Rendiconti
Accademia Nazionale delle Scienze detta dei XL
Memorie di Matematica e Applicazioni
118° (2000), Vol. XXIV, fasc. 1, pagg. 237-242

GIOVANNI MATARAZZO - LAURA BUONANNO
MARIA RENNA (*)

Alcune considerazioni sul principio dell'effetto giroscopico. Un'applicazione al caso di due solidi mutuamente vincolati (**)

SUNTO. — Dopo alcune considerazioni di carattere generale, si prova che il principio dell'effetto giroscopico è applicabile al problema di due solidi mutuamente vincolati non rigidamente connessi.

Some remarks on the principle of gyroscopic effect. An application to two mutually constrained rigid bodies.

ABSTRACT. — After some general remarks we prove that the principle of gyroscopic effect is applicable to the problem of two mutually rigid bodies not rigidly connected.

Le notevoli difficoltà analitiche del sistema differenziale che caratterizza il moto di un corpo rigido hanno indotto diversi studiosi a indagare sulla possibilità di sostituire a quel sistema di equazioni uno più semplice con il quale ottenere in via di approssimazione la descrizione del moto o, almeno, la sua geometria, ovverossia la successione delle sue posizioni nello spazio. Fondamentali sono a tal fine i lavori di A. Signorini [2] , F. Stoppelli [3]-[4]-[5], S. Rionero [1] e di altri autori.

Il risultato si ottiene con il cosidetto «*Principio dell'effetto giroscopico*».

Il presente lavoro ha due scopi principali. Il primo è quello di stabilire alcune proprietà generali necessarie e sufficienti a cui deve soddisfare la sollecitazione esterna affinché il *principio* sussista, il secondo è l'applicazione al problema del moto del sistema costituito da due solidi mutuamente vincolati. Va avvertito che questa seconda parte tocca questioni ben diverse da quelle studiate dallo stesso Stoppelli [5].

(*) Indirizzo degli Autori: Dipartimento di Ingegneria dell'Informazione e Matematica Applicata, Università di Salerno, via Ponte Don Melillo I-84084 Fisciano (Sa).

(**) Memoria presentata il 2 ottobre 2000 da Giuseppe Grioli, uno dei XL.

1. - Premesse. Considerazioni generali sul Principio dell'effetto giroscopico

Sia S un corpo rigido con un punto fisso O, $T \equiv (O, \boldsymbol{i}_1, \boldsymbol{i}_2, \boldsymbol{i}_3)$ la terna principale d'inerzia di origine O (si esclude che S abbia in O struttura giroscopica) e φ, ψ, θ gli angoli di Eulero (di rotazione propria, di precessione e di nutazione) della T rispetto alla terna fissa (inerziale) $T^{(a)} \equiv (O, \boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \boldsymbol{c}_3)$. Siano, inoltre, A_i i momenti principali d'inerzia di S rispetto ad O e p_i le componenti della velocità angolare $\underline{\omega}$ nel moto rispetto alla T. Detta σ la matrice d'inerzia, risulta $\sigma_{rr} = A_r$, $\sigma_{rs} = 0$ se $r \neq s$ e, come è ben noto, detto $\boldsymbol{K}_0$ il momento delle quantità di moto rispetto ad O e $\boldsymbol{M}_0^{(e)}$ il momento risultante delle forze esterne rispetto ad O si ha

$$\boldsymbol{K}_0 = \sigma\underline{\omega}\,, \qquad \frac{d\boldsymbol{K}_0}{dt} = \boldsymbol{M}_0^{(e)}. \tag{1}$$

Si può sempre porre

$$\boldsymbol{M}_0^{(e)} = OQ \times \boldsymbol{F}\,. \tag{2}$$

Si supponga che l'asse $O\boldsymbol{i}_3$ sia di massimo o minimo momento d'inerzia. Detto Q' la proiezione di Q sull'asse $O\boldsymbol{i}_3$ e posto

$$\begin{cases} p_3^* = \left[p_3 + \dfrac{1}{A_3 p_3} \dfrac{\partial M_3}{\partial \varphi} \right]_{t=0} \\ \boldsymbol{M}_0^* = OQ' \times \boldsymbol{F} \end{cases} \tag{3}$$

il principio di approssimazione dell'effetto giroscopico consiste nel sostituire all'equazione vettoriale (1, 2) quella più semplice

$$A_3 p_3^* \frac{d\boldsymbol{i}_3}{dt} = \boldsymbol{M}_0^* = OQ \cdot \boldsymbol{i}_3\, \boldsymbol{i}_3 \times \boldsymbol{F}\,, \tag{4}$$

con l'avvertenza che ciò è valido se e solo se le coordinate di Q rispetto agli assi solidali e le componenti di $\boldsymbol{F}$ rispetto a quelli fissi non dipendono dall'angolo di rotazione propria φ pur potendo dipendere da ψ, θ e dall'atto di moto p_1, p_2, p_3, t [1]. Inoltre, va tenuto presente che in generale la (4) approssima (nel senso precisato nella teoria del principio dell'effetto giroscopico) soltanto l'aspetto geometrico del movimento.

