GIUSEPPE DATTOLI (*)

Trasformate generalizzate, soluzione di equazioni di tipo Fokker-Planck e studio della dinamica longitudinale di fasci di elettroni in anelli di accumulazione (**)

Riassunto - In questo lavoro si introduce la trasformata di Gauss generalizzata e si dimostra come questa, ed il formalismo associato, siano uno strumento particolarmente efficace per la soluzione, analitica e numerica, di equazioni di tipo Fokker-Planck, che ricorrono nella analisi di numerosi problemi fisici. Il metodo proposto viene utilizzato per analizzare l'evoluzione dello spazio delle fasi longitudinali di fasci di elettroni in moto in anelli di accumulazione.

1. Introduzione

Molti problemi relativi all'evoluzione di fasci carichi in acceleratori lineari o circolari sono stati trattati utilizzando formalismi di natura algebrica che coinvolgono l'utilizzo di operatori Lie [1]. Tale trattazione non include però effetti di tipo diffusivo dissipativo. Tali processi, legati a fenomeni di irraggiamento all'interno dei canali di trasporto magnetico dell'acceleratore medesimo, sono determinanti per lo studio della dinamica di fasci di elettroni accelerati in anelli di accumulazione [2]. In questo articolo mostreremo come il formalismo algebrico possa essere esteso in modo da includere gli effetti precedentemente menzionati.

Un tipico esempio di equazione diffusiva è quella del calore, che può essere espressa come il seguente problema di Cauchy

$$\begin{aligned} &\partial_t f(x, t) = \partial_x^2 f(x, t) \\ &f(x, 0) = g(x). \end{aligned} \tag{1}$$

(*) ENEA, Dipartimento Innovazione, Divisione Fisica Applicata, Centro Ricerche Frascati, C.P. 65, 00044 Frascati, Rome, Italy.

(**) Memoria presentata dal Socio Maurizio Cumo.

La soluzione della (1) può essere ottenuta utilizzando una semplice trasformata di Gauss, ovvero

$$f(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp - \left[\frac{(x - \xi)^2}{4t} \right] \cdot g(\xi) \cdot d\xi, \quad t > 0. \tag{2}$$

La prova di validità della (2) come soluzione della (1) è relativamente banale. Ciononostante, riteniamo opportuno, per una migliore comprensione degli argomenti che seguono, darne una dimostrazione, ricorrendo al formalismo dell'operatore di evoluzione, di cui si fa largo uso in meccanica quantistica. L'utilizzo di tale metodo è giustificato dal fatto che esso suggerisce generalizzazioni, difficilmente intuibili con metodi più convenzionali e che offrono in maniera naturale la soluzione di equazioni significativamente più complicate della (1). Introduciamo pertanto l'operatore di evoluzione associato all'eq. (1)

$$\hat{U}(t) = e^{t \cdot \partial_x^2} \tag{3}$$

la cui soluzione formale può essere scritta come

$$f(x, t) = \hat{U}(t) \cdot g(x) \tag{4}$$

il problema è ora quello di specificare come l'operatore (3) agisca sulla funzione g(x). Consideriamo, pertanto, le ben note relazioni

$$e^{b} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-s^2 + 2s\sqrt{b}} \, ds \tag{5}$$

e

$$e^{a\partial_x} s(x) = s(x + a) \tag{6}$$

La prima ci permette di riscrivere formalmente l'operatore di evoluzione come

$$\hat{U}(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-s^2 + 2\sqrt{t}\partial_x} \, ds \tag{7}$$

che unitamente alla (6) fornisce la relazione

$$\hat{U}(t) \cdot g(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-s^2} \, g(x + 2 \cdot \sqrt{t} \cdot s) \cdot ds \tag{8}$$

la quale, dopo un appropriato cambiamento di variabili, rende conto dell'equazione (2).

