1 + F_2$, où F_1 est une somme de carrés de formes bilinéaires et F_2 est une somme de formes biquadratiques $G_1, G_2, \ldots, G_q$ telles que $\pi_{G_i} = 0$ n'est, en général, pas unique non plus comme nous le verrons sur un exemple qui sera donné au paragraphe suivant.

3. - Étude du cas $m = n = 3$

Soit A_0 l'opérateur de $\boldsymbol{P}(\mathcal{S}_3, \mathcal{S}_3)$ définie par

$$A_0(xx^T) = \begin{pmatrix} x_1^2 + x_3^2 & -x_1 x_2 & -x_1 x_3 \\ -x_1 x_2 & x_1^2 + x_2^2 & -x_2 x_3 \\ -x_1 x_3 & -x_2 x_3 & x_2^2 + x_3^2 \end{pmatrix},$$

pour tout $x = (x_1, x_2, x_3) \in \boldsymbol{R}^3$. L'opérateur A_0 est un élément extrémal de $\boldsymbol{P}(\mathcal{S}_3, \mathcal{S}_3)$

d'après [3], th. 4.4., qui n'est pas de la forme $\varrho(\Sigma)$, $\Sigma \in \mathcal{L}(\boldsymbol{R}^3)$, $\Sigma \neq 0$, et donc la forme biquadratique associée à A_0 n'est pas minorée par un carré d'une forme bilinéaire non nulle. On a donc $\pi_{A_0} \equiv 0$. L'opérateur A_0 sera appelé dans la suite l'opérateur de D-M. Choi.

PROPOSITION 3.1: *Soit $\Sigma \in \mathcal{GL}(\boldsymbol{R}^3)$, alors les opérateur $A_0 \varrho(\Sigma)$ et $\varrho(\Sigma) A_0$ sont aussi des éléments extrémaux de $\boldsymbol{P}(\mathcal{S}_3, \mathcal{S}_3)$ qui, comme A_0, ne sont pas de la forme $\varrho(\Theta)$, pour aucun Θ de $\mathcal{L}(\boldsymbol{R}^3)$.*

DÉMONSTRATION: On va traiter seulement le cas de l'opérateur $B = A_0 \varrho(\Sigma)$, le cas de l'opérateur $\varrho(\Sigma) A_0$ se traite de la même façon. Soit $L \in \boldsymbol{P}(\mathcal{S}_3, \mathcal{S}_3)$ tel que $B - L \in \boldsymbol{P}(\mathcal{S}_3, \mathcal{S}_3)$, alors $B\varrho(\Sigma^{-1}) - L\varrho(\Sigma^{-1}) \in \boldsymbol{P}(\mathcal{S}_3, \mathcal{S}_3)$, soit $A - L\varrho(\Sigma^{-1}) \in \boldsymbol{P}(\mathcal{S}_3, \mathcal{S}_3)$, donc, comme A est extrémal, il existe $\alpha \geqslant 0$ tel que $L\varrho(\Sigma^{-1}) = \alpha . A$ et par suite $L = \alpha B$, ce qui montre que $B \in \operatorname{Ext}(\boldsymbol{P}(\mathcal{S}_3, \mathcal{S}_3))$. D'autre part, si B était de la forme $\varrho(\Theta)$ pour un certain $\Theta \in \mathcal{L}(\boldsymbol{R}^3)$, on aurait $A_0 = \varrho(\Theta\Sigma^{-1})$, ce qui est absurde. La proposition est démontrée.

COROLLAIRE: *Pour tout $\Sigma \in \mathcal{GL}(\boldsymbol{R}^3)$, on a $\pi_{A_0 \varrho(\Sigma)} = \pi_{\varrho(\Sigma) A_0} = 0$.*

REMARQUE: Plus généralement, pour tout $n \geqslant 2$, si $A \in \widehat{\operatorname{Ext}}(\boldsymbol{P}(\mathcal{S}_n, \mathcal{S}_n))$, et si $\Sigma \in \mathcal{GL}(\boldsymbol{R}^n)$, alors $A\varrho(\Sigma)$, $\varrho(\Sigma) A \in \widehat{\operatorname{Ext}}(\boldsymbol{P}(\mathcal{S}_n, \mathcal{S}_n)$.

