Rendiconti
Accademia Nazionale delle Scienze detta dei XL
Memorie di Matematica e Applicazioni
119° (2001), Vol. XXV, fasc. 1, pagg. 195-213

LUIGI AMERIO (*)

Molteplicità di nuclei risolventi e di soluzioni nell'equazione singolare di Volterra – tipo convoluzione – relativa a problemi con memoria (**)

SUNTO. — Viene ampliato, in base a proprietà della trasformazione bilatera di Laplace, il ruolo della equazione singolare di Volterra — tipo convoluzione — legata a problemi con memoria. Si dimostra infatti che può esistere (cfr. (2.2)) — in più del nucleo risolvente principale $G(t)$ della nota [1] — una molteplicità di nuclei risolventi $G_N(t)$: una successione, finita o infinita, espressa dalla (2.22). Le trasformate di Laplace, $\mathcal{L}_2(G_N)$, di tali nuclei coincidono, come funzioni analitiche, con la trasformata di $G(t)$, $\mathcal{L}_2(G) = \mathcal{L}(G)$. Ne differiscono per gli insiemi di convergenza. Gli integrali di Laplace dei nuclei G_N, $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-pt} G_N(t)\, dt = \mathcal{L}_2(G_N)$, convergono infatti in una successione di striscie S_N del piano complesso p, che seguono l'una l'altra a partire dal semipiano S, di convergenza per $\mathcal{L}(G)$. Tutte le rette di separazione delle striscie S_N (tra loro e, all'inizio, da S) contengono punti singolari (poli) della funzione $\mathcal{L}(G)$. Le stesse singolarità determinano il comportamento asintotico di ogni $G_N(t)$ e di $G(t)$, sia per $t \to -\infty$ che per $t \to +\infty$. Nella soluzione $Y_N(t)$ corrispondente a $G_N(t)$, il valore all'istante t non viene espresso mediante i soli valori del termine noto $F(\tau)$, $\forall \tau \leq t$ (come in [1], per $Y(t)$); dipende anche, in forma esplicita, dai valori $\forall \tau > t$, che debbono perciò essere assegnati in una valutazione preventiva. Differenti soluzioni possono competere al medesimo termine noto. Seguono esempi.

Multiplicity of solving kernels and solutions of Volterra's singular equation - convolution type - linked with problems with memory

ABSTRACT. — We enlarge, on the basis of bilateral Laplace transformation properties, the role of Volterra's singular equation — convolution type — linked with problems with memory. We prove, in fact, that there can exist (cfr. (2.2)) — besides the main solving kernel $G(t)$ of paper [1] — a multiplicity of solving kernels $G_N(t)$: a finite or infinite sequence, given by (2.22). The Laplace transforms, $\mathcal{L}_2(G_N)$, of these kernels coincide, as analytic functions, with that of $G(t)$, $\mathcal{L}_2(G) = \mathcal{L}(G)$. They are different as to convergence domains. The Laplace integrals of

(*) Indirizzo dell'Autore: Dipartimento di Matematica «Francesco Brioschi», Politecnico di Milano, Piazza Leonardo da Vinci 32, 20133 Milano.

(**) Memoria presentata il 18 ottobre 2001 da Luigi Amerio, uno dei XL.

the kernels G_N, $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-pt} G_N(t)\, dt = \mathcal{L}_2(G_N)$, converge, in fact, in a sequence of strips S_N in the complex plane p, which follow each other beginning from the half-plane S of $\mathcal{L}(G)$. All separation straight lines of the strips S_N (between themselves and starting from S) contain singular points (poles) of the function $\mathcal{L}(G)$. The same singularities on the boundary of S_N determine the asymptotic behaviour of the kernels $G_N(t)$ and of $G(t)$, whether $t \to -\infty$ or $t \to +\infty$. In the corresponding solution $Y_N(t)$, the value at time t cannot be expressed by the only values of the known term $F(\tau)$, $\forall \tau \leq t$ (as it occurs in [1], for $Y(t)$); it depends also, in explicit form, on the values $\forall \tau > t$, which, therefore, must be previously given. Different solutions may belong to the same known term. Examples follow.

1. - Introduzione

La presente nota prosegue nel tema della nota [1], con riferimento ad una equazione integrale singolare di Volterra su problemi con memoria:

$$Y(t) + \int_{-\infty}^{t} Y(\tau)\, K(t-\tau)\, d\tau = F(t) \qquad (t \in J = (-\infty\,,\ +\infty)), \tag{1.1}$$

ove $Y(t)$ è l'incognita, $F(t)$ il termine noto, $K(t)$ il nucleo $(0 \leq t < +\infty)$.

Posto $K(t) = 0$ per $t \leq 0$ e introdotta su J la convoluzione

$$A * B(t) = \int_{-\infty}^{\infty} A(\tau)\, B(t-\tau)\, d\tau\,,$$

la (1.1) assume la forma

$$Y(t) + Y * K(t) = F(t) \qquad (t \in J)\,. \tag{1.2}$$

A questa equazione applicheremo il metodo della *trasformazione bilatera di Laplace* mettendo in evidenza la possibilità che esista, — oltre al nucleo (principale) $G(t)$ della nota [1] — una successione, finita o infinita, di nuclei risolventi, $G_N(t)$. Le trasformate bilatere di questi, $\mathcal{L}_2(G_N)$, coincidono con la trasformata $\mathcal{L}_2(G) = \mathcal{L}(G)$, come funzioni analitiche della variabile complessa p. Hanno però distinti i campi di convergenza dei rispettivi integrali di Laplace, $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-pt} G_N(t)\, dt = \mathcal{L}_2(G_N)$. Il comportamento asintotico dei G_N e di G, per $t \to -\infty$ e per $t \to +\infty$, è legato alle singolarità della trasformata $\mathcal{L}(G)$.

Nelle corrispondenti soluzioni, il valore $Y_N(t)$, all'istante t, non viene espresso mediante i soli valori $F(\tau)$ del termine noto negli istanti τ *precedenti* t (come in [1]). Esso dipende anche, in forma esplicita, dai valori $F(\tau)$ negli istanti τ *successivi* a t, valori che debbono perciò essere assegnati preventivamente. Più soluzioni possono competere allo stesso termine noto.