È evidente che il ruolo fondamentale nella soluzione della (1) è l'utilizzo dell'operatore di *shift* (6). Riguardo a questo punto, è stato recentemente dimostrato che operatori esponenziali del tipo $e^{\lambda r(x)\cdot\partial_x}$ possono essere ridotti ad operatori di tipo shift [3]. È pertanto chiaro che l'utilizzo del metodo che ha permesso la soluzione della (1) può fornire quello della forma generalizzata

$$\begin{aligned} &\partial_t f(x, t) = \left(r(x)\cdot\partial_x\right)^2 f(x, t) \\ &f(x, 0) = g(x). \end{aligned} \tag{9}$$

dove r è una generica funzione di x. Sebbene il problema della soluzione della (1) possa essere considerato in termini generali, discuteremo alcuni casi particolare che più spesso ricorrono nello studio di problemi fisici.

Nel caso $r(x) = x$, potremo introdurre l'operatore di evoluzione

$$\hat{U}(t) = e^{t(x\cdot\partial_x)^2} \tag{10}$$

che unitamente alla relazione operatoriale

$$e^{\lambda(x\cdot\partial_x)}\cdot s(x) = s(e^{\lambda}\cdot x) \tag{11}$$

ed alla (5) permette di scrivere la soluzione della equazione corrispondente come

$$f(x, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-s^2}\cdot g(e^{2\sqrt{t}s}\cdot x)\cdot ds \tag{12}$$

La soluzione (12) può essere considerata come la trasformata di Gauss corrispondente all'operatore $(x\cdot\partial_x)^2$. È evidente che la (12) ha senso solo se l'integrale, che ivi compare, converge. Nella figura 1 sono stati riportati esempi di soluzione a tempi diversi per differenti funzioni iniziali g(x).

Come ulteriore esempio, che permette di estendere il concetto di trasformata generalizzata, considereremo equazioni diffusive del tipo

$$\begin{aligned} &\partial_t f(x, t) = \left(\partial_x p(x)\partial_x\right) f(x, t), \\ &f(x, 0) = g(x), \end{aligned} \tag{13}$$

le quali nel caso $p(x) = x^2$ possono essere formalmente risolte come

$$f(x, t) = e^{t(x\cdot\partial_x)}\cdot e^{t(x\cdot\partial_x)t^2}\cdot g(x). \tag{14}$$

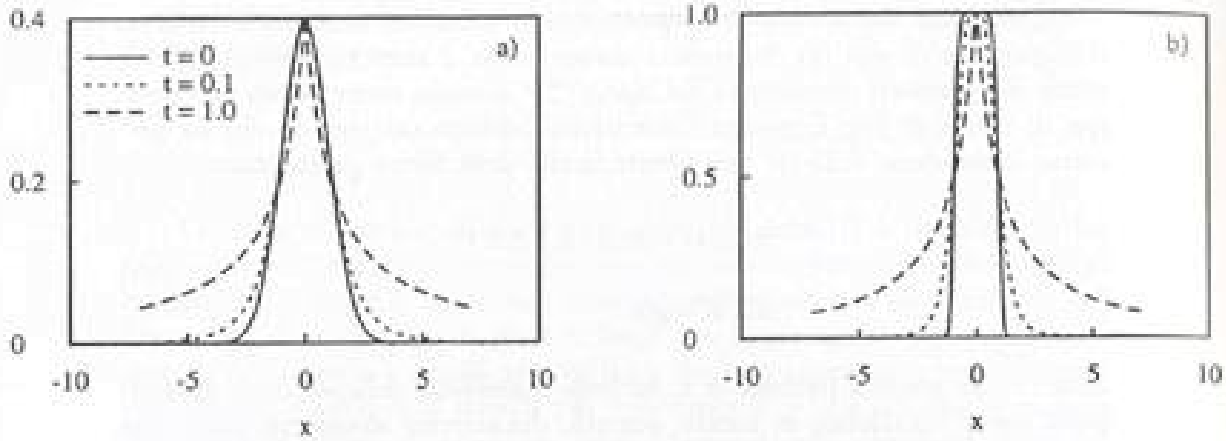

Fig. 1. a) Grafico a tempi diversi della soluzione della equazione (7) per $r(x) = x$ e per $g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{\sigma^2}\right)$ $(\sigma = 1)$. b) come a) per $g(x) = \exp(-x^8)$.