Si ponga

$$OQ = x_l \boldsymbol{i}_l, \qquad \boldsymbol{F} = b_i \boldsymbol{c}_i. \tag{5}$$

La condizione di validità del principio consiste pertanto nella circostanza che il momento sollecitante $\boldsymbol{M}_0^{(e)}$ sia esprimibile nella forma

$$\boldsymbol{M}_0^{(e)} = x_l \mathbf{i}_l \times \boldsymbol{F} = x_l \mathbf{i}_l \times b_i \boldsymbol{c}_i, \tag{6}$$

con le x_l, b_i indipendenti da φ.

Denotando con $R = R(\varphi, \psi, \theta)$ la rotazione che muta la $T^{(a)}$ nella T risulterà

$$\boldsymbol{i}_l = R_{sl}\boldsymbol{c}_s, \tag{7}$$

e, di conseguenza,

$$\begin{cases} M_r = \boldsymbol{M}_0^{(e)} \cdot \boldsymbol{i}_r = e_{rsm} x_s b_i R_{im}, \\ M_r^* = e_{r3m} x_3 b_i R_{im}, \end{cases} \tag{8}$$

pur di indicare con e_{rsm} il tensore di Ricci dello spazio euclideo tridimensionale.

È conveniente distinguere due casi:

a) $M_3^{(e)} = 0$.

In tal caso $\boldsymbol{F}$ è incidente all'asse $O\boldsymbol{i}_3$ e si può assumere $x_1 = x_2 = 0$. Ne segue

$$M_1^{(e)} = M_1^* = -x_3 b_i R_{i2}, \qquad M_2^{(e)} = M_2^* = x_3 b_i R_{i1}, \qquad M_3^{(e)} = M_3^* = 0\,. \tag{9}$$

b) $M_3^{(e)} \neq 0$.

In tal caso $\boldsymbol{F}$ non è incidente all'asse $O\boldsymbol{i}_3$ e $x_1^2 + x_2^2 \neq 0$. Sussistono di conseguenza le (8,1) in tutta generalità, mentre è

$$M_1^* = -x_3 b_i R_{i2}, \qquad M_2^* = x_3 b_i R_{i1}, \qquad M_3^* = 0\,. \tag{10}$$

Si riconosce, pertanto che nei due casi a), b) l'equazione (4) dà luogo formalmente alle medesime due equazioni scalari

$$A_3 p_3^* p_2 = -x_3 b_i R_{i2}, \qquad A_3 p_3^* p_1 = -x_3 b_i R_{i1} \tag{11}$$

a parte la differenza, nei due casi, dell'espressione p_3^* (che nel caso $M_3^{(e)} = 0$ coincide con $p_3(0)$)

Vale la pena di osservare che dall'uguaglianza

$$\frac{\partial M_3}{\partial \varphi} = -b_i(R_{i1}x_1 + R_{i2}x_2) = \boldsymbol{F} \cdot (x_3 \boldsymbol{i}_3 - OQ) \tag{12}$$

si riconosce, che, pur di assumere la terna fissa coincidente con la posizione iniziale di quella solidale, si ha, più semplicemente,

$$\left(\frac{\partial M_3}{\partial \varphi}\right)_0 = -(b_1 x_1 + b_2 x_2)_{t=0} \tag{13}$$

con evidenti semplificazioni algoritmiche.

