Rendiconti
Accademia Nazionale delle Scienze detta dei XL
Memorie di Matematica e Applicazioni
118° (2000), Vol. XXIV, fasc. 1, pagg. 243-253

MOHAMED EL KADIRI (*) - SABAH HADDAD (**)

Formules de la moyenne pour les fonctions biharmoniques (***)

RÉSUMÉ. — On établit des formules de la moyenne pour les fonctions biharmoniques classiques, et on montre que toute fonction qui vérifie ces formules est biharmonique. Ces formules sont ensuite utilisées pour établir un théorème de Picard pour les fonctions biharmoniques et pour montrer que la limite d'une suite uniformément localement convergente de fonctions biharmoniques est biharmonique. On posera également le problème de la réciproque du théorème de la moyenne biharmonique.

Formule della media per funzioni biarmoniche

RIASSUNTO. — Si stabiliscono alcune «formule della media» per le funzioni biarmoniche in senso classico, e si dimostra che ogni funzione per la quale valgano queste formule è biarmonica. Queste formule sono poi impiegate per stabilire un teorema di Picard riguardante le funzioni biarmoniche e per provare che la funzione limite di una successione di funzioni biarmoniche che converga localemente in modo uniforme è ancora una funzione biarmonica.

1. - INTRODUCTION

Il est bien connu que toute fonction harmonique h dans un domaine Ω de $\boldsymbol{R}^n$ vérifie les formules de la moyenne périphérique et spatiale sur toute boule $B = B_{x,r}$ de centre $x \in \Omega$ et de rayon $r > 0$ telle que $\overline{B} \subset \Omega$:

$$h(x) = \frac{1}{\sigma_n(B)} \int_{\partial B} h(z)\, d\sigma(z)$$

(*) Indirizzo dell'Autore: B.P. 726, Salé-Tabriquet, Salé, Maroc (e-mail: elkadiri@fsr.ac.ma)
(**) 595, rue Tarfaya, El Massira 1, Temara, Maroc.
(***) Memoria presentata il 27 ottobre 2000 da Giorgio Letta, uno dei XL.

et

$$h(x) = \frac{1}{|B|} \int_B h(y)\, dy ,$$

où $\sigma_n(B)$ et $|B|$ sont respectivement l'aire de la sphère ∂B et le volume de la boule B, $d\sigma(z)$ et dy sont respectivement la mesure d'aire sur ∂B et la mesure de Lebesgue sur B.

Inversement, toute fonction continue h sur Ω qui vérifie la formule de la moyenne périphérique ou spatiale sur toute boule B d'adhérence incluse dans Ω est harmonique dans Ω.

On peut même seulement exiger de h d'être localement intégrable et de vérifier la formule de la moyenne spatiale sur certaines boules de Ω pour qu'elle soit harmonique dans Ω (on dit alors que h vérifie la propriété de la moyenne restreinte), et ceci a fait l'objet de nombreux travaux anciens et récents. Lorsque Ω est borné, Volterra [13] et Kellog [9] ont montré que cela est vrai lorsque h est continue sur $\overline{\Omega}$. Des résultats positifs ont été obtenus ensuite sous des conditions restrictives sur les rayons des boules (Feller [5], Akcoglu et Sharpe [1], Baxter[2], Heath [7], Veech [23] et [24]). Récemment Hansen et Nadirashvili [6] ont obtenu des resultats plus généraux.

Notre but dans ce travail est d'établir des formules analogues pour les fonctions biharmoniques classiques, c'est-à-dire pour les solutions de l'équation biharmonique $\Delta^2 u = \Delta(\Delta u) = 0$, et de poser le problème de la propriété de la moyenne restreinte pour les fonctions biharmoniques. Nous reviendrons à ce problème dans un travail ultérieur.

Dans tout ce travail Ω désigne un domaine de $\boldsymbol{R}^n$, $n \geqslant 1$. Tous les résultats obtenus sont évidemment vrais pour un ouvert quelconque de $\boldsymbol{R}^n$. Le mot fonction signifiera toujours, sauf mention expresse du contraire, fonction à valeurs dans $\overline{\boldsymbol{R}}$.

Tous les résultats de ce travail s'étendent sans difficulté aux fonctions polyharmoniques d'ordre $\geqslant 2$. Nous n'avons considéré le cas des fonctions biharmoniques que pour des raisons de simplicité.

