Rendiconti
Accademia Nazionale delle Scienze detta dei XL
Memorie di Matematica e Applicazioni
118° (2000), Vol. XXIV, fasc. 1, pagg. 255-268

IRENE CRIMALDI - GIORGIO LETTA (*)

Sur la tribu borélienne de l'espace de Skorohod (**)

RÉSUMÉ. — Dans le chapitre VII de [3], consacré à l'espace de Skorohod, l'auteur introduit tout d'abord un espace un peu plus grand: à savoir l'espace constitué par les fonctions réglées, définies dans $[0, 1]$, pour lesquelles chaque point de $]0, 1[$ est, soit un point de continuité à droite, soit un point de continuité à gauche (le type de continuité pouvant dépendre du point considéré). Dans le présent article, après avoir montré que la définition et un certain nombre de propriétés de la topologie de Skorohod s'étendent de manière quasi automatique à cet espace plus grand, on prouve qu'il n'en est pas de même pour les propriétés concernant la tribu borélienne: dans le nouveau cadre, non seulement la tribu borélienne n'est plus engendrée par les projections canoniques, mais celles-ci ne sont même pas boréliennes.

Sulla tribù boreliana dello spazio di Skorohod

RIASSUNTO. — Nel capitolo VII di [3], dedicato allo spazio di Skorohod, l'autore considera dapprima uno spazio un po' più grande: precisamente, lo spazio costituito dalle funzioni limitate e prive di discontinuità oscillatorie, definite su $[0, 1]$, per le quali ciascun punto di $]0, 1[$ è un punto di continuità a destra o di continuità a sinistra (il tipo di continuità potendo variare da punto a punto). Nel presente articolo, dopo aver mostrato che la definizione e un certo numero di proprietà della topologia di Skorohod si estendono in modo quasi automatico a questo spazio più grande, si prova che, al contrario, le proprietà riguardanti la tribù boreliana non si conservano in questo nuovo quadro: non soltanto la tribù boreliana non è più generata dalle proiezioni canoniche, ma queste non sono più boreliane.

0. - INTRODUCTION

Il est bien connu que, dans l'étude des processus stochastiques à trajectoires discontinues (et notamment dans les questions de *convergence en loi* concernant de tels

(*) Indirizzi degli Autori: I. Crimaldi: Scuola Normale Superiore, Piazza dei Cavalieri 7, I-56126 Pisa. E-mail: irene@venus.sns.it; G. Letta: Dipartimento di Matematica, Via F. Buonarroti 2, I-56127 Pisa. E-mail: letta@dm.unipi.it

(**) Memoria presentata il 29 ottobre 2000 da Giorgio Letta, uno dei XL.

processus), un rôle très important est joué par l'espace de Skorohod. Si l'on se borne aux processus admettant l'intervalle $[0, 1]$ pour ensemble des temps, on peut définir cet espace comme étant l'ensemble D constitué par les fonctions réelles, définies dans $[0, 1]$, qui sont continues à droite en tout point de $[0, 1[$ et qui possèdent une limite à gauche (finie) en tout point de $]0, 1]$.

Sur l'espace D on peut introduire une distance d de la manière suivante: on désigne par ι l'application identique de $[0, 1]$ et par Λ l'ensemble constitué par les homéomorphismes croissants de $[0, 1]$ sur lui même; pour tout élément λ de Λ et tout couple f, g d'éléments de D, on commence par poser

$$d(\lambda;\, f, g) = \|f \circ \lambda - g\| \vee \|\lambda - \iota\| \tag{0.1}$$

(où $\|\cdot\|$ désigne la norme uniforme); on pose ensuite

$$d(f, g) = \inf_{\lambda \in \Lambda} d(\lambda;\, f, g)\,. \tag{0.2}$$

L'espace D est habituellement considéré comme muni de la topologie définie par cette distance (*topologie de Skorohod*). Il est bien connu que la distance d n'est pas complète, mais qu'il existe sur D une distance complète d_* induisant la même topologie. Pour définir une telle distance, il suffit de poser, pour tout élément λ de Λ,

$$\|\lambda\|_* = \sup_{s \neq t} \left| \log \frac{\lambda(t) - \lambda(s)}{t - s} \right| \tag{0.3}$$

et de remplacer les relations (0.1), (0.2) par les deux relations suivantes

$$d_*(\lambda;\, f, g) = \|f \circ \lambda - g\| \vee \|\lambda\|_*\,, \tag{0.4}$$

$$d_*(f, g) = \inf_{\lambda \in \Lambda} d_*(\lambda;\, f, g)\,. \tag{0.5}$$

Dans le Chap. VII de [3], consacré à l'espace de Skorohod, l'auteur commence par considérer un espace *en peu plus grand* que l'espace D que l'on vient de décrire: à savoir, l'espace, que nous désignerons par E, constitué par les fonctions réelles f définies dans $[0, 1]$ et possédant les deux propriétés suivantes:

(0.6) *La fonction f admet une limite à droite (finie) en tout point de l'intervalle semi-ouvert* $[0, 1[$, *ainsi qu'une limite à gauche (finie) en tout point de l'intervalle semi-ouvert* $]0, 1]$.