Ammetteremo, in quanto segue, che ogni funzione $Z(t)$ considerata appartenga al-

lo *spazio* $\mathcal{L}_2^*$: esista cioè, in una striscia $-\infty \leqslant a_Z < \mathcal{R}(p) < b_Z \leqslant +\infty$ del piano complesso p, la *trasformata bilatera di Laplace*

$$\mathcal{L}_2(Z) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-pt} Z(t)\, dt \tag{1.3}$$

e l'integrale converga *assolutamente* nella stessa striscia. Vale perciò, in una comune striscia, il teorema della *convoluzione* di due funzioni:

$$\mathcal{L}_2(A * B) = \mathcal{L}_2(A)\, \mathcal{L}_2(B)\,.$$

Supponiamo, come *esempio*, che sia $K(t) = -H(t)$ con $H(t)$ funzione di Heaviside ($= 1$ per $t > 0$, $= 0$ per $t < 0$). Si ha

$$\mathcal{L}_2(H) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-pt} H(t)\, dt = \mathcal{L}(H) = \int_{0}^{\infty} e^{-pt}\, dt = \frac{1}{p} \qquad (\mathcal{R}(p) > 0). \tag{1.4}$$

Ammettiamo che nella corrispondente equazione:

$$Y(t) - \int_{-\infty}^{t} Y(\tau)\, d\tau = Y(t) - Y * H(t) = F(t)\,, \tag{1.5}$$

il termine noto sia $\mathcal{L}_2$-trasformabile in una striscia del piano p, $a < \mathcal{R}(p) < b$, con $a \geqslant 0$; esista inoltre una soluzione $Y(t)$, con la stessa proprietà.

Segue allora dalla (1.5), per il teorema della convoluzione, l'equazione nelle trasformate:

$$y(p) - y(p)\, \frac{1}{p} = f(p), \qquad (0 \leqslant a < \mathcal{R}(p) < b) \tag{1.6}$$

con $y(p) = \mathcal{L}_2(y)$, $f(p) = \mathcal{L}_2(F)$.

Si ottiene così la trasformata $y(p)$:

$$y(p) = \frac{p}{p-1} f(p) = f(p) + \frac{1}{p-1} f(p) \qquad (p \neq 1). \tag{1.7}$$

Osserviamo ora che la (1.7) può considerarsi in *due* distinte *striscie* del semipiano $\mathcal{R}(p) > 0$: il semipiano $\mathcal{R}(p) > 1$ (come in [1]), la striscia $0 < \mathcal{R}(p) < 1$.

I – *Sia* $\mathcal{R}(p) > 1$.

È allora

$$\frac{1}{p-1} = \mathcal{L}(e^t) = \mathcal{L}_2(e^t H(t)).$$

II – *Sia* $0 < \mathcal{R}(p) < 1$.

È allora

$$\frac{1}{p-1} = -\frac{1}{1-p} = \mathcal{L}_2(-e^t H(-t)).$$

Perciò, a seconda della striscia considerata, la medesima funzione analitica $1/(p-1)$ definisce la $\mathcal{L}_2$-trasformata di *due* distinti *nuclei risolventi*:

$$\begin{aligned} &G(t) = e^t H(t) && \text{se } \mathcal{R}(p) > 1 \quad (\text{come in } [1]), \\ &G_1(t) = -e^t H(-t) && \text{se } 0 < \mathcal{R}(p) < 1\,. \end{aligned} \tag{1.8}$$

A questi corrispondono, per la (1.7), le soluzioni della (1.5):

$$\begin{aligned} Y(t) = F(t) + G * F(t) &= F(t) + \int_{-\infty}^{\infty} F(\tau)\, G(t-\tau)\, d\tau = \\ &= F(t) + \int_{-\infty}^{t} F(\tau)\, e^{t-\tau}\, d\tau, \end{aligned} \tag{1.9}$$

$$\begin{aligned} Y_1(t) = F(t) + G_1 * F(t) &= F(t) + \int_{-\infty}^{\infty} F(\tau)\, G_1(t-\tau)\, d\tau = \\ &= F(t) - \int_{t}^{\infty} F(\tau)\, e^{t-\tau}\, d\tau. \end{aligned} \tag{1.10}$$

La (1.9) vale se il termine noto è $\mathcal{L}_2$-trasformabile in una striscia del semipiano $\mathcal{R}(p) > 1$; la (1.10), se questo avviene in una striscia contenuta in $0 < \mathcal{R}(p) < 1$.

Può naturalmente avvenire che la trasformata $\mathcal{L}_2(F)$ sia definita in una striscia $0 < \mathcal{R}(p) < b$, con $1 < b \leqslant +\infty$: in questo caso, la (1.5) ammette *due* soluzioni *distinte* (in generale).

Dalle (1.9) e (1.10) segue infatti:

$$Y(t) - Y_1(t) = e^t \int_{-\infty}^{\infty} F(\tau)\, e^{-\tau}\, d\tau = Ce^t. \tag{1.11}$$

Se la costante C è $\neq 0$, $Y(t)$ e $Y_1(t)$ sono distinte (la differenza non ammette, anzi, $\mathcal{L}_2$-trasformata).

Se $C = 0$, si ha

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(\tau)\, e^{-\tau}\, d\tau = f(1) = 0, \Rightarrow \; Y(t) = Y_1(t).$$

Deve perciò essere soddisfatta la condizione di ortogonalità (formale) del termine noto alla autosoluzione e^{-t} dell'equazione omogenea trasposta, di nucleo $-H(\tau - t)$:

$$Y * (t) - \int_{t}^{\infty} Y * (\tau)\, d\tau = 0.$$

Notiamo, da ultimo, che la scelta $K(t) = H(t)$, in luogo di $-H(t)$, avrebbe garantito l'unicità (oltre all'esistenza). Data infatti l'equazione

$$Y(t) + Y * H(t) = F(t),$$

continuano a valere, per le trasformate, le limitazioni

$$\mathcal{R}(p) > 0, \qquad 0 \leqslant a < \mathcal{R}(p) < b, \tag{1.12}$$

con il risultato:

$$y(p) = f(p) - \frac{1}{p+1} f(p).$$

Si hanno poi le relazioni:

$$\frac{1}{p+1} = \mathcal{L}_2(e^{-t} H(t)) \qquad \mathcal{R}(p) > -1;$$

$$\frac{1}{p+1} = \mathcal{L}_2(-e^{-t} H(-t)) \qquad \mathcal{R}(p) < -1$$

ma la seconda non può essere utilizzata a causa della (1.12). Ne segue la soluzione *unica*:

$$G(t) = e^{-t} H(t), \;\; Y(t) = F(t) - \int_{-\infty}^{t} F(\tau)\, e^{-(t-\tau)}\, d\tau.$$

Applicazione: Possiamo dare una interpretazione di carattere economico alle considerazioni precedenti (poco realistica, naturalmente, poiché l'istante iniziale è posto in $t = -\infty$).