2. - Applicazione al caso di due solidi mutuamente vincolati

Sia S' un giroscopio di massa m' soggetto al vincolo di avere l'asse giroscopico fisso sull'asse $O\boldsymbol{i}_3$ del solido S precedentemente considerato. Sia O, $\boldsymbol{i}_1'$, $\boldsymbol{i}_2'$, $\boldsymbol{i}_3'$ una terna

T' principale di S' relativa al punto O. È evidentemente $\boldsymbol{i}_3' = \boldsymbol{i}_3$ e, detti A_i' i momenti centrali d'inerzia di S', si ha $A_1' = A_2'$. Detto $\alpha(t)$ il parametro che caratterizza la rotazione di S' sull'asse $O\boldsymbol{i}_3$ e $\underline{\omega}'$ la sua velocità angolare assoluta (cioé nel moto di S' rispetto alla terna fissa $T^{(a)}$ già introdotta), risulta

$$\underline{\omega}' = \underline{\omega}'' + \dot{\alpha}\,\boldsymbol{i}_3 \tag{14}$$

ove si indichi con $\underline{\omega}'' \equiv (p_1'', p_2'', p_3'')$, la velocità assoluta di S, anziché con $\underline{\omega}$ come prima si è fatto. Sia, inoltre, $\underline{\omega}' \cdot \boldsymbol{i}_l' = p_l'$.

Sia G' il baricentro di S', $\boldsymbol{v}_{G'}$ la sua velocità assoluta e l la sua distanza da O. Denotando con A_i'' i momenti principali d'inerzia di S anziché con A_i, come prima si è fatto, i momenti della quantità di moto $\boldsymbol{K}_0''$, $\boldsymbol{K}_0'$, di S e S' sono rispettivamente,

$$\begin{cases} \boldsymbol{K}_0'' = A_l'' p_l'' \boldsymbol{i}_l, \\ \boldsymbol{K}_0' = A_l' p_l' \boldsymbol{i}_l' + m' OG' \times \boldsymbol{v}_{G'} = A_1' (\underline{\omega}' - p_3' \boldsymbol{i}_3) + A_3' p_3' \boldsymbol{i}_3 + m' l^2 \boldsymbol{i}_3 \times (\underline{\omega}'' \times \boldsymbol{i}_3) = \\ \qquad\qquad = A_1' \underline{\omega}'' + [A_3' (p_3'' + \dot{\alpha}) - A_1' p_3''] \boldsymbol{i}_3 + m' l^2 [\underline{\omega}'' - p_3'' \boldsymbol{i}_3]. \end{cases}$$

Per il seguito si denoteranno con $\boldsymbol{M}_0''^{(a)}$, $\boldsymbol{M}_0'^{(a)}$ i momenti risultanti rispetto ad O delle forze attive rispettivamente agenti su S e S' e con $\boldsymbol{M}_0''^{(v)}$, $\boldsymbol{M}_0'^{(v)}$ quelli delle reazioni vincolari, osservando che, ritenendo i vincoli privi di attrito, risulta

$$M_3'^{(v)} = \boldsymbol{M}_0'^{(v)} \cdot \boldsymbol{i}_3' = 0\,, \qquad \boldsymbol{M}_0''^{(v)} = -\,\boldsymbol{M}_0'^{(v)}. \tag{15}$$

In base a quanto detto e tenuto conto di (15) le equazioni dinamiche che regolano il moto assoluto di S e S' sono rispettivamente

$$\frac{d\boldsymbol{K}_0''}{dt} = \sum_l A_l'' (\dot{p}_l'' \boldsymbol{i}_l + \underline{\omega}'' \times \boldsymbol{i}_l p_l'') = \boldsymbol{M}_0''^{(a)} - \boldsymbol{M}_0'^{(v)} \tag{16}$$

$$\begin{aligned} \frac{d\boldsymbol{K}_0'}{dt} &= A_1' \dot{\underline{\omega}}'' + [A_3' (\dot{p}_3'' + \ddot{\alpha}) - A_1' \dot{p}_3''] \boldsymbol{i}_3 + [A_3' (p_3'' + \dot{\alpha}) - A_1' p_3''] \underline{\omega}'' \times \boldsymbol{i}_3 + \\ &\quad + m' l^2 [(\dot{p}_1'' - p_2'' p_3'') \boldsymbol{i}_1 + (\dot{p}_2'' + p_1'' p_3'') \boldsymbol{i}_2] = \boldsymbol{M}_0'^{(a)} + \boldsymbol{M}_0'^{(v)}. \end{aligned} \tag{17}$$