(0.7) *Chaque point de l'intervalle ouvert* $]0, 1[$ *est, pour f, soit un point de continuité à droite, soit un point de continuité à gauche (le type de continuité pouvant dépendre du point considéré).*

On remarquera que ces deux propriétés n'imposent aucune contrainte aux valeurs de la fonction f aux extrémités $0, 1$ de l'intervalle de définition.

Nous nous proposons de montrer que si l'on étend la définition du symbole

$d(f, g)$ donnée par les formules (0.1), (0.2), du cas d'un couple (f, g) d'éléments de D au cas d'un couple d'éléments de E, on définit encore une distance. En outre, l'espace métrique obtenu en munissant E de cette distance est doué de propriétés analogues à celles qui sont énoncées pour D dans [1] (p. 109-115) ou dans [2] (§ 1). Cependant, nous montrerons que les résultats concernant la tribu borélienne de D ne s'étendent pas à la tribu borélienne de E. De façon plus précise, nous montrerons que, non seuleument la tribu borélienne de E ne coïncide pas avec la tribu engendrée sur E par les projections canoniques, mais que celles-ci ne sont même pas boréliennes.

1. - La distance d sur l'espace E

Si f est un élément de E (c'est-à-dire une fonction réelle définie dans $[0, 1]$ et vérifiant les conditions (0.6), (0.7)), nous poserons

$$f_-(t) = \lim_{s \to t,\, s < t} f(s) \quad \text{pour } 0 < t \leqslant 1 ,$$

$$f_+(t) = \lim_{s \to t,\, s > t} f(s) \quad \text{pour } 0 \leqslant t < 1 .$$

En outre, nous appellerons *fonction constante par morceaux* une fonction réelle f, définie dans $[0, 1]$, pour laquelle il existe une partition finie $\mathcal{P}$ de l'intervalle ouvert $]0, 1[$, constituée d'intervalles non dégénérés et telle que f soit constante sur chaque intervalle de $\mathcal{P}$. Une telle fonction appartient évidemment à l'espace E et n'admet qu'un nombre fini de points de discontinuité.

(1.1) Proposition: *Soit f une fonction appartenant à E. Alors f est limite uniforme d'une suite de fonctions constantes par morceaux. Par conséquent, f est bornée et admet un ensemble au plus dénombrable de points de discontinuité.*

La proposition qu'on vient d'énoncer est une conséquence immédiate du lemme suivant.

(1.2) Lemme: *Soit f une fonction appartenant à E, et soit ε un nombre réel strictement positif. Il existe alors une partition finie $\mathcal{P}$ de l'intervalle ouvert $]0, 1[$, constituée d'intervalles non dégénérés et telle que l'oscillation de f sur chaque intervalle de $\mathcal{P}$ soit majorée par ε.*

Démonstration: Désignons par $\mathcal{J}$ l'ensemble constitué par les intervalles J, non dégénérés, tels que l'intersection $J \cap]0, 1[$ ne soit pas vide et que l'oscillation de f sur cette intersection soit majorée par ε. Chacune des extrémités $0, 1$ admet comme voisinage un élément de $\mathcal{J}$, tandis que chaque point de $]0, 1[$ admet comme voisinage la réunion de deux éléments de $\mathcal{J}$. Il en résulte que l'intervalle compact $[0, 1]$ est contenu dans la réunion d'un nombre fini d'éléments de $\mathcal{J}$. Cela suffit pour conclure.

(1.3) THÉORÈME: *La fonction d qui à tout couple (f, g) d'éléments de E associe le nombre $d(f, g)$ défini par les relations* (0.1) (0.2) est une distance sur E.

DÉMONSTRATION: La propriété $d(f, g) = d(g, f)$ est évidente, et l'inégalité triangulaire est facile à vérifier. Il reste à prouver qu'étant donné un couple (f, g) d'éléments de E avec $d(f, g) = 0$, on a forcément $f = g$. À cet effet, choisissons une suite (λ_n) d'éléments de Λ avec

$$\lim_n d(\lambda_n;\ f, g) = 0\ .$$

Soit t un élément de $[0, 1]$. Si t est l'une des extrémités $0, 1$, ou bien si f est continue au point t, alors les relations

$$|\lambda_n(t) - t| \leqslant d(\lambda_n;\ f, g)\,, \qquad |f(\lambda_n(t)) - g(t)| \leqslant d(\lambda_n;\ f, g)$$

entraînent, par passage à la limite, $|f(t) - g(t)| = 0$. On voit ainsi que les deux fonctions f, g coïncident sur un ensemble partout dense dans $[0, 1]$ contenant la frontière $\{0, 1\}$. Il en résulte notamment qu'en tout point s de l'intervalle ouvert $]0, 1[$ elles admettent une même limite à gauche et une même limite à droite (donc une même valeur si elles sont toutes les deux continues à droite au point s ou toutes les deux continues à gauche au point s). Il reste à prouver que les deux fonctions coïncident aussi en tout point s de $]0, 1[$ où l'une est continue à droite et l'autre est continue à gauche. En raisonnant par l'absurde, supposons que s est un point de $]0, 1[$ auquel f est continue à droite et g continue à gauche, et tel que l'on ait, par exemple, $g(s) < f(s)$. Choisissons un couple a, b de nombres réels avec