Sia $Y(t)$ la somma presente, all'istante t, in un conto bancario-assicurativo, definito dalla *legge di rendita* $-K(t) > 0$. Indichiamo con $F(t)$ la somma percepita, all'istante t, dal conto stesso: $F(t)$ è > 0 se il versamento nel conto supera il prelievo, < 0 nel caso

opposto, $= 0$ se tali quantità si bilanciano. Il conto si estingue se, a un dato momento, è $Y(t) < 0$.

Sia, ad esempio, $K(t) = -H(t)$, come nella (1.5). Supponiamo poi $F(t) \geqslant 0$ per $t < 0$, $F(t) = -\delta < 0$ per $t \geqslant 0$; perciò a partire da $t = 0$, i prelievi superano i versamenti, mentre prima avviene il contrario. $\mathcal{L}_2(F)$ esista, inoltre, nel semipiano $\mathcal{R}(p) > 0$ (in particolare: $F(t) = e^{-t^2}$ per $t < 0$) in modo da garantire l'esistenza delle due soluzioni $Y(t)$ e $Y_1(t)$.

Si ha dalla (1.9)

$$
(1.13) \qquad Y(t) = \begin{cases} F(t) + e^t \int\limits_{-\infty}^{t} F(\tau)\, e^{-\tau}\, d\tau & (t < 0) \\ -\delta + e^t \int\limits_{-\infty}^{0} F(\tau)\, e^{-\tau}\, d\tau - \delta e^t \int\limits_{0}^{t} e^{-\tau}\, d\tau = & \\ \qquad = e^t \left(\int\limits_{-\infty}^{0} F(\tau)\, e^{-\tau}\, d\tau - \delta \right) & (t \geqslant 0). \end{cases}
$$

Il conto $Y(t)$ non si estingue, o si estingue, a seconda che sia

$$
(1.14) \qquad \int\limits_{-\infty}^{0} F(\tau)\, e^{-\tau}\, d\tau \geqslant \delta, \qquad \text{o} \qquad < \delta.
$$

Per la soluzione $Y_1(t)$ si presenta la circostanza opposta. Abbiamo infatti

$$
(1.15) \qquad Y_1(t) = \begin{cases} F(t) - e^t \int\limits_{t}^{0} F(\tau)\, e^{-\tau}\, d\tau + \delta e^t \int\limits_{0}^{\infty} e^{-\tau}\, d\tau = & \\ \qquad = F(t) + e^t \left(\delta - \int\limits_{t}^{0} F(\tau)\, e^{-\tau}\, d\tau \right) & (t < 0) \\ -\delta + \delta e^t \int\limits_{t}^{\infty} e^{-\tau}\, d\tau = -\delta + \delta = 0 & (t \geqslant 0) \end{cases}
$$

e quindi $Y_1(t) \geqslant 0$ se

$$
(1.16) \qquad \delta \geqslant \int\limits_{-\infty}^{0} F(\tau)\, e^{-\tau}\, d\tau.
$$

La soluzione $Y_1(t)$ sembra più conveniente per il cliente. È peraltro legata ad un più forte carico all'apertura del conto ($t = -\infty$): la restituzione avviene alla chiusura ($t = +\infty$); più precisamente, durante tutto l'intervallo $t \geqslant 0$.

Ammesso infatti che sia

$$\lim_{t \to -\infty} e^{-t} F(t) = 0$$

(e che valgono, in (1.14) e (1.16), le disuguaglianze), dalle (1.13) e (1.15) si ha:

$$\lim_{t \to -\infty} e^{-t} Y(t) = 0, \qquad \lim_{t \to -\infty} e^{-t} Y_1(t) = \delta - \int_{-\infty}^{0} F(\tau) e^{-\tau} \, d\tau > 0,$$

con il risultato terminale ($t = +\infty$):

$$\lim_{t \to +\infty} e^{-t} Y(t) = \int_{-\infty}^{0} F(\tau) \, e^{-\tau} d\tau - \delta > 0, \qquad \lim_{t \to +\infty} e^{-t} Y_1(t) = 0.$$

2. - Il caso generale

Consideriamo l'equazione (1.1) supponendo che esista, in un semipiano $\mathcal{R}(p) > \gamma \geqslant -\infty$, la trasformata $k(p)$ del *nucleo* $K(t)$. *Poiché* $K(t) = 0$ *per* $t < 0$, si ha

$$k(p) = \mathcal{L}(K) = \int_{0}^{\infty} e^{-pt} K(t) \, dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-pt} K(t) \, dt = \mathcal{L}_2(K) \qquad (\mathcal{R}(p) > \gamma).$$

Supponiamo inoltre che il termine noto $F(t)$ sia $\mathcal{L}_2$-trasformabile in una striscia $\gamma \leqslant a < \mathcal{R}(p) < b$ del piano p, ed esista una soluzione $Y(t)$ con la stessa proprietà. Prendendo la $\mathcal{L}_2$-trasformata di entrambi i membri, si ricava l'equazione

$$y(p) + y(p) k(p) = f(p) \qquad (a < \mathcal{R}(p) < b)$$

con

$$y(p) = \mathcal{L}_2(y), \qquad f(p) = \mathcal{L}_2(F).$$

Si ottiene così l'espressione della trasformata:

$$y(p) = \frac{1}{1 + k(p)} f(p) = f(p) - \frac{k(p)}{1 + k(p)} f(p) = f(p) + g(p) \, f(p), \tag{2.1}$$

ove (come dimostrato in [1],§ 2) $g(p)$ è la $\mathcal{L}$-trasformata, in un semipiano $\mathcal{R}(p) > \gamma'$, di una funzione $G(t)$, *nucleo risolvente* (che diremo *principale*). Si ha, precisamente lo sviluppo (convergente q.o. in J):

$$G(t) = -K(t) + K * K(t) - K * K * K(t) + \ldots \qquad (G(t) = 0 \ \text{ per } \ t < 0),$$

cui corrisponde, nella (1.1), la soluzione

$$Y(t) = F(t) + \int_{-\infty}^{\infty} F(\tau)\, G(t-\tau)\, d\tau =$$

$$= F(t) + \int_{-\infty}^{t} F(\tau)\, G(t-\tau)\, d\tau .$$

Se $\gamma' \leqslant \gamma$, questa è la soluzione *unica* della (1.1), nello spazio $\mathcal{L}_2^*$ (cfr. [1], § 2).