Dalle (16), (17), per proiezione sugli assi della T ed eliminazione di $\boldsymbol{M}_0'^{(v)}$, si deducono le equazioni:

$$\begin{cases} (A_1'' + A_1') \dot{p}_1'' + [A_3'' - A_2'' + A_3' - A_1' - m' l^2] p_2'' p_3'' + \\ \qquad\qquad + A_3' \dot{\alpha} p_2'' + m' l^2 \dot{p}_1'' = M_1'^{(a)} + M_1''^{(a)} = M_1^{(a)} \\ (A_2'' + A_1') \dot{p}_2'' + [A_1'' - A_3'' + A_1' - A_3' + m' l^2] p_1'' p_3'' + \\ \qquad\qquad - A_3' \dot{\alpha} p_1'' + m' l^2 \dot{p}_2'' = M_2'^{(a)} + M_2''^{(a)} = M_2^{(a)} \end{cases} \tag{18}$$

$$A_3''\dot{p}_3'' + (A_2'' - A_1'')\, p_1'' p_2'' = M_3''^{(a)} \tag{19}$$

mentre, proiettando la (17) sull'asse $O\boldsymbol{i}_3$, si trova

$$A_3'\,(\dot{p}_3'' + \ddot{\alpha}) = M_3'^{(a)} \tag{20}$$

Se si pone

$$B = \int M_3'^{(a)}\, dt = A_3'\,(p_3'' + \dot{\alpha})\,, \tag{21}$$

e

$$A_1 = A_1'' + A_1' + m'\,l^2, \qquad A_2 = A_2'' + A_1' + m'\,l^2, \qquad A_3 = A_3'' + A_3' \tag{22}$$

le equazioni (18), (19) assumono l'aspetto

$$\begin{cases} A_1\dot{p}_1'' + (A_3'' - A_2)\, p_2'' p_3'' = M_1^{(a)} - Bp_2'' \\ A_2\dot{p}_2'' + (A_1 - A_3'')\, p_1'' p_3'' = M_2^{(a)} + Bp_1'' \\ A_3''\dot{p}_3'' + (A_2 - A_1)\, p_1'' p_2'' = M_3''^{(a)} \end{cases} \tag{23}$$

le quali esprimono la dinamica di un corpo rigido con un punto fisso O i cui momenti principali d'inerzia sono A_1, A_2, A_3''. Ad esso è applicabile quanto detto nella sezione 1.

Alle (23) va associata l'equazione (20).

Nel caso che $\alpha(t)$ sia assegnata essa serve per determinare $M_3'^{(a)}$ in base a (20).

Se, invece, è noto $M_3'^{(a)}$ ma non la $\alpha(t)$, la (20) fa sistema con le (23) ma il problema riesce piuttosto complesso. Per quanto detto nella sezione precedente, si conclude che *condizione necessaria e sufficiente per l'applicazione del principio dell'effetto giroscopico al solido S* [cioé al sistema (23)] *è che esistano tre funzioni b_i indipendenti dall'angolo di rotazione propria φ soddisfacenti alle equazioni*

$$\begin{cases} b_i(x_2 R_{i3} - x_3 R_{i2}) = M_1^{(a)} - Bp_2'' \\ b_i(x_3 R_{i1} - x_1 R_{i3}) = M_2^{(a)} + Bp_1'' \\ b_i(x_1 R_{i2} - x_2 R_{i1}) = M_3''^{(a)}, \end{cases} \tag{24}$$

tenendo presente che neppure le tre quantità x_i possono dipendere da φ.

Naturalmente, nel caso che $\alpha(t)$ sia assegnata nelle (24), in accordo con la (21), va posto

$$B = A_3'\,(p_3'' + \dot{\alpha})\,. \tag{25}$$

REFERENCES

[1] S. Rionero, *Sul principio dell'effetto giroscopico nel caso di forze dipendenti dall'atto di moto*, Ricerche Mat. (1959), 111-127.
[2] F. Signorini, *Complementi alla dinamica dei giroscopi e equazioni del problema completo della balistica esterna*, Atti dell'Accademia Nazionale dei Lincei, serie VIII, vol. 1, Memorie.
[3] F. Stoppelli, *Sul principio dell'effetto giroscopico*, Giorn. Mat. Battaglini (4), 4 (1951), 14-38.
[4] F. Stoppelli, *Sui fenomeni giroscopici in un solido qualsiasi*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, 21 (1952), 25-43.
[5] F. Stoppelli, *Un'osservazione sull'applicabilità del principio dell'effetto giroscopico ai sistemi di solidi mutuamente vincolati*, Ricerche di Matematica, vol. I (1952), 21-26.

Direttore responsabile: Prof. A. Ballio - Autorizz. Trib. di Roma n. 7269 dell'8-12-1959
«Monograf» - Via Collamarini, 5 - Bologna