$$g(s) < a < b < f(s)\,.$$

Puisqu'au point s les deux fonctions admettent $g(s)$ comme limite à gauche et $f(s)$ comme limite à droite, il existe un voisinage de s de la forme $[s - \varepsilon, s + \varepsilon]$ contenu dans $]0, 1[$ et tel que chacune des deux fonctions soit majorée par a sur $[s - \varepsilon, s[$ et minorée par b sur $]s, s + \varepsilon]$. Pour tout entier n tel que l'on ait $\|\lambda_n - \iota\| < \varepsilon$, posons

$$J_n = \{t \in [s - \varepsilon, s + \varepsilon[: \lambda_n(t) < s\}\,.$$

Alors J_n est un intervalle contenu dans $[s - \varepsilon, s + \varepsilon[$, admettant $s - \varepsilon$ comme plus petit élément, et n'admettant pas de plus grand élément. On a donc $J_n \neq [s - \varepsilon, s]$, de sorte que deux cas seulement sont possibles:

Premier cas: l'ensemble $J_n \cap [s - \varepsilon, s]^c = J_n \cap]s, s + \varepsilon[$ n'est pas vide. Dans ce cas, s'il on choisit un élément t dans cet ensemble, on a (compte tenu de l'inégalité $|\lambda_n(t) - t| < \varepsilon$)

$$s + \varepsilon > t > s > \lambda_n(t) > t - \varepsilon > s - \varepsilon\ ,$$

et par conséquent $f(\lambda_n(t)) \leqslant a < b \leqslant g(t)$.

Deuxième cas: l'ensemble $[s-\varepsilon, s] \cap J_n^c = [s-\varepsilon, s] \cap \{t : \lambda_n(t) \geqslant s\}$ n'est pas vide. Dans ce cas, s'il on choisit un élément t dans cet ensemble, on a

$$s-\varepsilon \leqslant t \leqslant s \leqslant \lambda_n(t) < t+\varepsilon \leqslant s+\varepsilon ,$$

et par conséquent (compte tenu du fait qu'au point s la fonction g est continue à gauche et la fonction f est continue à droite) $g(t) \leqslant a < b \leqslant f(\lambda_n(t))$.

En tout cas, on a $d(\lambda_n;\, f, g) \geqslant b-a$. On en déduit (en faisant tendre n vers l'infini) $d(f, g) \geqslant b-a > 0$, ce qui contredit l'hypothèse. Le théorème est donc prouvé.

Dans toute la suite, nous considérerons l'espace E comme muni de la topologie définie par la distance d du théorème précédent. (On remarquera que cette distance induit sur le sous-espace D la topologie de Skorohod.)

La relation $\|f\| = d(f, 0)$ montre que la fonctionnelle $f \mapsto \|f\|$ est continue sur E. Pour qu'une suite (f_n) d'éléments de E converge vers un élément f de E, il faut et il suffit qu'il existe une suite (λ_n) d'éléments de Λ, convergeant uniformément vers ι, telle que $(f_n \circ \lambda_n)$ converge uniformément vers f.

On remarquera que, si une suite (f_n) d'éléments de E converge *uniformément* vers une fonction f, celle-ci appartient à E; en outre, elle est la limite de (f_n) pour la topologie de E, grâce à la relation

$$d(f_n, f) \leqslant d(\iota;\, f_n, f) = \|f_n - f\| .$$

(1.4) Remarque: Soit (f_n) une suite d'éléments de E qui converge, dans E, vers une fonction limite f, et soit (λ_n) une suite d'éléments de Λ avec $\lim_n d(\lambda_n;\, f, f_n) = 0$. Alors la relation

$$\begin{aligned} |f_n(t) - f(t)| &\leqslant |f_n(t) - f(\lambda_n(t))| + |f(\lambda_n(t)) - f(t)| \\ &\leqslant d(\lambda_n;\, f, f_n) + |f(\lambda_n(t)) - f(t)| \end{aligned}$$

montre que la suite (f_n) converge vers f en tout point t qui est un point de continuité pour f ou qui est l'une des extrémités de $[0, 1]$. Il en résulte notamment que, si μ est une mesure bornée et diffuse sur la tribu borélienne de $[0, 1]$, la suite (f_n) converge vers f dans $L^p(\mu)$ (pour $1 \leqslant p < \infty$). Par conséquent, la fonctionnelle $f \mapsto \|f\|_{L^p(\mu)}$ est continue pour la topologie de E.

En outre, si la fonction limite f est continue (donc uniformément continue), alors la suite (f_n) converge *uniformément* vers f.

La convergence de (f_n) vers f pour la topologie de E n'entraîne pas forcément la convergence simple de (f_n) verso f. De façon plus précise, on a le résultat suivant:

(1.5) Proposition: *Soit f un élément de E, non continu à gauche* (resp. *à droite*) *en un point t de* $]0, 1[$. *On peut alors construire une suite d'éléments de E qui converge*

vers f pour la topologie de E, mais qui converge au point t vers $f_-(t)$ (resp. $f_+(t)$).