Supponiamo ora *che sia*

$$\gamma' > \gamma , \tag{2.2}$$

come avviene nel caso, particolarmente notevole, $K(t) \leqslant 0$. In tale ipotesi, possiamo estendere al caso generale quanto detto al §1, nell'esempio $K(t) = -H(t)$.

Per l'analiticità di $k(p)$ nel semipiano $\mathcal{R}(p) > \gamma$, l'equazione

$$1 + k(p) = 0 \tag{2.3}$$

ammette, in questo, solo radici isolate (se esistono). Tali radici sono perciò in numero finito, o costituiscono una sucessione $\{p_1, p_2 \ldots, p_n, \ldots\}$. Ad essa corrispondono *singolarità polari* di $g(p)$. Siccome poi risulta (per la trasformabilità assoluta di $K(t)$)

$$\lim_{p \to \infty} k(p) = 0 , \tag{2.4}$$

uniformemente in ogni semipiano $\mathcal{R}(p) \geqslant l > \gamma$, nello stesso semipiano il numero dei poli è necessariamente finito.

Le singolarità di $g(p)$, in $\mathcal{R}(p) > \gamma$, sono perciò collocate su un numero finito (o su una successione) di parallele all'asse immaginario, $\mathcal{R}(p) = \sigma_n$, con

$$\gamma' \geqslant \sigma_1 > \sigma_2 > \ldots > \sigma_n > \ldots \geqslant \gamma . \tag{2.5}$$

Consideriamo ora la striscia

$$S_N = \{\sigma_{N+1} < \mathcal{R}(p) < \sigma_N\} \qquad (N \geqslant 1)$$

e dimostriamo (cfr. [2]) il seguente *teorema*.

Supponiamo che, per la trasformata $k(p)$, *esista un intero* $m \geqslant 1$ *tale che la potenza* $k^m(p)$ *sia sommabile su ogni retta* $\mathcal{R}(p) = l > \gamma$, *parallela alla retta di convergenza* $\mathcal{R}(p) = \gamma$.

Allora esiste una e una sola funzione $G_N(t)$, $\mathcal{L}_2$*-trasformabile nella striscia* S_N, *tale che risulti*

$$g(p) = \mathcal{L}_2(G_N) \qquad (p \in S_N) .$$

Se la (2.3) *non ammette radici in* $\mathcal{R}(p) > \gamma$, *si ha necessariamente* $\gamma' \leqslant \gamma$.

Chiameremo $G_N(t)$ l'*N-esimo nucleo risolvente* (di *previsione*) *per l'equazione* (1.1).

DIMOSTRAZIONE: Siano $p_1, \ldots, p_{M_N}$ i poli di $g(p)$ (supposti esistenti) con la condizione

$$\mathcal{R}(p_n) \geqslant \sigma_N$$

e sia

$$\varphi_n(p) = \sum_{j=0}^{h_n} \frac{a_{jn}}{(p-p_n)^{j+1}}$$

la caratteristica relativa al polo p_n. Posto

$$\omega_N(p) = \sum_{n=1}^{M_N} \varphi_n(p) \qquad (\mathcal{R}(p) > \sigma_{N+1}), \tag{2.6}$$

la funzione

$$g_N(p) = g(p) - \omega_N(p)$$

è olomorfa nel semipiano $\mathcal{R}(p) > \sigma_{N+1}$ e (per la (2.4)) infinitesima uniformemente, per $p \to \infty$ in ogni semipiano $\mathcal{R}(p) \geqslant l > \gamma$.

Si ha poi

$$g(p) = \{g(p) - \omega_N(p)\} + \omega_N(p) \tag{2.7}$$

e indichiamo con $\Gamma_N(t)$ la funzione ottenuta da $\omega_N(p)$ sostituendo le potenze $1/(p-p_n)^{j+1}$ con le funzioni $e^{p_n t}\dfrac{t^j}{j!}$:

$$\Gamma_N(t) = \sum_{n=1}^{M_N} e^{p_n t} \sum_{j=0}^{h_n} a_{jn} \frac{t^j}{j!}. \tag{2.8}$$

Dimostriamo il risultato fondamentale:

$$g(p) - \omega_N(p) = \mathcal{L}_2(\{G(t) - \Gamma_N(t)\} H(t)) \qquad \mathcal{R}(p) > \sigma_{N+1}. \tag{2.9}$$

L'eliminazione delle singolarità di $g(p)$ dalla striscia $\sigma_{N+1} < \mathcal{R}(p) \leqslant \gamma'$, consente perciò alla differenza $\{G(t) - \Gamma_N(t)\} H(t)$ di avere $\mathcal{R}(p) > \sigma_{N+1}$ come semipiano di convergenza, con frontiera $\mathcal{R}(p) = \sigma_{N+1}$.

Abbiamo anzitutto

$$\begin{aligned} \frac{1}{(p-p_n)^{j+1}} &= \int_0^\infty e^{-pt}\left(e^{p_n t}\frac{t^j}{j!}\right) dt = \mathcal{L}_2\left(e^{p_n t}\frac{t^j}{j!} H(t)\right) && \mathcal{R}(p) > \mathcal{R}(p_n), \\ \frac{1}{(p-p_n)^{j+1}} &= \mathcal{L}_2\left(-e^{p_n t}\frac{t^j}{j!} H(-t)\right) && \mathcal{R}(p) < \mathcal{R}(p_n). \end{aligned} \tag{2.10}$$

Preso ad arbitrio $l' > \gamma'$, segue allora dalla (2.8) e dalla prima delle (2.10), per la formula di inversione di Riemann (e intendendo per l'integrale il valore principale):

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{l'-i\infty}^{l'+i\infty} e^{pt}\,\omega_N(p)\,dp = \Gamma_N(t)\,H(t) \qquad (l' > \gamma',\ t \in J)\,. \tag{2.11}$$

Supposto $m \geqslant 2$, abbiamo poi dalla (2.1)

$$g(p) = -\frac{k(p)}{1+k(p)} = -k(p) + k^2(p) \ldots + (-1)^{m-1} k^{m-1}(p) + (-1)^m \frac{k^m(p)}{1+k(p)} \tag{2.12}$$

e risulta

$$\begin{aligned} &-k(p) + \ldots + (-1)^{m-1} k^{m-1}(p) = \\ &\quad = \mathcal{L}(-K(t) + K * K(t) - \ldots + (-K)\overset{(m-1)}{*}(t)) = \\ &\qquad = \mathcal{L}_2(-K(t) + K * K(t) - \ldots + (-K)\overset{m-1}{*}(t))\,. \end{aligned}$$