La proposition précédente nous permet de donner un exemple de la non unicité de la décomposition du théorème 2.4.

Soit $\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, alors on a

$$A_0 + A_0 \varrho(\Sigma) = 2(\varrho(M_1) + \varrho(M_2) + \varrho(M_3) + \varrho(M_4) + \varrho(M_5)),$$

avec $M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $M_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $M_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Ce résultat montre que la somme A d'opérateurs $A_i \in \boldsymbol{P}(\mathcal{S}_m, \mathcal{S}_n)$ tels que $\pi_{A_i} = 0$ ne vérifie pas nécessairement $\pi_A = 0$, et montre aussi que la décomposition $F = F_1 + F_2$ d'une forme biquadratique F en la somme d'une somme F_1 de carrés de formes bilinéaires et d'une somme F_2 de formes biquadratiques non minorées par des carrés de formes bilinéaires n'est pas unique.

Rappelons le théorème de Calderòn ([1], th. 1), que nous énonçons en termes d'opérateurs:

THÉORÈME 3.2: *Si $m = 2$ ou $n = 2$, alors pour tout opérateur $A \in \boldsymbol{P}(\mathcal{S}_m, \mathcal{S}_n)$ il existe des opérateurs $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots, \Sigma_k \in \mathcal{L}(\boldsymbol{R}^m, \boldsymbol{R}^n)$ tels que*

$$A = \varrho(\Sigma_1) + \varrho(\Sigma_2) + \ldots \varrho(\Sigma_k).$$

En termes de formes biquadratiques, le théorème de Calderòn exprime que toute forme biquadratique semi-définie positive sur $\boldsymbol{R}^2 \times \boldsymbol{R}^n$ ou $\boldsymbol{R}^m \times \boldsymbol{R}^2$ est la somme de carrés de formes bilinéaires.

LEMME 3.3: *Soient $\alpha, \beta \in \boldsymbol{R}$ et Σ l'opérateur de $\mathcal{L}(\boldsymbol{R}^2, \boldsymbol{R}^3)$ défini par*

$$\Sigma(x_1, x_2) = (x_1, x_2, \alpha x_1 + \beta x_2),$$

alors $A_0 \varrho(\Sigma) \notin \widehat{\mathrm{Ext}}(\boldsymbol{P}(\mathcal{S}_2, \mathcal{S}_3))$.

DÉMONSTRATION: D'après le théorème de Calderòn, il suffit de montrer que l'opérateur $A_0 \varrho(\Sigma)$ n'est pas de la forme $\varrho(T)$ pour un $T \in \mathcal{L}(\boldsymbol{R}^2, \boldsymbol{R}^3)$. Or on a

$$A_0 \varrho(\Sigma)(xx^T) = \begin{pmatrix} x_1^2 + (\alpha x_1 + \beta x_2)^2 & -x_1 x_2 & -x_1(\alpha x_1 + \beta x_2) \\ -x_1 x_2 & x_1^2 + x_2^2 & -x_2(\alpha x_1 + \beta x_2) \\ -x_1(\alpha x_1 + \beta x_2) & -x_2(\alpha x_1 + \beta x_2) & x_2^2 + (\alpha x_1 + \beta x_2)^2 \end{pmatrix},$$

et l'on voit bien que $A_0 \varrho(\Sigma)$ n'est pas de la forme $\varrho(T)$ pour aucun $T \in \mathcal{L}(\boldsymbol{R}^3)$.