DÉMONSTRATION: On se bornera au cas où la fonction f n'est pas continue à gauche au point t (l'autre cas étant tout-à-fait analogue). Soit (t_n) une suite de nombres strictement compris entre 0 et t, convergeant vers t. Pour tout n, désignons par λ_n la fonction (appartenant à Λ) qui est linéaire affine sur chacun des deux intervalles $[0, t]$, $[t, 1]$ et qui vaut t_n au point t. En outre, posons $f_n = f \circ \lambda_n$. On a alors

$$d(\lambda_n;\ f, f_n) = \|\lambda_n - \iota\| = t - t_n,$$

de sorte que la suite (f_n) converge vers f pour la topologie de E. Cependant, la relation $f_n(t) = f(\lambda_n(t)) = f(t_n)$ montre que la suite $(f_n(t))$ converge vers $f_-(t)$.

(1.6) REMARQUE: Soit (f_n) une suite d'éléments de E qui converge dans E vers une fonction f, ma qui ne converge pas vers f *de manière uniforme*. Alors la suite $(f_n - f)$ est dépourvue de limite pour la topologie de E. En effet, si l'on suppose que $(f_n - f)$ converge dans E vers une fonction h, alors la Remarque (1.4) montre que h est nulle aux extrémités 0 et 1, ainsi que sur le complémentaire d'une partie dénombrable de $]0, 1[$. Par conséquent, h est identiquement nulle. Mais alors, grâce encore à la Remarque (1.4), la suite $(f_n - f)$ converge uniformément vers zéro, contrairement à l'hypothèse.

Afin de démontrer que l'espace E est séparable, il est utile de démontrer d'abord la proposition suivante:

(1.7) PROPOSITION: *Soit f un élément de E, n'ayant qu'un nombre fini de points de discontinuité. Il existe alors, pour tout $\varepsilon > 0$, un élément λ de Λ, avec $\|\lambda - \iota\| < \varepsilon$, tel que les points de discontinuité de $f \circ \lambda$ soient tous rationnels.*

DÉMONSTRATION: Soient $s_1, \ldots, s_n$, avec $0 < s_1 < \ldots < s_n < 1$, les points de $]0, 1[$ qui sont de discontinuité pour f. Choisissons, pour tout indice i, un voisinage $[a_i, b_i]$ de s_i, contenu dans $]0, 1[$, de telle manière que les intervalles $[a_i, b_i]$ soient deux à deux disjoints. En outre, choisissons dans $]a_i, b_i[$ un point rationnel r_i avec $|r_i - s_i| < \varepsilon$. Désignons enfin par λ l'élément de Λ caractérisé par les deux propriétés suivantes:

(*a*) λ coïncide avec l'application identique ι hors de la réunion des intervalles $[a_i, b_i]$.

(*b*) Pour tout indice i, on a $\lambda(r_i) = s_i$ et la restriction de λ a chacun des deux intervalles $[a_i, r_i]$, $[r_i, b_i]$ est linéaire affine.

On a alors $\|\lambda - \iota\| = \sup_i |r_i - s_i| < \varepsilon$. En outre, les seuls points de $]0, 1[$ qui sont de discontinuité pour $f \circ \lambda$ sont les points rationnels $r_i = \lambda^{-1}(s_i)$.

(1.8) COROLLAIRE: *Toute fonction f constante par morceaux est limite, dans E, d'une suite de fonctions constantes par morceaux, dont chacune ne prend que des valeurs rationnelles et n'admet que des points de discontinuité rationnels.*

DÉMONSTRATION: La fonction f est limite uniforme de fonctions constantes par morceaux, à valeurs rationnelles, dont chacune admet les mêmes points de discontinuité que f. Sans diminuer la généralité, on pourra donc supposer que la fonction f est, elle même, à valeurs rationnelles. Il résulte de la proposition précédente qu'il existe, pour tout $\varepsilon > 0$, un élément λ de Λ, avec $\|\lambda - \iota\| < \varepsilon$, tel que les points de discontinuité de $f \circ \lambda$ soient rationnels. On voit alors que $f \circ \lambda$ est une fonction constante par morceaux, à valeurs rationnelles, et que l'on a

$$d(f, f \circ \lambda) \leqslant d(\lambda;\ f, f \circ \lambda) = \|\lambda - \iota\| < \varepsilon\ .$$

Cela suffit pour conclure.

En tenant compte de la Proposition (1.1) et du corollaire précédent, il est facile maintenant de démontrer la séparabilité de l'espace E.

(1.9) PROPOSITION: *Dans l'espace E, les fonctions constantes par morceaux, à valeurs rationnelles et n'admettant que des points de discontinuité rationnels, forment un ensemble dénombrable partout dense. Par conséquent, l'espace E est séparable.*

2. - LA DISTANCE d_* SUR L'ESPACE E

Exactement comme pour l'espace D, on voit que l'espace E n'est pas complet pour la distance d, mais qu'il existe sur E une distance complète d_* induisant sur E la même topologie. En fait, pour obtenir une telle distance, il suffit d'étendre la définition du symbole $d_*(f, g)$ donnée par les formules (0.3), (0.4), (0.5), du cas d'un couple (f, g) d'éléments de D, au cas d'un couple d'éléments de E. Dans le présent paragraphe, nous nous proposons de démontrer cette assertion.