Posto

$$K_m(t) = -K(t) + K * K(t) - \ldots + (-K\overset{m-1}{*}(t))\,,$$

segue dunque dalla (2.12)

$$(-1)^m \frac{k^m(p)}{1+k(p)} = \mathcal{L}_2(\{G(t) - K_m(t)\}\,H(t)) \qquad \mathcal{R}(p) > \gamma'\,. \tag{2.13}$$

Per l'ipotesi fatta, il primo membro della (2.13) è sommabile su ogni retta $\mathcal{R}(p) = l > \gamma$, sulla quale sia $1 + k(p) \neq 0$: in particolare per $\mathcal{R}(p) = l'$. Si ha dunque, per la formula di inversione di Riemann,

$$\{G(t) - K_m(t)\} = \frac{1}{2\pi i}\int_{l'-i\infty}^{l'+i\infty} e^{pt}(-1)^m \frac{k^m(p)}{1+k(p)}\,dp \qquad (l' > \gamma',\ t \in J)$$

e quindi, per la (2.11) (e intendendo per l'integrale il valore principale)

$$\begin{aligned} &\{G(t) - K_m(t) - \Gamma_N(t)\}\,H(t) = \\ &\qquad = \frac{1}{2\pi i}\int_{l'-i\infty}^{l'+i\infty} e^{pt}\left\{(-1)^m \frac{k^m(p)}{1+k(p)} - \omega_N(p)\right\} dp\,. \end{aligned} \tag{2.14}$$

Osserviamo ora che (al pari di $g(p) - \omega_N(p)$) la funzione $(-1)^m k^m(p)/(1 + k(p)) - \omega_N(p)$ è olomorfa nel semipiano $\mathcal{R}(p) > \sigma_{N+1}$ e infinitesima per $p \to \infty$.

Si ha dunque, applicando il teorema di Cauchy, $\forall l > \sigma_{N+1}$,

$$(2.15)\qquad \frac{1}{2\pi i}\int_{l-i\infty}^{l+i\infty} e^{pt}\left\{(-1)^m \frac{k^m(p)}{1+k(p)} - \omega_N(p)\right\} dp =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{l'-i\infty}^{l'+i\infty} e^{pt}\left\{(-1)^m \frac{k^m(p)}{1+k(p)} - \omega_N(p)\right\} dp$$

e quindi, per la (2.14),

$$(2.16)\qquad \{G(t) - K_m(t) - \Gamma_N(t)\}\, H(t) =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{l-i\infty}^{l+i\infty} e^{pt}\left\{(-1)^m \frac{k^m(p)}{1+k(p)} - \omega_N(p)\right\} dp \qquad \forall t \in J\,.$$

Risulta poi per la seconda delle (2.10), *supposto* $l < \sigma_N$,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{l-i\infty}^{l+i\infty} e^{pt}\,\omega_N(p)\, dp = 0 \qquad \text{per } t > 0$$

sicché, per la (2.16),

$$(2.17)\qquad \frac{1}{2\pi i}\int_{l-i\infty}^{l+i\infty} e^{pt}(-1)^m \frac{k^m(p)}{1+k(p)}\, dp = \{G(t) - K_m(t) - \Gamma_N(t)\}\, H(t) \quad \text{per } t > 0\,.$$

Posto $p = l + iy$ e tenuto conto della limitatezza di $1/(1 + k(l + iy))$, si ha inoltre (detta B_l una costante):

$$|e^{pt}(-1)^m k^m(p)/(1 + k(p))| \leqslant B_l e^{lt}\, |k(l + iy)|^m \qquad \forall y\,.$$

Dall'ipotesi di sommabilità di $|k(l + iy)|^m$, segue allora la maggiorazione:

$$(2.18)\qquad |G(t) - K_m(t) - \Gamma_N(t)| \leqslant B_l \frac{e^{lt}}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |k(l + iy)|^m\, dy = C_l e^{lt} \qquad (t \geqslant 0)\,,$$

e quindi l'integrale

$$(2.19)\qquad \int_0^\infty e^{-qt}\, |G(t) - K_m(t) - \Gamma_N(t)|\, dt$$

esiste finito $\forall q$, con $\mathcal{R}(q) > l$. Per l'arbitrarietà di $l > \sigma_{N+1}$, si conclude che $\{G(t) - K_m(t) - \Gamma_N(t)\}\, H(t)$ è $\mathcal{L}_2$-trasformabile nel semipiano $\mathcal{R}(p) > \sigma_{N+1}$. Lo

stesso avviene per la funzione $\{G(t) - \Gamma_N(t)\}\, H(t)$, poiché $K_m(t)$ è $\mathcal{L}_2$-trasformabile per $\mathcal{R}(p) > \gamma$.

Vale inoltre in $\mathcal{R}(p) > \sigma_{N+1}$, per l'analiticità, la stessa formula valida nel semipiano $\mathcal{R}(p) > \gamma'$:

$$\mathcal{L}(\{G(t) - \Gamma_N(t)\}) = \mathcal{L}_2(\{G(t) - \Gamma_N(t)\} H(t)) = g(p) - \omega_N(p) \quad (\mathcal{R}(p) > \sigma_{N+1}).$$

La (2.9) è perciò dimostrata.

Consideriamo ora la funzione $\omega_N(p)$ nel semipiano $\mathcal{R}(p) < \sigma_N$.

Si ha, per la seconda delle (2.10),

$$\omega_N(p) = \int_{-\infty}^{0} e^{-pt}(-\Gamma_N(t))\, dt = \mathcal{L}_2(-\Gamma_N(t)\, H(-t)) \qquad \mathcal{R}(p) < \sigma_N. \tag{2.20}$$

Nella striscia S_N risulta dunque provata l'eguaglianza

$$g(p) = \mathcal{L}_2(\{G(t) - \Gamma_N(t)\}\, H(t) - \Gamma_N(t)\, H(-t)) \qquad \sigma_{N+1} < \mathcal{R}(p) < \sigma_N, \tag{2.21}$$

da cui segue immediatamente la tesi del teorema. La funzione trasformanda è infatti determinata univocamente poiché la corrispondenza tra funzioni trasformande e trasformate – in una data striscia – è biunivoca.