2. - Formules de la moyenne pour les fonctions biharmoniques

Pour des raisons de simplicité, on se limite dans ce paragraphe aux $n \geqslant 3$; les formules obtenues sont aussi valables pour $n = 2$.

Une fonction biharmonique, au sens classique, dans un ouvert U de $\boldsymbol{R}^n$ est une fonction réelle de classe $\mathcal{C}^4$ sur U qui soit solution de l'équation biharmonique classique

$$\Delta^2 h = 0 ,$$

où Δ est l'opérateur de Laplace classique dans $\boldsymbol{R}^n$.

Soit B_0 la boule unité de $\boldsymbol{R}^n$. Le noyau de Green G_{B_0} de B_0 est donné par (voir [11],

p. 77):

$$G_{B_0}(x, y) = \begin{cases} \dfrac{1}{\|x-y\|^{n-2}} - \dfrac{1}{\|x\|^{n-2}} \dfrac{1}{\|x^* - y\|^{n-2}} & \text{si } x \neq y,\ y \neq 0\,, \\ \dfrac{1}{\|y\|^{n-2}} - 1 & \text{si } y \neq x = 0\,, \\ +\infty & \text{si } x = y\,, \end{cases}$$

où, pour $x \neq 0$, x^* est le symétrique de x par rapport à ∂B_0, donné par $x^* = \frac{1}{\|x\|^2} x$.

Pour une boule quelconque $B = B_{x,r}$ de $\boldsymbol{R}^n$ de centre x et de rayon $r > 0$, il n'est pas difficile de voir que le noyau de Green G_B de B est donné par

$$G_B(y, z) = \frac{1}{r^{n-2}} G_{B_0}(r^{-1}(y-x),\ r^{-1}(z-x))\,,$$

à cause de l'invariance du Laplacien par les isométries de l'espace euclidien $\boldsymbol{R}^n$.

Soit h une fonction biharmonique, au sens classique, dans un ouvert Ω et soit $B = B_{x,r}$ une boule ouverte de Ω de centre x et de rayon $r > 0$ telle que $\overline{B}_{x,r} \subset \Omega$.

Soit h_0 la fonction définie sur $\boldsymbol{R}^n$ par

$$h_0(y) = 2r^2 - \|y-x\|^2. \tag{1}$$

La fonction h_0 est biharmonique dans $\boldsymbol{R}^n$ et positive au voisinage de $\overline{B}$ et on a $\Delta h_0 = -2n$.

En outre, pour tout $\lambda > 0$ on a

$$\Delta(h - \lambda h_0) = \Delta h + 2\lambda n\,. \tag{2}$$

On peut donc trouver un réel λ_0 tel que $\Delta h + 2\lambda_0 n < 0$ et $h - \lambda_0 h_0 > 0$ dans $\overline{B}$, de sorte que la fonction $h - \lambda_0 h_0$ est surharmonique > 0 au voisinage de $\overline{B}$. Quitte à ajouter à h la fonction $-\lambda_0 h_0$, on va supposer qu'elle est surharmonique $\geqslant 0$ au voisinage de $\overline{B}$. Alors, d'après la décomposition de Riesz des fonctions surharmoniques on a, dans B,

$$h = \int_{\partial B} P^B(.\,, z)\, h(z)\, d\sigma(z) + G_B^{\mu}\,, \tag{3}$$

et

$$-\Delta h = -\int_{\partial B} P^B(.\,, z) \Delta h(z)\, d\sigma(z)\,; \tag{4}$$

où P^B est le noyau de Poisson de B, donné par:

$$P^B(y, z) = \frac{1}{\sigma_n r} \frac{r^2 - \|y - x\|^2}{\|y - z\|^n}, \qquad \forall (y, z) \in B \times \partial B, \tag{5}$$