Tout d'abord, pour prouver que d_* est effectivement une distance sur E, il suffit de répéter les raisonnements employés dans le paragraphe précédent à propos de la distance d et de tenir compte des relations suivantes:

$$\|\lambda^{-1}\|_* = \|\lambda\|_*, \qquad \|\lambda_1 \circ \lambda_2\|_* \leqslant \|\lambda_1\|_* + \|\lambda_2\|_*.$$

Il reste à prouver que la distance d_* est complète et topologiquement équivalente à la distance d. À cet effet, il nous sera commode de poser, pour tout élément f de E et tout nombre réel r strictement positif,

$$B(f, r) = \{g \in E : d(g, f) < r\}, \qquad B_*(f, r) = \{g \in E : d_*(g, f) < r\}.$$

L'équivalence topologique annoncée est une conséquence facile des deux lemmes suivants.

(2.1) Lemme: *Soit λ un élément de Λ, avec $\|\lambda\|_* \leqslant 1/2$. On a alors*

$$\|\lambda - \iota\| \leqslant 2\|\lambda\|_* .$$

Démonstration: Il convient d'abord de remarquer que la convexité de la fonction exponentielle entraîne les deux inégalités suivantes:

$$1 - 2x \leqslant \exp(-x) \text{ pour } x \geqslant 0, \quad \exp(x) \leqslant 1 + 2x \text{ pour } 0 \leqslant x \leqslant 1/2 .$$

Fixons maintenant un élément t de $]0, 1]$. La définition de $\|\lambda\|_*$ implique alors

$$\left| \log \frac{\lambda(t)}{t} \right| \leqslant \|\lambda\|_* ,$$

c'est-à-dire

$$\exp(-\|\lambda\|_*) \leqslant \lambda(t)/t \leqslant \exp(\|\lambda\|_*) .$$

In en résulte, grâce à la remarque initiale,

$$1 - 2\|\lambda\|_* \leqslant \lambda(t)/t \leqslant 1 + 2\|\lambda\|_* ,$$

et par conséquent $|\lambda(t) - t| \leqslant 2t\|\lambda\|_* \leqslant 2\|\lambda\|_*$. Le lemme est ainsi démontré.

(2.2) Lemme: *Pour tout nombre réel δ strictement positif, posons*

$$h(\delta) = \sup\{|\log x| : x > 0, \ |x - 1| \leqslant \delta\} . \tag{2.3}$$

Soient f, g deux éléments de E, et soit $\mathcal{P}$ une partition finie de $]0, 1[$, constitué d'intervalles non dégénérés. Désignons par ω la plus grande des oscillations de f sur ces intervalles et par τ la plus petite des longueurs de ces mêmes intervalles. On a alors

$$d_*(f, g) \leqslant \omega + d(f, g) + h(2d(f, g)/\tau) .$$

Démonstration: Soit ϱ un nombre réel, avec $\varrho > d(f, g)$. Il existe alors un élément μ de Λ, avec $d(\mu; g, f) \leqslant \varrho$. Désignons par λ l'unique fonction appartenant à Λ qui, pour tout intervalle J de la partition $\mathcal{P}$, est linéaire affine sur J et vérifie la relation $\lambda(J) = \mu(J)$. Alors, si s, t (avec $s < t$) sont les extrémités d'un des intervalles de $\mathcal{P}$, on a

$$|\lambda(t) - \lambda(s) - (t - s)| = |\mu(t) - \mu(s) - (t - s)| \leqslant 2\|\mu - \iota\| \leqslant 2\varrho \leqslant 2\varrho \frac{t - s}{\tau} ,$$

et par conséquent

$$\left| \frac{\lambda(t) - \lambda(s)}{t - s} - 1 \right| \leqslant 2\varrho/\tau .$$

Cela signifie que, sur chaque intervalle de la partition $\mathcal{P}$, la fonction λ coïncide avec

une fonction linéaire affine admettant comme dérivée une constante comprise entre $1 - 2\varrho/\tau$ et $1 + 2\varrho/\tau$. Il en résulte que la dernière inégalité est encore valable lorsque (s, t) est un couple quelconque de points distincts de $[0, 1]$. On peut donc écrire, en utilisant la notation (2.3),

$$\|\lambda\|_* = \sup_{s \neq t} \left| \log \frac{\lambda(t) - \lambda(s)}{t - s} \right| \leqslant h(2\varrho/\tau) .$$

En outre, on a

$$\begin{aligned} \|f - g \circ \lambda\| &\leqslant \|f - f \circ \mu^{-1} \circ \lambda\| + \|f \circ \mu^{-1} \circ \lambda - g \circ \lambda\| \\ &= \|f - f \circ \mu^{-1} \circ \lambda\| + \|f \circ \mu^{-1} - g\| \\ &\leqslant \|f - f \circ \mu^{-1} \circ \lambda\| + \varrho \\ &\leqslant \omega + \varrho , \end{aligned}$$

où l'inégalité finale est due au fait que l'application $\mu^{-1} \circ \lambda$ transforme chaque intervalle de $\mathcal{P}$ en lui même, de sorte que, pour tout élément t de $]0, 1[$, les deux points t et $(\mu^{-1} \circ \lambda)(t)$ appartiennent à un même intervalle de $\mathcal{P}$. Il en résulte

$$d_*(g, f) \leqslant d_*(\lambda; g, f) = \|f - g \circ \lambda\| \vee \|\lambda\|_* \leqslant \omega + \varrho + h(2\varrho/\tau) .$$

Puisque ϱ est arbitraire, cela suffit pour conclure.