Nous avons alors le

THÉORÈME 3.4: *Soit $\Sigma \in \mathcal{L}(\boldsymbol{R}^3)$, non nul. Alors $A_0 \varrho(\Sigma) \in \widehat{\mathrm{Ext}}(\boldsymbol{P}(\mathcal{S}_3, \mathcal{S}_3))$ si et seulement si $\Sigma \in \mathcal{GL}(\boldsymbol{R}^3)$.*

DÉMONSTRATION: La condition est suffisante d'après la proposition précédente. Montrons qu'elle est nécessaire. Supposons que $A_0 \varrho(\Sigma) \in \widehat{\mathrm{Ext}}(\boldsymbol{P}(\mathcal{S}_3, \mathcal{S}_3))$ et soient u_1, u_2 et u_3 les vecteurs lignes, en tant qu'applications linéaires de $\boldsymbol{R}^3$ dans $\boldsymbol{R}$, de la matrice de l'opérateur Σ dans la base canonique de $\boldsymbol{R}^3$. Si $\Sigma \notin \mathcal{GL}(\boldsymbol{R}^3)$, on aurait par exemple $u_3 = \alpha u_1 + \beta u_2$, $\alpha, \beta \in \boldsymbol{R}$. Soit T l'opérateur de $\mathcal{L}(\boldsymbol{R}^2, \boldsymbol{R}^3)$ défini par

$$T(x_1, x_2) = (x_1, x_2, \alpha x_1 + \beta x_2),$$

alors, d'après le lemme précédent, $A_0 \varrho(T)$ se décomposerait en la somme $A_1 + A_2$ de deux opérateurs non proportionnels de $\boldsymbol{P}(\mathcal{S}_2, \mathcal{S}_3)$. Or on a, pour tout $x \in \boldsymbol{R}^3$,

$$A_0 \varrho(\Sigma)(xx^T) = A_0 \varrho(T)(u(x)\, u(x)^T)$$

où $u(x) = (u_1(x), u_2(x))$, d'où

$$A_0 \varrho(\Sigma)(xx^T) = A_1(u(x)\, u(x)^T) + A_2(u(x)\, u(x)^T)\,.$$

On distingue deux cas:

1. u_1 et u_2 sont non colinéaires.

Dans ce cas, les deux opérateurs $A_1(u(x)\, u(x)^T)$ et $A_2(u(x)\, u(x)^T)$ ne sont pas proportionnels, ce qui contredit le caractère extrémal de l'opérateur $A_0 \varrho(\Sigma)$.

2. u_1 et u_2 sont colinéaires.

Soient alors λ et μ tels que $u_2 = \lambda u_1$ et $u_3 = \mu u_1$, alors on a

$$A_0 \varrho(\Sigma)(xx^T) = \begin{pmatrix} (1+\mu^2)\, u_1(x)^2 & -\lambda u_1(x)^2 & -\mu u_1(x)^2 \\ -\lambda u_1(x)^2 & (1+\lambda^2)\, u_1(x)^2 & -\lambda\mu u_1(x)^2 \\ -\mu u_1(x)^2 & -\lambda\mu u_1(x)^2 & (\lambda^2+\mu^2)\, u_1(x)^2 \end{pmatrix},$$

et l'on voit facilement que dans ce cas aussi on a une contradiction avec le caractère extrémal de $A_0 \varrho(\Sigma)$. Le théorème est démontré.

Pour tout entier $k \geqslant 2$ on munit l'espace $\mathcal{S}_k$ de sa structure naturelle d'espace euclidien définie par le produit scalaire:

$$\langle \Phi, \Psi \rangle = tr(\Phi\Psi), \quad \forall \Phi, \ \Psi \in \mathcal{S}_k.$$

Pour tout opérateur $A \in \mathcal{L}(\mathcal{S}_m, \mathcal{S}_n)$, on note A^* l'ópérateur adjoint de A. On a alors $A^* \in \mathcal{L}(\mathcal{S}_n, \mathcal{S}_m)$ et

$$tr(A\Phi\,.\,\Psi) = tr(\Phi\,.\,A^*\Psi)$$

pour toutes matrices $\Phi \in \mathcal{S}_m$ et $\Psi \in \mathcal{S}_n$.

Le lemme suivant résulte immédiatement de la théorie spectrale classique.