Esiste, in conclusione, *ed è unico l'N-esimo nucleo di previsione*, $\mathcal{L}_2$-trasformabile nella striscia S_N:

$$G_N(t) = \{G(t) - \Gamma_N(t)\}\, H(t) - \Gamma_N(t)\, H(-t) \qquad (t \in J). \tag{2.22}$$

La (2.22) equivale a scrivere

$$G_N(t) = G(t) - \Gamma_N(t) \qquad (t \in J), \tag{2.23}$$

tenendo presente che $G(t) = 0$ per $t < 0$.

Se il termine noto $F(t)$, nella (1.1), è $\mathcal{L}_2$-trasformabile in una striscia $S'_N \subseteq S_N$ (e solo ivi), *la* (1.1) *ammette*, perciò, *una e una sola soluzione* $Y_N(t)$:

$$\begin{aligned} Y_N(t) &= F(t) + \int_{-\infty}^{\infty} F(\tau)\, G_N(t-\tau)\, d\tau = \\ &= F(t) + \int_{-\infty}^{t} F(\tau)\{G(t-\tau) - \Gamma_N(t-\tau)\}\, d\tau + \\ &\quad - \int_{t}^{\infty} F(\tau)\, \Gamma_N(t-\tau)\, d\tau\,. \end{aligned} \tag{2.24}$$

Se il termine noto $F(t)$ è $\mathcal{L}_2$-trasformabile in più striscie consecutive (es. $F(t) = e^{-t^2}$, …), l'equazione (1.1) ammette (in generale, cfr. il § 1) *lo stesso numero di soluzioni distinte*.

La condizione $\gamma' > \gamma$ è infine *necessaria* per l'esistenza di radici dell'equazione (2.3) nel semipiano $\mathcal{R}(p) > \gamma$.

Ammesso infatti che queste non esistano, valgono le eguaglianze (2.15) e (2.16) con $\omega_N(p) = 0$ e $\Gamma_N(t) = 0$. Esiste perciò finito l'integrale (2.19) e si deduce che il nucleo $G(t)$ è $\mathcal{L}$-trasformabile nel semipiano $\mathcal{R}(p) > \gamma$.

Indichiamo, da ultimo, alcune formule di maggiorazione, deducendole dalle (2.8) e (2.18).

Si ha

$$|e^{p_n t}| \leqslant e^{\sigma_N t} \qquad \text{per} \quad \mathcal{R}(p_n) \geqslant \sigma_N, \ t < 0$$

e quindi, per la (2.8),

$$|\Gamma_N(t) H(-t)| \leqslant A_N e^{\sigma_N t}(1 + |t|^{r_N})\, H(-t) \qquad (t \in J) \tag{2.25}$$

essendo A_N una costante dipendente dai coefficienti a_{jn}, e t^{r_N} la massima potenza di t nella (2.8).

Posto poi nella (2.18) $l = \sigma_{N+1} + \varepsilon$, con $0 < \varepsilon < \sigma_N - \sigma_{N+1}$, otteniamo la disuguaglianza:

$$|G(t) - \Gamma_N(t)|\, H(t) \leqslant \{C_l e^{(\sigma_{N+1} + \varepsilon)t} + |K_m(t)|\} H(t) \qquad (t \in J)\,. \tag{2.26}$$

Si ottiene così dalla (2.22), la maggiorazione conclusiva:

$$|G_N(t)| \leqslant \{C_l e^{(\sigma_{N+1} + \varepsilon)t} + |K_m(t)|\}\, H(t) + A_N e^{\sigma_N t}(1 + |t|^{r_N})\, H(-t) \tag{2.27}$$

la quale consente di valutare (poiché $K_m(t)$ è noto) il comportamento asintotico del nucleo $G_N(t)$, sia per $t \to -\infty$ che per $t \to +\infty$.

La (2.26) dà, in particolare una notevole relazione sul comportamento, per $t \to +\infty$, del nucleo principale $G(t)$.

Posto infatti $N = 1$, la funzione $\Gamma_1(t)$ è espressione delle *sole* singolarità di $g(p)$ sulla frontiera, $\mathcal{R}(p) = \gamma'$, del semipiano di convergenza e si ha

$$|G(t) - \Gamma_1(t)| \leqslant C_{\sigma_2 + \varepsilon} e^{(\sigma_2 + \varepsilon)t} + |K_m(t)| \qquad (t > 0) \tag{2.28}$$

con $\varepsilon > 0$, comunque piccolo.

3. - Esempi

a) *Sia*

$$k(p) = \frac{A(p)}{B(p)} = \mathcal{L}(K(t))$$

una funzione razionale, con $A(p)$ e $B(p)$ polinomi di gradi rispettivi r ed $s > r$.

Si ha

$$g(p) = -\frac{A(p)}{B(p)+A(p)} = \mathcal{L}(G(t))$$

e supponiamo che, detti γ e γ' i valori massimi delle parti reali delle radici dei polinomi $B(p)$ e $B(p)+A(p)$ (entrambi di grado s), sia

$$\gamma < \gamma' .$$

Si ripete, in questo caso, quanto detto nel § 2, tenendo presente che $G(t)$ è somma di un numero finito di funzioni del tipo $e^{p_n t} P_n(t)\, H(t)$, con $P_n(t)$ polinomio.

b) *Sia*

$$K(t) = -\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\,, \qquad \Rightarrow k(p) = -\frac{1}{\sqrt{p}}\,, \qquad \gamma = 0\,, \qquad m = 3\,.$$

La funzione

$$g(p) = \frac{1}{\sqrt{p}-1} = \mathcal{L}(G) \tag{3.1}$$

presenta, nel punto $p_1 = 1 = \gamma'$, una singolarità polare del primo ordine: risulta infatti

$$\frac{1}{\sqrt{p}-1} = \frac{2}{p-1} + \frac{1}{\sqrt{p}+1}\,. \tag{3.2}$$

Poiché $1/(p+1) = \mathcal{L}(e^{-t})$ si ha poi, per note formule [3],

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{p}}\,\frac{1}{\sqrt{p}+1} &= \int_0^\infty e^{-pt}\left(\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\int_0^\infty e^{-\tau}\, e^{-\tau^2/4t}\, d\tau\right) dt = \\
&= \int_0^\infty e^{-pt}\left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-2s\sqrt{t}-s^2}\, ds\right) dt = \\
&= \int_0^\infty e^{-pt}\,\frac{2}{\sqrt{\pi}}\left\{\left[-\frac{e^{-2s\sqrt{t}}}{2\sqrt{t}}\, e^{-s^2}\right]_0^\infty - \frac{1}{\sqrt{t}}\int_0^\infty s e^{-2s\sqrt{t}-s^2}\, ds\right\} dt = \\
&= \int_0^\infty e^{-pt}\left\{\frac{1}{\sqrt{\pi t}} - \frac{2}{\sqrt{\pi t}}\int_0^\infty s e^{-2s\sqrt{t}-s^2}\, ds\right\} dt \qquad \mathcal{R}(p) > 0
\end{aligned}$$

e quindi

$$\frac{1}{\sqrt{p}+1} = \frac{1}{\sqrt{p}} - \frac{1}{\sqrt{p}(\sqrt{p}+1)} = \mathcal{L}\left(\frac{2}{\sqrt{\pi t}}\int_0^\infty s e^{-2s\sqrt{t}-s^2}\,ds\right) \qquad \mathcal{R}(p) > 0\,.$$