On remarquera que, dans les hypothèses du lemme qu'on vient de démontrer, le Lemme (1.2) permet d'affirmer qu'étant donné un nombre réel r strictement positif, on peut choisir la partition $\mathcal{P}$ de telle manière que l'on ait $\omega < r$. En outre, on a $\lim_{\delta \to 0} h(\delta) = 0$. Par conséquent, si la distance $d(f, g)$ est assez petite, on a $d_*(f, g) < r$. En d'autres termes: si f est un élément de E, alors, pour tout nombre réel r strictement positif, il existe un nombre réel ϱ strictement positif (dépendant de f) tel que l'on ait $B(f, \varrho) \subset B_*(f, r)$. Ce résultat, compte tenu du Lemme (2.1), démontre l'équivalence topologique des deux distances d, d_*.

Afin de démontrer le théorème suivant, il nous sera commode de prolonger par continuité la fonction log à l'origine en posant $\log 0 = -\infty$: grâce à cette convention, si λ est une application continue et croissante de l'intervalle $[0, 1]$ sur lui même, le symbole $\|\lambda\|_*$ défini par (0.3) aura encore un sens (et il sera égal à $+\infty$ dans le cas où la fonction λ n'est pas *strictement* croissante).

(2.4) Théorème: *L'espace métrique séparable obtenu en munissant l'ensemble E de la distance d_* est complet. Par conséquent, l'espace topologique E est polonais.*

Démonstration: Il suffit de prouver que toute suite de Cauchy admet une sous-suite convergente. Soit donc $(f_n)_{n \geqslant 1}$ une suite de Cauchy pour la distance d_*. Quitte à

passer à une sous-suite, on pourra supposer que l'on ait, pour tout n,

$$d_*(f_{n+1}, f_n) < 2^{-n}.$$

On peut alors choisir, pour tout n, un élément μ_n de Λ tel que l'on ait

$$d_*(\mu_n;\ f_{n+1}, f_n) < 2^{-n}. \tag{2.5}$$

Posons, pour tout couple n, h d'entiers strictement positifs,

$$\lambda_{n,h} = \mu_{n+h} \circ \ldots \circ \mu_n.$$

On a alors $\lambda_{n,h+1} = \mu_{n+h+1} \circ \lambda_{n,h}$, et par conséquent, grâce au Lemme (2.1),

$$\|\lambda_{n,h+1} - \lambda_{n,h}\| = \|\mu_{n+h+1} - \iota\| \leqslant 2\|\mu_{n+h+1}\|_* < 2^{-(n+h)}.$$

Cela prouve que, pour tout n fixé, la suite $(\lambda_{n,h})_{h \geqslant 1}$ est de Cauchy pour la distance définie par la norme uniforme, de sorte qu'elle converge uniformément vers une fonction limite λ_n. Celle-ci est une application croissante et continue de l'intervalle $[0, 1]$ sur lui même. En fait, elle est même *strictement* croissante (donc un élément de Λ), car on a $\|\lambda_n\|_* < \infty$. De façon plus précise, on a

$$\|\lambda_n\|_* \leqslant 2^{-n+1}. \tag{2.6}$$

Pour prouver cette dernière inégalité, il suffit de partir de la relation

$$\|\lambda_{n,h}\|_* \leqslant \|\mu_{n+h}\|_* + \ldots + \|\mu_n\|_* \leqslant 2^{-n+1}$$

et de faire tendre n vers l'infini. En outre, si on part de la relation

$$\lambda_{n+1,h} \circ \mu_n = \lambda_{n,h+1},$$

et si l'on fait tendre h vers l'infini, on trouve $\lambda_{n+1} \circ \mu_n = \lambda_n$, ou, ce qui revient au même, $\lambda_{n+1}^{-1} = \mu_n \circ \lambda_n^{-1}$. On a donc

$$\|f_{n+1} \circ \lambda_{n+1}^{-1} - f_n \circ \lambda_n^{-1}\| = \|f_{n+1} \circ \mu_n - f_n\| < 2^{-n},$$

où l'inégalité finale découle de (2.5). Il en résulte que la suite $(f_n \circ \lambda_n^{-1})$ d'éléments de E est de Cauchy par rapport à la distance définie par la norme uniforme, de sorte qu'elle converge uniformément vers un élément f de E. On voit alors que la suite (f_n) converge vers f pour la distance d_*. En effet, puisque la relation (2.6) implique $\|\lambda_n^{-1}\|_* = \|\lambda_n\|_* \leqslant 2^{-n+1}$, on a

$$d_*(f_n, f) \leqslant d_*(\lambda_n^{-1};\ f_n, f) = \|f_n \circ \lambda_n^{-1} - f\| \vee \|\lambda_n^{-1}\|_* \to 0\ .$$

Le théorème est ainsi démontré.

3. - La tribu borélienne de l'espace E

Dans la suite, l'espace topologique E sera considéré aussi comme un espace mesurable, en tant que muni de sa tribu borélienne.