Lemme 3.5: *Soit $\Phi \in \mathcal{S}_n$, alors $\Phi \in \mathcal{S}_n^+$ si et seulement si on a $tr(\Phi\Psi) \geqslant 0$ pour tous $\Psi \in \mathcal{S}_n^+$.*

Proposition 3.6: *Soit $A \in \boldsymbol{P}(\mathcal{S}_m, \mathcal{S}_n)$, alors $A^* \in \boldsymbol{P}(\mathcal{S}_n, \mathcal{S}_m)$.*

Démonstration: En effet, on a, pour tous $\Phi, \Psi \in \mathcal{S}_n$,

$$tr(A^*(\Phi)\, \Psi) = tr(\Phi A(\Psi)) \geqslant 0\,,$$

et la proposition découle du lemme précédent.

Un calcul élémentaire donne le résultat suivant:

$$A_0^*(xx^T) = \begin{pmatrix} x_1^2 + x_2^2 & -x_1 x_2 & -x_1 x_3 \\ -x_1 x_2 & x_2^2 + x_3^2 & -x_2 x_3 \\ -x_1 x_3 & -x_2 x_3 & x_1^2 + x_3^2 \end{pmatrix}$$

pour tout $x \in \boldsymbol{R}^3$.

Avant d'énoncer un résultat plus général que le théorème 3.4 (th. 3.9) nous avons encore besoin de la proposition suivante dont la démonstration ne présente aucune difficulté:

PROPOSITION 3.7: *Soit* $A \in \mathcal{L}(\mathcal{S}_m, \mathcal{S}_n)$, *alors on a* $A \in \widehat{\mathrm{Ext}}(\boldsymbol{P}(\mathcal{S}_m, \mathcal{S}_n))$ *si et seulement si* $A^* \in \widehat{\mathrm{Ext}}(\boldsymbol{P}(\mathcal{S}_n, \mathcal{S}_m))$.

REMARQUE: Pour tous $\Sigma_1 \in \mathcal{L}(\boldsymbol{R}^n, \boldsymbol{R}^p)$ et $\Sigma_2 \in \mathcal{L}(\boldsymbol{R}^k, \boldsymbol{R}^m)$ et tout $A \in \boldsymbol{P}(\mathcal{S}^m, \mathcal{S}^n)$, on a

$$[\varrho(\Sigma_1)\, A \varrho(\Sigma_2)]^* = \varrho(\Sigma_2^T)\, A^* \varrho(\Sigma_1^T)\,.$$

Le résultat suivant se démontre comme le théorème 3.4.

THÉORÈME 3.8: *Soit* $\Sigma \in \mathcal{L}(\boldsymbol{R}^3)$, *non nul. Alors* $A_0^* \varrho(\Sigma) \in \widehat{\mathrm{Ext}}(\boldsymbol{P}(\mathcal{S}_3, \mathcal{S}_3))$ *si et seulement si* $\Sigma \in \mathcal{GL}(\boldsymbol{R}^3)$.

COROLLAIRE: *Soit* $\Sigma \in \mathcal{L}(\boldsymbol{R}^3)$, *non nul. Alors* $\varrho(\Sigma)\, A_0^* \in \widehat{\mathrm{Ext}}(\boldsymbol{P}(\mathcal{S}_3, \mathcal{S}_3))$ *si et seulement si* $\Sigma \in \mathcal{GL}(\boldsymbol{R}^3)$.

On note $\{e_1, \ldots, e_n\}$ la base canonique de $\boldsymbol{R}^n$.
Un calcul élémentaire donne le

LEMME 3.9: *Soit* $x \in \boldsymbol{R}^3$, *alors on a* $\det(A_0(xx^T)) = 0$ (*resp.* $\det(A_0^*(xx^T)) = 0$ *si, et seulement, si il existe* $i \in \{1, 2, 3\}$ *tel que* $x = \lambda e_i$.