μ est la mesure de densité $-\frac{1}{\sigma_n(n-2)}\Delta h$ par rapport à la mesure de Lebesgue, G_B^μ est le potentiel de Green de μ dans B, et σ_n est l'aire de la sphère unité de $\boldsymbol{R}^n$. En particulier on a, d'après (3),

$$h(x) = \int_{\partial B} P^B(x, z)\, h(z)\, d\sigma(z) + G_B^\mu(x). \tag{6}$$

D'autre part, on a

$$G_B^\mu(x) = -\frac{1}{\sigma_n(n-2)} \int_B G_B(x, y)\, \Delta h(y)\, dy \tag{7}$$

et, comme la fonction Δh est harmonique dans Ω, on a aussi

$$\Delta h = \int_{\partial B} P^B(., z)\, \Delta h(z)\, d\sigma(z), \tag{8}$$

d'où

$$G_B^\mu = -\frac{1}{\sigma_n(n-2)} \int_{\partial B} \int_B G_B(., y)\, P^B(y, z)\, dy\, \Delta h(z)\, d\sigma(z), \tag{9}$$

et donc

$$G_B^\mu(x) = -\frac{1}{\sigma_n(n-2)} \int_{\partial B} \left(\int_B G_B(x, y)\, P^B(y, z)\, dy \right) \Delta h(z)\, d\sigma(z). \tag{10}$$

En outre, on a

$$\int_B G_B(x, y)\, P^B(y, z))\, dy = \frac{1}{\sigma_n r} \int_B \frac{r^2 - \|x - y\|^2}{\|x - z\|^n} \left(\frac{1}{\|x - y\|^{n-2}} - \frac{1}{r^{n-2}} \right) dy\,; \tag{11}$$

mais l'intégrale du membre de droite de l'égalité précédente est indépendante de $z \in \partial B$ comme on peut le voir par un changement de variable simple; soit $\frac{(n-2)\,\sigma_n \alpha_n}{r^{n-2}}$ (ne dépendant que de r et n) sa valeur; alors on a

$$G_B^\mu(x) = -\frac{\alpha_n}{\sigma_n r^{n-1}} \int_{\partial B} \Delta h(z)\, d\sigma(z) \tag{12}$$

$$= -\alpha_n \Delta h(x), \tag{13}$$

car la fonction Δh est harmonique au voisinage de $\overline{B}$. On en déduit, d'après (6),

$$h(x) = \int_{\partial B} P^B(x, z)\, h(z)\, d\sigma(z) - \alpha_n \Delta h(x) \tag{14}$$

$$= \frac{1}{\sigma_n r^{n-1}} \int_{\partial B} h(z)\, d\sigma(z) - \alpha_n \Delta h(x)\,. \tag{15}$$

Appliquons cette formule à la fonction h_0. On a $h_0(x) = 2r^2$ et $\Delta h_0 = -2n$, d'où, par un calcul simple, $\alpha_n = \frac{r^2}{2n}$. Il en résulte

$$h(x) = \frac{1}{\sigma_n r^{n-1}} \int_{\partial B} h(z)\, d\sigma(z) - \frac{r^2}{2n} \Delta h(x)\,. \tag{16}$$

C'est la formule de la moyenne périphérique pour les fonctions biharmoniques. En utilisant la formule

$$\int_{B_{x,r}} h(y)\, dy = \int_0^r \left(\int_{\partial B_{x,\varrho}} h(z)\, d\sigma(z) \right) d\varrho\ ; \tag{17}$$

on en déduit également, par un calcul élémentaire, la formule:

$$h(x) = \frac{1}{|B_{x,r}|} \int_{B_{x,r}} h(y)\, dy - \frac{r^2}{2n(n+2)} \Delta h(x)\,, \tag{18}$$

où $|B_{x,r}|$ est le volume de la boule $B_{x,r}$.

Nous ignorons toutefois si les formules (16) et (18) existent dans la littérature. Nous les appellerons les formules de la moyenne biharmonique périphérique et spatiale respectivement, et nous dirons qu'une fonction h vérifie la formule de la moyenne biharmonique périphérique (resp. spatiale) sur une boule $B = B_{x,r} \subset \overline{B}_{x,r} \subset \Omega$ si elle satisfait la formule (16) (resp. (18)) relativement à B.

Nous résumons ce qui précède par l'énoncé suivant:

THÉORÈME 2.1: *Soit h une fonction biharmonique dans Ω. Alors h vérifie les formules de la moyenne biharmonique périphérique et spatiale sur toute boule ouverte $B \subset \overline{B} \subset \Omega$.*

REMARQUE: Pour une fonction harmonique dans Ω, les formules de la moyenne biharmoniques périphérique et spatiale se réduisent aux formules classiques de la moyenne pour les fonctions harmoniques.