En même temps, E peut être considéré comme une partie de l'espace produit $\mathbb{R}^{[0,1]}$ (constitué par *toutes* les fonctions réelles définies dans $[0, 1]$). Pour tout élément t de $[0, 1]$, nous désignerons par ξ_t la projection canonique de $\mathbb{R}^{[0,1]}$ sur $\mathbb{R}$, c'est-à-dire l'application de $\mathbb{R}^{[0,1]}$ dans $\mathbb{R}$ qui, à tout élément f de $\mathbb{R}^{[0,1]}$, associe la valeur de f au point t:

$$\xi_t(f) = f(t).$$

Il est bien connu que, pour tout élément A de la tribu engendrée par les ξ_t, il existe une partie dénombrable H de $[0, 1]$ telle que A appartienne à la tribu engendrée par les ξ_t avec $t \in H$. On en déduit aisément que l'ensemble E n'appartient pas à la tribu engendrée par les ξ_t.

Pour tout t, nous désignerons par p_t la restriction de ξ_t à E. En outre, pour tout t différent de 0 et de 1, nous désignerons par q_t la fonctionnelle définie sur E par

$$q_t(f) = f_+(t).$$

Nous poserons enfin $q_0 = p_0$, $q_1 = p_1$.

(3.1) Théorème: *La tribu engendrée sur l'espace E par les q_t coïncide avec la tribu borélienne de E.*

Démonstration: Il faut d'abord vérifier que, pour tout élément t de $[0, 1]$, la fonctionnelle q_t est borélienne sur E. Cela est évident si t est l'une des extrémités de l'intervalle $[0, 1]$: en effet, dans ce cas, la fonctionnelle q_t est même continue (voir (1.4)). Si par contre t est intérieur à $[0, 1]$, alors, après avoir choisi une suite strictement décroissante (t_n) d'éléments de $[0, 1]$ ayant t comme limite, il suffira de remarquer que, pour tout n, la fonctionnelle J_n definie par

$$J_n(f) = (t_n - t)^{-1} \int_t^{t_n} f(s)\, \mathrm{d}s$$

est continue sur E (d'après (1.4)) et que, pour tout élément f de E, on a

$$q_t(f) = f_+(t) = \lim_n J_n(f).$$

On a ainsi démontré que la tribu engendrée sur E par les q_t est incluse dans la tribu borélienne. Pour achever la démonstration du théorème, il reste à prouver l'inclusion opposée. Celle-ci est une conséquence d'un résultat un peu plus précis, à savoir:

(3.2) THÉORÈME: *Soit H une partie dense de $[0, 1]$, contenant $\{0, 1\}$. La tribu borélienne de E est alors incluse dans la tribu $\mathcal{C}(q_t : t \in H)$ (et coïncide donc avec elle).*

DÉMONSTRATION: Pour tout élément f de E, nous désignerons par $\tilde{f}$ l'élément de E défini par $\tilde{f}(t) = q_t(f)$. Puisque $\tilde{f}$ coïncide avec f aux extrémités de l'intervalle $[0, 1]$ ainsi qu'en tout point où f est continue, l'ensemble $\{\tilde{f} = f\}$ est dense dans $[0, 1]$ et contient $\{0, 1\}$, de sorte que l'on a $\|\tilde{f}\| = \|f\|$. On en déduit aisément que l'application $f \mapsto \tilde{f}$ est une isométrie de l'espace métrique (E, d_*). Sans diminuer la généralité, on pourra supposer H dénombrable, donc de la forme $H = \{t_j : j \geqslant 1\}$. Puisque la topologie de E possède une base dénombrable constituée de boules ouvertes de la forme $B_*(f, r)$, avec f fonction constante par morceaux (voir (1.9)), il suffira de prouver que toute boule de ce type appartient à la tribu engendrée par les q_{t_j}. À cet effet, il suffira de vérifier que la boule $B_*(f, r)$ peut se mettre sous la forme

$$B_*(f, r) = \bigcup_{n \geqslant 1} \bigcap_{k \geqslant 1} A_{n, k}, \tag{3.3}$$

à condition de poser

$$A_{n, k} = \bigcup_{\lambda \in \Lambda,\ \|\lambda\|_* \leqslant r - 1/n} \{g \in E : \sup_{1 \leqslant j \leqslant k} |\tilde{f}(\lambda(t_j)) - \tilde{g}(t_j)| < r - 1/n\}.$$

En effet, l'ensemble $A_{n, k}$ ainsi défini appartient à la tribu $\mathcal{C}(q_{t_1}, \ldots, q_{t_k})$, en vertu de l'égalité

$$A_{n, k} = \{g \in E : (q_{t_1}(g), \ldots, q_{t_k}(g)) \in U_{n, k}\},$$

où $U_{n, k}$ désigne l'ensemble ouvert de $\mathbb{R}^k$ défini par

$$U_{n, k} = \bigcup_{\lambda \in \Lambda,\ \|\lambda\|_* \leqslant r - 1/n} \{x \in \mathbb{R}^k : \sup_{1 \leqslant j \leqslant k} |\tilde{f}(\lambda(t_j)) - x_j| < r - 1/n\}.$$