THÉORÈME 3.10: *Soient* $\Sigma_1, \Sigma_2 \in \mathcal{L}(\boldsymbol{R}^3)$, *non nuls. Alors* $\varrho(\Sigma_1)\, A_0 \varrho(\Sigma_2) \in$ $\in \widehat{\mathrm{Ext}}(\boldsymbol{P}(\mathcal{S}_3, \mathcal{S}_3))$ *si et seulement si, on a l'une des conditions suivantes:*

i) $\Sigma_1, \Sigma_2 \in \mathcal{GL}(\boldsymbol{R}^3)$,

ii) Σ_1 *et* Σ_2 *sont de rang* 1.

iii) Σ_1 (*resp.* Σ_2) *est de rang* 2 *et* Σ_1 (*resp.* Σ_1) *est de rang* 1 *et il existe* $i \in \{1, 2, 3\}$ *tel que* $e_i \in \mathrm{Im}(\Sigma_2)$ (*resp.* $\mathrm{Im}(\Sigma_1)$) *et* $\Sigma_1 e_k$ *et* $\Sigma_1 e_l$ (*resp.* $\Sigma_2 e_k$ *et* $\Sigma_2 e_l$) *sont colinéaires si* $l \neq k$ *et* $l, k \neq i$.

DÉMONSTRATION: La condition est suffisante: Si $\Sigma_1, \Sigma_2 \in \mathcal{GL}(\boldsymbol{R}^3)$ le résultat découle de la remarque suivant la proposition 3.1. Supposons que chacun des opérateurs Σ_1 et Σ_2 est de rang égal à 1. Soit u un vecteur générateur de l'image de Σ_2, alors il existe une forme linéaire l sur $\boldsymbol{R}^3$ telle que, pour tout $x \in \boldsymbol{R}^3$, $\Sigma_2(x) = l(x)\, u$, d'où

$$\varrho(\Sigma_1)\, A_0 \varrho(\Sigma_2)(xx^T) = l(x)^2 \varrho(\Sigma_1)\, A_0(uu^T)\,.$$

D'autre part, il existe, d'après la théorie spectrale classique, des vecteurs v_1, v_2, $v_3 \in \boldsymbol{R}^3$ tels que $A_0(uu^T) = v_1 v_1^T + v_2 v_2^T + v_3 v_3^T$, d'où

$$\varrho(\Sigma_1)\, A_0 \varrho(\Sigma_2)(xx^T) = l(x)^2 [(\Sigma_1 v_1)(\Sigma_1 v_1)^T + (\Sigma_1 v_2)(\Sigma_1 v_2)^T + (\Sigma_1 v_3)(\Sigma_1 v_3)^T],$$

pour tout $x \in \boldsymbol{R}^3$. Le résultat découle maintenant du fait que les vecteurs $\Sigma_1 v_i$,

$i = 1, 2, 3$, sont colinéaires. Supposons enfin que la condition iii) est vérifiée. Il est facile de voir alors qu'il existe une forme linéaire l sur $\boldsymbol{R}^3$ telle que, pour tout $x \in \boldsymbol{R}^3$,

$$\varrho(\Sigma_1)\, A_0\, \varrho(\Sigma_2)(xx^T) = l(x)^2 [(\Sigma_1 e_l)(\Sigma_1 e_l)^T + (\Sigma_1 e_k)(\Sigma_1 e_k)^T],$$

d'où le résultat.

La condition est nécessaire: Supposons que $\varrho(\Sigma_1)\, A_0\, \varrho(\Sigma_2) \in \widehat{\mathrm{Ext}}\,(\boldsymbol{P}(\mathcal{S}_3, \mathcal{S}_3)$. Remarquons d'abord que, d'après la proposition 3.1 et le théorème 3.4, si $\Sigma_1 \in \mathcal{GL}(\boldsymbol{R}^3)$ alors $\Sigma_2 \in \mathcal{GL}(\boldsymbol{R}^3)$. Supposons alors que Σ_1 est de rang 2, on va montrer que Σ_2 vérifie la condition iii). Raisonnons encore par l'absurde en supposant que Σ_2 est de rang égal à 2 et soit alors F l'image de Σ_2, on définit une forme biquadratique semi-définie positive f sur $F \times \boldsymbol{R}^3$ en posant