On peut se demander si la réciproque du théorème 2.1 est vraie. Plus précisément on peut se demander si toute fonction h admettant un Laplacien dans Ω et vérifiant les formules de la moyenne biharmonique périphérique ou spatiale sur toute boule

$B \subset \overline{B} \subset \Omega$ est biharmonique dans Ω. Pour donner une réponse partielle positive, nous aurons besoin du lemme suivant:

LEMME 2.2: *Soit $n \geqslant 2$. Alors les intégrales $\int_B x_i^2 x_j^2 \, dx$ et $\int_B x_i^4 \, dx$ sont indépendantes de i et j, $1 \leqslant i, j \leqslant n$, et on a*

$$\int_B x_i^4 \, dx = 3 \int_B x_i^2 x_j^2 \, dx ,$$

où l'on a posé $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Dans la suite on notera respectivement J et K les intégrales $\int_B x_i^2 x_j^2 \, dx$ et $\int_B x_i^4 \, dx$ et on posera $I = \int_B x_i^2 \, dx$.

Nous allons commencer par le résultat particulier suivant:

THÉORÈME 2.3: *Soit h une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ dans Ω. Alors les conditions suivantes sont équivalentes*:

i) *h vérifie la formules de la moyenne périphérique biharmonique sur toute boule ouverte $B \subset \overline{B} \subset \Omega$.*

ii) *h vérifie la formules de la moyenne spatiale biharmonique sur toute boule ouverte $B \subset \overline{B} \subset \Omega$.*

iii) *h est biharmonique.*

DÉMONSTRATION: Il est facile de voir que que i) implique ii). L'implication iii) $\Rightarrow$ i) a été démontrée plus haut. Supposons que h vérifie la condition ii) et soit $B = B_{x,r}$ une boule ouverte telle que $B \subset \overline{B} \subset \Omega$. On a alors, d'après la formule de Taylor,

$$\begin{aligned} h(y) = h(x) &+ \sum_{i=1}^{n} (y_i - x_i) \frac{\partial h}{\partial x_i}(x) \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} (y_i - x_i)^2 \frac{\partial^2 h}{\partial x_i^2}(x) + \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (y_i - x_i)(y_j - x_j) \frac{\partial^2 h}{\partial x_i \partial y_j}(x) \\ &+ \frac{1}{6} \sum_{1 \leqslant i, j, k \leqslant n} (y_i - x_i)(y_j - x_j)(y_k - x_k) \frac{\partial^3 h}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}(x) \\ &+ \frac{1}{24} \sum_{1 \leqslant i, j, k, l \leqslant n} (y_i - x_i)(y_j - x_j)(y_k - x_k)(y_l - x_l) \frac{\partial^4 h}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k \partial x_l}(x) \\ &+ g(y) \end{aligned}$$

pour tout $y \in \overline{B}$, où g est une fonction continue sur $B_{x,r}$ telle que $\lim_{y \to x} \frac{g(y)}{\|y - x\|^4} = 0$.

Les fonctions $y \mapsto \sum (y_i - x_i) \frac{\partial h}{\partial x_i}(x)$, $y \mapsto \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (y_i - x_i)(y_j - x_j) \frac{\partial^2 h}{\partial x_i \partial y_j}(x)$,

$y \mapsto \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} (y_i - x_i)(y_j - x_j)(y_k - x_k) \dfrac{\partial^3 h}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}(x)$ et $y \mapsto \sum_{1 \leq i < j < k < l \leq n} (y_i - x_i)(y_j - - x_j)(y_k - x_k)(y_l - x_l) \dfrac{\partial^4 h}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k \partial x_l}(x)$, sont harmoniques dans Ω, et nulles au point x. Elles sont donc de moyenne spatiale nulle sur B. Il est facile de voir que les fonctions

$$y \mapsto \sum_{1 \leq i = j < k} (y_i - x_i)(y_j - x_j)(y_k - x_k) \frac{\partial^3 h}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}(x)$$

et

$$y \mapsto \sum_{1 \leq i < j = k} (y_i - x_i)(y_k - x_k)(y_l - x_l) \frac{\partial^3 h}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}(x)$$

sont aussi de moyenne spatiale nulle sur B.