Tout donc est réduit à prouver la relation (3.3). Puisque le premier membre de cette relation est inclus de manière évidente dans le second membre, il suffira de prouver l'inclusion opposée. En d'autres termes, il suffira de prouver que, pour un entier n fixé, on a

$$\bigcap_{k \geqslant 1} A_{n, k} \subset B_*(f, r).$$

Soit donc g un élément du premier membre de cette dernière inclusion. Cela veut dire que g est un élément de E tel que, pour tout k, il existe un élément λ_k de Λ vérifiant les relations

$$\|\lambda_k\|_* \leqslant r - 1/n, \qquad \sup_{1 \leqslant j \leqslant k} |\tilde{f}(\lambda_k(t_j)) - \tilde{g}(t_j)| < r - 1/n.$$

La première de ces relations peut se traduire de la manière suivante:

$$e^{-(r-1/n)} \leqslant \frac{\lambda_k(t)-\lambda_k(s)}{t-s} \leqslant e^{r-1/n} \quad \text{pour} \quad 0 \leqslant s < t \leqslant 1 .$$

Désignons par μ_k la loi sur $\mathbb{R}$ (concentrée sur $[0, 1]$ et diffuse) dont la fonction de répartition coïncide, sur $[0, 1]$, avec λ_k. Il existe alors une loi μ sur $\mathbb{R}$, concentrée sur $[0, 1]$, qui est limite vague d'une sous-suite convenable de (μ_k). Puisque les fonctions de répartition des μ_k sont uniformément lipschitziennes, la fonction de répartition de μ est lipschitzienne (de sorte que μ est diffuse). De façon plus précise, si l'on désigne par λ la restriction à $[0, 1]$ de la fonction de répartition de μ, on a

$$e^{-(r-1/n)} \leqslant \frac{\lambda(t)-\lambda(s)}{t-s} \leqslant e^{r-1/n} \quad \text{pour} \quad 0 \leqslant s < t \leqslant 1 .$$

Cela signifie que λ est un élément de Λ, vérifiant l'inégalité

$$\|\lambda\|_* \leqslant r - 1/n . \tag{3.4}$$

Si maintenant on fixe l'entier j, on a, pour $k \geqslant j$,

$$|\tilde{f}(\lambda_k(t_j)) - \tilde{g}(t_j)| < r - 1/n .$$

Pour $t_j = 0$ (resp. $t_j = 1$), cette relation se réduit à la forme

$$|f(0) - g(0)| < r - 1/n \quad (\text{resp. } |f(1) - g(1)| < r - 1/n) .$$

Pour t_j tel que $\lambda(t_j)$ soit un point de continuité pour $\tilde{f}$, la même relation (dans laquelle on fait tendre k vers l'infini le long d'une suite convenable) fournit

$$|\tilde{f}(\lambda(t_j)) - \tilde{g}(t_j)| \leqslant r - 1/n .$$

D'autre part, les points de discontinuité de $\tilde{f}$ (identiques à ceux de f) forment un ensemble fini. Par conséquent, l'ensemble constitué par les extrémités 0, 1 et par les points t_j tels que la fonction $\tilde{f}$ soit continue au point $\lambda(t_j)$ est partout dense dans $[0, 1]$. Le résultat précédent entraîne donc

$$\|\tilde{f} \circ \lambda - \tilde{g}\| \leqslant r - 1/n . \tag{3.5}$$

Les inégalités (3.4) et (3.5) démontrent que $\tilde{g}$ appartient à $B_*(\tilde{f}, r)$, c'est-à-dire que g appartient à $B_*(f, r)$. La relation (3.3) est ainsi démontrée, et cela achève la démonstration du théorème.

(3.6) Corollaire: *Aucune des fonctionnelles p_t, avec t strictement compris entre* 0 *et* 1*, n'est borélienne sur l'espace E.*

DÉMONSTRATION: En raisonnant par l'absurde, supposons que la fonctionnelle p_t, avec $0 < t < 1$, soit borélienne sur E, et considérons l'ensemble A constitué par les éléments de E qui sont continus à droite au point t:

$$A = \{p_t = q_t\}.$$

Il s'agit d'un ensemble borélien. Grâce au théorème précédent, il appartient donc à la tribu engendrée par les q_s avec $s \in [0, 1] \setminus \{t\}$. Cela implique que deux éléments f, g de E, qui vérifient la relation $q_s(f) = q_s(g)$ pour tout élément s de $[0, 1] \setminus \{t\}$, ou bien sont tous les deux dans A ou bien sont tous les deux dans A^c. Cette conclusion est absurde, comme on le voit en prenant

$$f = I_{[0, t[}, \qquad g = I_{[0, t]}.$$

Le corollaire est donc démontré.

BIBLIOGRAPHIE

[1] P. BILLINGSLEY, *Convergence of Probability Measures*, J. Wiley 1968.
[2] I. CRIMALDI, *Lo spazio di Skorohod*, Quaderni del Dipartimento di Matematica dell'Università di Pisa, sezione di Analisi matematica e Probabilità, Luglio 2000, n. 2.379.1257.
[3] K. R. PARTHASARATHY, *Probability Measures on Metric Spaces*, Academic Press 1967.

Direttore responsabile: Prof. A. BALLIO - Autorizz. Trib. di Roma n. 7269 dell'8-12-1959
«Monograf» - Via Collamarini, 5 - Bologna