$$f(x, y) = y^T \varrho(\Sigma_1)\, A_0 (xx^T)\, y,\ \forall x \in F,\ y \in \boldsymbol{R}^3,$$

alors d'après le théorème de Calderòn, f est la somme de carrés de formes bilinéaires $f_1, \ldots, f_r$ sur $F \times \boldsymbol{R}^3$. Ainsi on a donc

$$f(\Sigma_2 x, y) = f_1(\Sigma_1 x, y)^2 + \ldots + f_r(\Sigma_1 x, y)^2,\ \forall x, y \in \boldsymbol{R}^3.$$

Or $f(\Sigma_1 x, y)$ est la forme biquadratique associé à l'opérateur $\varrho(\Sigma_1)\, A_0\, \varrho(\Sigma_2)$, et, comme ce dernier est extrémal, les formes bilinéaires

$$f_1(\Sigma_1 x, y), \ldots, f_r(\Sigma_1 x, y)$$

sont proportionnelles. On en déduit alors que la forme biquadratique $f(\Sigma_1 x, y)$ est le carré d'une forme bilinéaire, autrement dit, l'opérateur $\varrho(\Sigma_1)\, A_0\, \varrho(\Sigma_2)$ est de la forme $\varrho(\Sigma)$, $\Sigma \in \mathcal{L}(\boldsymbol{R}^3)$. On va montrer que pour tout $x \in \boldsymbol{R}^3$, la matrice $A_0\, \varrho(\Sigma_2)(xx^T)$ admet une valeur propre nulle et que cela conduit à une contradiction. Soit $x \in \boldsymbol{R}^3$ et soit $\{u_1, u_2, u_3\}$ une base de $\boldsymbol{R}^3$ formée de vecteurs propres de la matrice $A_0\, \varrho(\Sigma_2)(xx^T)$. Si cette matrice n'admet pas de valeur propre nulle, alors, vu le caractère extrémal de $(\Sigma x)(\Sigma x)^T$ dans le cône $\mathcal{S}_3$, les vecteurs $\Sigma_1 u_1, \Sigma_1 u_2, \Sigma_1 u_3$ seraient linéairement dépendants, ce qui est absurde car Σ_1 est supposée de rang 2. Donc la matrice $A_0\, \varrho(\Sigma_2)(xx^T)$ admet, pour tout $x \in \boldsymbol{R}^3$, une valeur propre nulle. Posons pour tout $x \in \boldsymbol{R}^3$, $\Sigma_2 x = (l_1(x), l_2(x), l_3(x))$, où l_1, l_2, l_3 sont des formes linéaires sur $\boldsymbol{R}^3$. On peut, quitte à faire un changement linéaire de coordonnées (qui ne change pas la nature des éléments extrémaux de $\boldsymbol{P}(\mathcal{S}_3, \mathcal{S}_3)$ d'après le théorème 3.4) supposer que les formes linéaires l_1 et l_2 sont linéairement indépendantes et que $l_3 = \alpha_1 l_1 + \beta l_2$ avec $\alpha, \beta \in \boldsymbol{R}$. On peut aussi supposer que $\alpha \neq 0$. Soit x appartenant à l'hyperplan $\{y \in \boldsymbol{R}^3 : l_2(y) = 0\}$, alors on a:

$$A_0\, \varrho(\Sigma_2)(xx^T) = \begin{pmatrix} (1+\alpha^2) l_1(x)^2 & 0 & -\alpha l_1(x)^2 \\ 0 & l_1(x)^2 & 0 \\ -\alpha l_1(x)^2 & 0 & \alpha^2 l_1(x)^2 \end{pmatrix}.$$