De même, les fonctions

$$y \mapsto \sum_{1 \leq i = j < k < l \leq n} (y_i - x_i)(y_j - x_j)(y_k - x_k)(y_l - x_l) \frac{\partial^4 h}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k \partial x_l}(x),$$

$$y \mapsto \sum_{1 \leq i < j = k < l \leq n} (y_i - x_i)(y_j - x_j)(y_k - x_k)(y_l - x_l) \frac{\partial^4 h}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k \partial x_l}(x),$$

et

$$y \mapsto \sum_{1 \leq i < j < k = l \leq n} (y_i - x_i)(y_j - x_j)(y_k - x_k)(y_l - x_l) \frac{\partial^4 h}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k \partial x_l}(x)$$

sont de moyenne spatiale nulle sur B car elles sont biharmoniques dans Ω, nulles au point x et de Laplacien nul au point x; elles sont donc de moyenne nulle sur B d'après le théorème 2.1. On a donc

$$\begin{aligned}
\int_B h(y)\, dy = |B| h(x) &+ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \left[\int_B (y_i - x_i)^2 \, dy \right] \frac{\partial^2 h}{\partial x_i^2}(x) \\
&+ \frac{1}{4} \sum_{1 \leq i < j \leq n} \left[\int_B (y_i - x_i)^2 (y_j - x_j)^2 \, dy \right] \frac{\partial^4 h}{\partial^2 x_i \partial^2 x_j}(x) \\
&+ \frac{1}{24} \sum_{1 \leq i \leq n} \left[\int_B (y_i - x_i)^4 \, dy \right] \frac{\partial^4 h}{\partial x_i^4}(x) \\
&+ \int_B g(y)\, dy ,
\end{aligned}$$

d'où, d'après le lemme précédent,

$$\int_B h(y)\,dy = |B|h(x) + \frac{1}{2} I\Delta h(x)$$
$$+ \frac{1}{24} K\left[2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\partial^4 h}{\partial x_i^2\,\partial x_j^2}(x) + \sum_{1 \leq i \leq n} \frac{\partial^4 h}{\partial x_i^4}(x)\right]$$
$$+ \int_{\bar{B}} g(y)\,dy\,,$$

soit

$$\int_B h(y)\,dy = |B|h(x) + \frac{1}{2} I\Delta h(x) + \frac{1}{24} K\Delta^2 h(x) + \int_{\bar{B}} g(y)\,dy\,, \tag{19}$$

et par suite

$$h(x) = \frac{1}{|B|}\int_B h(y)\,dy - \frac{I}{2\,|B|}\Delta h(x) - \frac{K}{24B}\Delta^2 h(x) - \frac{1}{|B|}\int_B g(y)\,dy\,. \tag{20}$$

En utilisant l'égalité élémentaire

$$\frac{I}{|B|} = \frac{r^2}{n(n+2)}\,, \tag{21}$$

on trouve

$$h(x) = \frac{1}{|B|}\int_B h(y)\,dy - \frac{r^2}{2n(n+2)}\Delta h(x) - \frac{K}{24\,|B|}\Delta^2 h(x) - \frac{1}{|B|}\int_B g(y)\,dy\,. \tag{22}$$

Or, puisque h vérifie la formule de la moyenne biharmonique spatiale sur B, on a

$$\Delta^2 h(x) = \frac{24}{K}\int_B g(y)\,dy\,. \tag{23}$$

En faisant tendre r vers 0, on obtient donc $\Delta^2 h(x) = 0$. Le théorème est ainsi démontré.

Remarque: On voit d'après ce qui précède que pour qu'une fonction h de classe $\mathcal{C}^\infty$ dans Ω soit biharmonique il faut et il suffit que, pour tout $x \in \Omega$, h vérifie la formule de la moyenne biharmonique spatiale sur une suite (B_n) de boules de centre x et de rayons tendant vers 0.

LEMME 2.4: *Soit T une distribution sur Ω telle que $\Delta^2 T = 0$. Alors T est une fonction presque partout égale (pour la mesure de Lebesgue) à une fonction biharmonique dans Ω.*

DÉMONSTRATION: Le lemme résulte aussitôt du caractère hypoelliptique de l'opérateur de Laplace.