Ne seguono, per le (3.1) e (3.2), le equaglianze:

$$G(t) = \left(2e^t + \frac{2}{\sqrt{\pi t}}\int_0^\infty s e^{-2s\sqrt{t}-s^2}\,ds\right) H(t) \qquad (\mathcal{R}(p) > 1)\,,$$

$$G_1(t) = \{G(t) - 2e^t\}\,H(t) - 2e^t H(-t) =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi t}}\int_0^\infty s e^{-2s\sqrt{t}-s^2}\,ds H(t) - 2e^t H(-t) \qquad (0 < \mathcal{R}(p) < 1)\,.$$

c) *Sia* (cfr. [1], §§ 2 e 3)

$$K(t) = -H(t)\,H(1-t)\,.$$

È allora

$$\begin{aligned} k(p) &= -\frac{1-e^{-p}}{p} = \mathcal{L}(K) \qquad (k(0) = -1,\ \gamma = -\infty,\ m = 2) \\ g(p) &= \frac{1-e^{-p}}{p}\,\frac{1}{1-(1-e^{-p})/p} = \frac{1-e^{-p}}{p-1+e^{-p}} = \mathcal{L}(G)\,, \end{aligned} \tag{3.3}$$

con

$$G(t) = -K(t) + K * K(t) - \ldots \geqslant 0\,.$$

Proviamo che $G(t)$ è $\mathcal{L}$-trasformabile nel semipiano $\mathcal{R} > 0$, cioè $\gamma' = 0$ (poiché $g(0) = \infty$, è necessariamente $\gamma' \geqslant 0$).

Consideriamo l'equazione

$$p - 1 + e^{-p} = 0 \qquad (p = x + iy) \tag{3.4}$$

equivalente al sistema

$$\begin{aligned} e^{-x}\cos y &= 1 - x \\ e^{-x}\sin y &= y\,. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Se (x, y) è soluzione, anche il valore coniugato $(x, -y)$ è soluzione. Possiamo perciò supporre $y \geqslant 0$.

Se $y = 0$, si ha l'equazione

$$e^{-x} = 1 - x\,,$$

che ammette la sola soluzione $x = 0$. La (3.4) ammette dunque $p_1 = 0$ come *unica* radice *reale*.

Sia ora $y > 0$. Poiché la seconda delle (3.5) dà

$$e^x = \frac{\sin y}{y} \qquad (< 1 \ \text{ per } \ y > 0),$$

non può essere $x \geqslant 0$. *Tutte* le radici, *esclusa* $p_1 = 0$, sono complesse e si trovano nel semipiano $\mathcal{R}(p) < 0$.

Poichè $G(t)$ *è* $\geqslant 0$, il punto singolare $p_1 = 0$, di $g(p)$, si trova, per un noto teorema [4], sulla retta di convergenza. È dunque provata la tesi: $\gamma' = 0$.

Sia ora $x < 0$. Posto $\xi = -x > 0$, si ha il sistema

$$\begin{aligned} e^{\xi} \cos y &= 1 + \xi \\ e^{\xi} \sin y &= y \end{aligned} \qquad (\xi > 0, \ y > 0) \tag{3.6}$$

da cui segue

$$\xi = \frac{y}{\operatorname{tg} y} - 1 = \varphi(y). \tag{3.7}$$

Sono perciò esclusi i valori dell'intervallo $0 < y < \pi/2$. Dalle (3.6) seguono poi, per y, le limitazioni

$$2n\pi < y < 2n\pi + \frac{\pi}{2} \qquad (n = 1, 2, \ldots), \tag{3.8}$$

e si ha

$$\varphi'(y) = \frac{\sin y \cos y - y}{\sin^2 y} < 0,$$

cioé $\varphi(y)$ è decrescente, in ciascun intervallo (3.8). Detta η_n la soluzione, in questo, dell'equazione $y/\operatorname{tg} y = 1$, si hanno per y e ξ le limitazioni

$$2n\pi < y \leqslant \eta_n, \qquad 0 \leqslant \xi < +\infty \qquad (n = 1, 2, \ldots), \tag{3.9}$$

nel cui ambito la (3.7) è univocamente risolubile rispetto a y. Sono definite così, $\forall n$, le funzioni

$$y = \vartheta_n(\xi) \qquad (0 \leqslant \xi < +\infty) \tag{3.10}$$

con

$$2n\pi < \vartheta_n(\xi) \leqslant \eta_n < 2n\pi + \frac{\pi}{2}, \qquad \vartheta_n(0) = \eta_n, \qquad \vartheta_n'(\xi) < 0, \qquad \Rightarrow \vartheta_n(\xi) \downarrow. \tag{3.11}$$

Dalle (3.6) ricaviamo poi l'equazione

$$e^{2\xi} = (1 + \xi)^2 + y^2$$

la quale, per la (3.10), diventa

$$e^{2\xi} - (1+\xi)^2 = \vartheta_n^2(\xi) \qquad (0 \leqslant \xi < +\infty)\,. \tag{3.12}$$

Posto

$$\lambda(\xi) = e^{2\xi} - (1+\xi)^2$$

si ha

$$\begin{aligned} &\lambda(0) = 0, \qquad \lim_{\xi\to\infty} \lambda(\xi) = +\infty\,, \\ &\lambda'(\xi) = 2(e^{2\xi} - (1+\xi)), \qquad > 0 \ \text{ per } \ \xi > 0, \quad \Rightarrow \lambda(\xi) \uparrow . \end{aligned} \tag{3.13}$$

Per le (3.11) e (3.13), si conclude che la (3.12) ha, $\forall n$, una e una sola soluzione, ξ_n. Per la (3.11) è inoltre

$$\vartheta_{n+1}(\xi_{n+1}) - \vartheta_n(\xi_n) > 2(n+1)\pi - 2n\pi - \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2}$$

e quindi, per la (3.13)

$$\xi_{n+1} > \xi_n, \qquad \lim_{n\to\infty} \xi_n = +\infty\,.$$

Ne segue

$$\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty$$

e, per le (3.9) e (3.10), posto $y_n = \vartheta_n(\xi_n)$:

$$y_n < y_{n+1}, \qquad \lim_{n\to\infty} y_n = +\infty\,.$$

La coppia (ξ_n, y_n), soluzione unica delle (3.7) e (3.12), è anche soluzione delle (3.6) e (3.8).