D'après ce qui précéde, on a $\det [A_0\, \varrho(\Sigma_2)(xx^T)] = 0$, soit $\alpha^4 l_1(x)^6 = 0$. On en déduit

que les formes linéaires l_1 et l_2 sont proportionnelles, ce qui est absurde. On en déduit que Σ_2 est de rang 1. En considérant un vecteur générateur u de l'image de Σ_2 et en raisonnant comme plus haut, on montre que la matrice $A(uu^T)$ admet une valeur propre nulle. Il en résulte alors, d'après le lemme 3.9, qu'il existe $i \in \{1, 2, 3\}$ et $\lambda \in \boldsymbol{R}$ tels que $u = \lambda e_i$, d'où

$$\varrho(\Sigma_1)\, A_0\, \varrho(\Sigma_2)(xx^T) = \lambda^2\, l(x)^2\, [(\Sigma_1 e_l)(\Sigma_1 e_l)^T + (\Sigma_1 e_l)(\Sigma_1 e_l)^T],$$

où l, $k \neq i$. Si Σ_1 est de rang 2 et Σ_2 est de rang 1, on arriverait aux mêmes conclusions en considérant A_0^* à la place de A_0. Le théorème est donc démontré.

Corollaire: *On a le même énoncé que le précédent en remplaçant A_0 par A_0^*.*

À notre connaissance, les seuls exemples d'opérateurs extrémaux de $\boldsymbol{P}(\mathcal{S}_3, \mathcal{S}_3)$ connus jusqu'ici sont l'opérateur de D-M. Choi et, évidemment, ceux que nous venons de construire, c'est-à-dire ceux de la forme $\varrho(\Sigma_1)\, A_0\, \varrho(\Sigma_2)$, $\varrho(\Sigma_1)\, A_0^*\, \varrho(\Sigma_2)$, Σ_1, $\Sigma_2 \in \mathcal{GL}(\boldsymbol{R}^3)$. Ceci suggère de poser le problème suivant:

Problème: Est-ce que tout élément de $\widehat{\mathrm{Ext}}(\boldsymbol{P}(\mathcal{S}_3, \mathcal{S}_3))$ est de la forme $\varrho(\Sigma_1)\, A_0\, \varrho(\Sigma_2)$, ou $\varrho(\Sigma_1)\, A_0^*\, \varrho(\Sigma_2)$, avec Σ_1, $\Sigma_2 \in \mathcal{L}(\boldsymbol{R}^3)$ comme dans le théorème précédent?

Si la réponse à ce problème est positive, on aura le résultat intéressant suivant:

Tout opérateur $A \in \boldsymbol{P}(\mathcal{S}_3, \mathcal{S}_3)$ s'écrit sous la forme:

$$A = \sum_{n=1}^{k} \varrho(\Sigma_n) + \sum_{k+1}^{l} \varrho(\Sigma_n^1)\, A_0\, \varrho(\Sigma_n^2) + \sum_{l+1}^{r} \varrho(\Sigma_n^1)\, A_0^*\, \varrho(\Sigma_n^2),$$

avec $\Sigma_1, \ldots, \Sigma_k$, $\Sigma_n^i \in \mathcal{L}(\boldsymbol{R}^3)$, $k+1 \leqslant n \leqslant r$, $i = 1, 2$.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[1] A. P. Calderón, *A note on biquadratic forms*, Linear Algebra Appl., 7 (1973), 175-177.

[2] M.-D. Choi, *Positive semidefinite biquadratic forms*, Linear Algebra Appl., 12 (1975), 95-100.

[3] M.-D. Choi - T.-T. Lam, *Extremal positive semidefinite forms*, Ann. Math. (1977), 1-18.

[4] M. El Kadiri, *Sur les génératrices extrémales de certains cônes de formes quadratiques doublement positives*, C.R. Acad. Sci. Paris, 324 (1997), 421-425.

[5] M. El Kadiri, *Opérateurs positifs sur certains espaces de formes quadratiques*, Linear Algebra Appl., 283 (1998), 273-288.

Direttore responsabile: Prof. A. Ballio - Autorizz. Trib. di Roma n. 7269 dell'8-12-1959
«Monograf» - Via Collamarini, 5 - Bologna