Nous pouvons maintenant établir le résultat général suivant:

THÉORÈME 2.5: *Soit h une fonction localement intégrable dans Ω dont le Laplacien au sens des distributions soit une fonction. Alors les conditions suivantes sont équivalentes*:

i) *h est presque partout égale à une fonction biharmonique dans Ω.*

ii) *Pour presque tout $x \in \Omega$, on a*

$$h(x) = \frac{1}{\sigma_n r^{n-1}} \int_{\partial B} h(z)\, d\sigma(z) - \frac{r^2}{2n} \Delta h(x)$$

pour toute boule $B = B_{x,r} \subset \overline{B}_{x,r} \subset \Omega$.

iii) *Pour presque tout $x \in \Omega$, on a*

$$h(x) = \frac{1}{|B_{x,r}|} \int_{B_{x,r}} h(z)\, dz - \frac{r^2}{2n(n+2)} \Delta h(x)\,,$$

pour toute boule $B = B_{x,r} \subset \overline{B}_{x,r} \subset \Omega$.

DÉMONSTRATION: L'implication i) $\Rightarrow$ ii) résulte aussitôt du théorème précédent. L'implication ii) $\Rightarrow$ iii) s'obtient par un calcul d'intégrale simple. Montrons l'implication iii) $\Rightarrow$ i). Soit $(\theta_\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$ une famille régularisante de fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ dans $\boldsymbol{R}^n$, à supports compacts, telle que $\operatorname{Supp}(\theta_\varepsilon) \subset B_{0,\varepsilon}$ et $\int \theta_\varepsilon(x)\, dx = 1$ pour tout $\varepsilon > 0$. Pour tout $\varrho > 0$ posons

$$\Omega_\varrho = \{x \in \Omega : d(x, C\Omega) > \varrho\}\,,$$

alors on a, pour ε suffisemment petit,

$$h * \theta_\varepsilon(x) = \frac{1}{|B_{x,r}|} \int_{B_{x,r}} h * \theta_\varepsilon(z)\, dz - \frac{r^2}{2n(n+2)} \Delta(h * \theta_\varepsilon)(x)\,, \tag{24}$$

pour toute boule $B_{x,r} \subset \overline{B}_{x,r} \subset \Omega$. On voit donc que la fonction $h * \theta_\varepsilon$, de classe $\mathcal{C}^\infty$, est biharmonique dans Ω_ϱ d'après le théorème précédent. Quand ε tend vers 0, les fonctions harmoniques $\Delta(h * \theta_\varepsilon)$, uniformément localement bornées, convergent localement uniformément vers une fonction harmonique k dans Ω_ϱ; les fonctions $h * \theta_\varepsilon$ tendent en topologie de $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega_\varrho, dx)$ vers h, donc, au sens des distributions, on a $\Delta h = k$.

Il en résulte alors, d'après le lemme 2.4, que la fonction h est presque partout égale à une fonction biharmonique dans Ω_ϱ. Comme ϱ est arbitraire, on en déduit que h est presque partout égale à une fonction biharmonique dans Ω.

COROLLAIRE: *Soit h une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ dans un ouvert Ω. Alors les conditions suivantes sont équivalentes*:

i) *h vérifie la formule de la moyenne biharmonique périphérique sur toute boule $B \subset \overline{B} \subset \Omega$.*

ii) *h vérifie la formule de la moyenne biharmonique spatiale sur toute boule $B \subset \overline{B} \subset \Omega$.*

On note G_Ω le noyau de Green de Ω, et on définit le noyau borélien V sur Ω par

$$Vf(x) = \int G_\Omega(x, y)\, f(y)\, dy\,, \qquad \forall x \in \Omega\,,$$

pour toute fonction borélienne $\geqslant 0$ sur Ω.

THÉORÈME 2.6: *Si k est une fonction harmonique $\geqslant 0$ sur Ω telle que $Vk \neq +\infty$, alors la fonction Vk est biharmonique dans Ω.*

DÉMONSTRATION: Il est clair que la fonction Vk est surharmonique $\geqslant 0$. D'autre part, on a $\Delta^2(Vk) = 0$, donc, d'après le lemme 2.4, Vk est presque partout égale à une fonction biharmonique h. On en déduit que h est surharmonique, d'où $Vk = h$ partout dans Ω, et le théorème est démontré.