Abbiamo infatti

$$1 + \xi_n = \frac{y_n}{\operatorname{tg} y_n}\,, \qquad e^{2\xi_n} = \frac{y_n^2}{(\operatorname{tg} y_n)^2} + y_n^2 = \frac{y_n^2}{\sin^2 y_n}$$

e quindi (essendo $y_n/\sin y_n > 0$)

$$e^{\xi_n} = \frac{y_n}{\sin y_n}\,.$$

Anche la prima delle (3.6) è soddisfatta:

$$e^{\xi_n}\cos y_n = y_n \frac{\cos y_n}{\sin y_n} = \frac{y_n}{\operatorname{tg} y_n} = 1 + \xi_n.$$

I poli della funzione $g(p)$ costituiscono dunque la successione

$$p_1 = 0\,; \quad p_n = x_n + iy_n, \quad p_{-n} = x_n - iy_n \quad (n = 2, 3, \ldots)\,.$$

Questi poli sono tutti del primo ordine e, detta $\zeta_n(p)$ la componente olomorfa cor-

rispondente a p_n, si hanno le seguenti caratteristiche, $c_n/(p-p_n)$:

$$\frac{1-e^{-p}}{p-1+e^{-p}} = \frac{c_1}{p} + \zeta_1(p),$$

$$c_1 = \lim_{p\to 0} \frac{(1-e^{-p})\,p}{p-1+e^{-p}} = \lim_{p\to 0} \frac{pe^{-p}+1-e^{-p}}{1-e^{-p}} = \lim_{p\to 0} \frac{2e^{-p}-pe^{-p}}{e^{-p}} = 2\,;$$

$$\frac{1-e^{-p}}{p-1+e^{-p}} = \frac{c_n}{p-p_n} + \zeta_n(p),$$

$$c_n = (1-e^{-p_n}) \lim_{p\to p_n} \frac{p-p_n}{p-1+e^{-p}} = (1-e^{-p_n}) \lim_{p\to p_n} \frac{1}{1-e^{-p}} = 1\,;$$

$$c_{-n} = 1 \qquad (n=2,\,-2,\,\ldots).$$

Nel semipiano $\mathcal{R}(p) > \sigma_{N+1}$, con $N \geqslant 1$, si trovano perciò $2N-1$ singolarità polari del primo ordine, con somma delle caratteristiche

$$\omega_N(p) = \frac{2}{p} + \left(\frac{1}{p-p_2} + \frac{1}{p-p_{-2}}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{p-p_N} + \frac{1}{p-p_{-N}}\right) =$$

$$= 2\left\{\frac{1}{p} + \sum_{n=2}^{N} \frac{p+\xi_n}{(p+\xi_n)^2+y_n^2}\right\},$$

cui corrisponde la funzione

$$\Gamma_N(t) = 2\left\{1 + \sum_{n=2}^{N} e^{-\xi_n t}\cos y_n t\right\} = 2\sum_{n=1}^{N} e^{-\xi_n t}\cos y_n t\,.$$

In questo esempio troviamo, a conclusione, oltre a $G(t)$, una successione di nuclei risolventi:

$$G_N(t) = \{G(t) - \Gamma_N(t)\}H(t) - \Gamma_N(t)\,H(-t) \qquad (N=1,\,2,\,\ldots) \tag{3.14}$$

e di corrispondenti soluzioni $Y_N(t)$.

Se $\mathcal{L}_2(F)$ è olomorfa in un semipiano $\mathcal{R}(p) < \beta$, con $\beta > 0$ (ad es. $F(t) = e^{\beta t}H(-t), F(t) = e^{-t^2}, \ldots$) troviamo, oltre a $Y(t)$, una successione di soluzioni $Y_N(t)$, distinte tra loro dalle condizioni di $\mathcal{L}_2$-trasformabilità nelle striscie S_N.

Poiché $\Gamma_1(t) = 2$, $m = 2$ e $K_m(t) = -K(t) = H(t)\,H(1-t)$, si ottiene infine, per la (2.28), la maggiorazione

$$|G(t) - 2| \leqslant C_l e^{-(\xi_2-\varepsilon)t} + |K(t)| \qquad (t>0,\ l = -\xi_2+\varepsilon)$$

da cui segue (osservando che $K(t) = 0$ per $t > 1$)

$$G(t) = 2 + O(e^{-(\xi_2 - \varepsilon)t}) \qquad (t \to +\infty)$$

con $\varepsilon > 0$, arbitrario.

BIBLIOGRAFIA

[1] L. Amerio, *La trasformazione di Laplace nello studio dei problemi con memoria*, Rend. Acc. Naz. delle Scienze, Memorie di Mat. e Appl., 118° (2000), v. XXIV, p. 169-183.

[2] La dimostrazione è richiesta dalla circostanza che nella trasformazione di Laplace (come per le serie di Dirichlet) non sempre si presentano, sulla retta di convergenza, punti singolari al finito della trasformata (cfr. H. Bohr, *Einige Bemerkungen über das Konvergenzproblem Dirichletschen Reihen*, Rend. Circolo Mat. di Palermo, v. XXXVII, 1913, p. 1-16; L. Amerio, *Un esempio tipico nella teoria della trasformazione di Laplace*, Rend. Lincei, s. 6, v. XXVIII, 1938, p. 85-88.)

[3] cfr. A. Ghizzetti, A. Ossicini, *Trasformate di Laplace e Calcolo simbolico*, UTET, Torino, 1971, p. 218.

[4] Questo teorema estende alla trasformata di Laplace il teorema di Vivanti sulle serie di potenze: cfr. G. Doetsch, *Handbuch der Laplace-Transformation*, Birkhäuser, Basel, v. I, 1950, p. 153-154.

Direttore responsabile: Prof. A. Ballio - Autorizz. Trib. di Roma n. 7269 dell'8-12-1959
«Monograf» - Via Collamarini, 5 - Bologna