On peut maintenant poser le problème suivant:

PROBLÈME: Soit h une fonction admettant des dérivées partielles secondes $\frac{\partial^2 h}{\partial x_1^2}, \ldots, \frac{\partial^2 h}{\partial x_n^2}$ dans un domaine Ω de $\boldsymbol{R}^n$, et telle que, pour tout $x \in \Omega$, il existe une boule ouverte $B_{x,\, r(x)}$ de centre x et d'adhérence contenue dans dans Ω telle que

$$h(x) = \frac{1}{|B_{x,\, r(x)}|} \int_{B_{x,\, r(x)}} h(y)\, dy - \frac{r(x)^2}{2n(n+2)} \Delta h(x)\,, \tag{25}$$

est-ce que h est biharmonique dans Ω?

3. - APPLICATIONS

Nous allons donner ici quelques applications des formules de la moyenne biharmonique.

Nous commençons par un théorème de Picard pour les fonctions biharmoniques:

THÉORÈME 3.1: *Si h est une fonction biharmonique bornée sur $\boldsymbol{R}^n$, alors h est constante.*

DÉMONSTRATION: Supposons que $\sup_{x \in \boldsymbol{R}^n} |h(x)| = M < +\infty$. On déduit aussitôt de la formule de la moyenne biharmonique spatiale (ou périphérique) sur une boule $B = B_{x,r}$ de $\boldsymbol{R}^n$, que $|\Delta h(x)| \leqslant \frac{4n(n+2)}{r^2} M$ pour tout $x \in \boldsymbol{R}^n$. En faisant tendre r vers $+\infty$, on obtient $\Delta h(x) = 0$, de sorte que h est une fonction harmonique bornée, donc constante d'après le théorème classique de Picard.

Comme pour les fonctions harmoniques, nous avons aussi le théorème de convergence de type Harnack suivant:

THÉORÈME 3.2: *Soit (h_n) une suite de fonctions biharmoniques dans Ω qui converge uniformément localement dans Ω vers une fonction h. Alors h est biharmonique dans Ω.*

DÉMONSTRATION: On déduit aussitôt de la formule de la moyenne biharmonique spatiale (ou périphérique) que les fonctions harmoniques Δh_n convergent uniformément localement vers une fonction harmonique k dans Ω. Il en résulte que la fonction h est de classe $\mathcal{C}^2$ et que l'on a $\Delta h = k$, de sorte que h est biharmonique dans Ω.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[1] M. A. AKCOGLU - R. W. SHARPE, *Ergodic theory and boundaries*, Trans. Amer. Math. Soc., 132 (1968), 447-460.

[2] J. R. BAXTER, *Restricted mean values and harmonic functions*, Trans. Amer. Math. Soc., 167 (1972), 451-463.

[3] M. EL KADIRI, *Représentation intégrale dans le cadre de la théorie axiomatique des fonctions biharmoniques*, Revue Roumaine des Math. Pures et Appl., vol. 42 (1997).

[4] M. EL KADIRI, *Frontière de Martin biharmonique et représentation intégrale des fonctions biharmoniques positives*, a paraître dans Positivity.

[5] W. FELLER, *Boundaries induced by non-negative matrices*, Trans. Amer. Math. Soc., 83 (1956), 19-54.

[6] W. HANSEN - N. NADIRASHVILI, *A converse to the mean value theorem for harmonic functions*, Acta Math., 171 (1993), 139-163.

[7] D. HEATH, *Functions possesing restricted mean value properties*, Proc. Amer. Math. Soc., 41 (1973), 588-595.

[8] L. L. HELMS, *Introduction to Potential Theory, Wiley-Interscience*, 1969.

[9] O. D. KELLOG, *Converses of Gausse's theorem on the arithmetic mean*, Trans. Amer. Math. Soc., 36 (1934), 227-242.

[10] M. NICOLESCU, *Les fonctions polyharmoniques*, Paris, Hermann, 1936.

[11] W. A. VEECH, *A zero-one law for a class of random walks and a converse to Gauss' mean value theorem*, Ann. of Math., 97 (1973), 189-216.

[12] W. A. VEECH, *A converse to the mean value theorem for harmonic functions*, Amer. J. Math., 97 (1975), 1007-1027.

[13] V. VOLTERRA, *Alcune osservationi sopra proprietà atte a individuare una funzione*, Atti della Reale Accademia dei Lincei, 18 (1909), 263-266.

Direttore responsabile: Prof. A. Ballio - Autorizz. Trib. di Roma n. 7269 dell'8-12-1959
«Monograf» - Via Collamarini, 5 - Bologna