L'utilizzo delle identità (11) e (12) permettono infine di scrivere

$$f(x, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-s^2} g(e^{2\sqrt{t}s+t} \cdot x) \cdot ds \tag{15}$$

ed in figura 2 viene mostrata l'evoluzione di una distribuzione inizialmente gaussiana soggetta ad un processo diffusivo di tipo (13).

Risulta evidente che il metodo delle trasformate generalizzate può costituire una tecnica piuttosto efficiente per lo studio di classi molto generali di equazioni di Fokker-Planck e dei relativi problemi fisici. Mostreremo nel seguito come alcune sue estensioni possano fornire schemi di calcolo in grado di dare soluzioni a classi di problemi difficilmente trattabili con tecniche convenzionali.

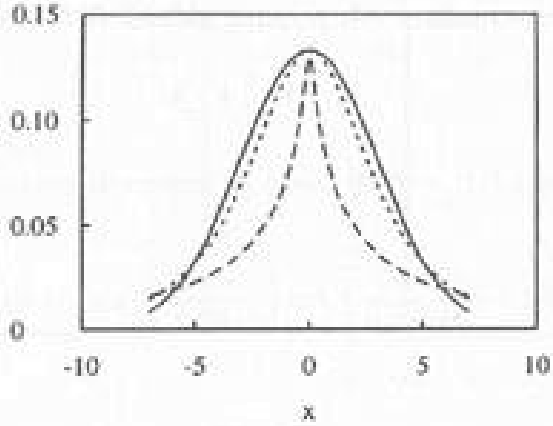

Fig. 2. Grafico a tempi diversi della soluzione della equazione (11) con g(x) Gaussiana e $\sigma = 2$.

2. Generalizzazioni del metodo

Prima di discutere alcuni esempi fisici, è opportuno presentare ulteriori elementi a complemento della tecnica delle trasformate discussa nel precedente paragrafo. Consideriamo, pertanto, l'esempio della seguente equazione di Fokker-Planck di tipo diffusivo dispersivo

$$\begin{aligned} \partial_t f(v, t) &= (\partial_v v + \partial_v^2) f(v, t), \\ f(v, 0) &= g(v), \end{aligned} \tag{16}$$

la cui soluzione può essere formalmente scritta come

$$f(v, t) = e^{t\left[(v\partial_v + \partial_v^2) + 1\right]} \cdot g(v). \tag{17}$$

La forma di queso ultimo operatore esponenziale è più complicata di quelle considerate in precedenza, perché l'argomento dell'esponenziale consta di più operatori differenziali non commutanti fra loro. Allo scopo di scrivere l'operatore di evoluzione della (13) come prodotto di due o più esponenziali, introduciamo gli operatori

$$\begin{aligned} \hat{A} &= t \cdot \partial_v^2, \\ \hat{E} &= t \cdot (v\partial_v) \end{aligned} \tag{18}$$

e notiamo che soddisfano la relazione di commutazione

$$\left[\hat{A}, \hat{E}\right] = m\,\hat{A}, \qquad m = 2t. \tag{19}$$

Possiamo pertanto utilizzare la seguente identità di disaccoppiamento [4]

$$e^{\lambda+\xi} = e^{\frac{\xi-\xi^{-m}}{m}\lambda} \cdot e^{\xi} \tag{20}$$

e sfruttare le identità (11) e (8) in modo da scrivere la soluzione esplicita della (13) come

$$f(v, t) = \frac{\exp(t)}{2\sqrt{\pi S(t)}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{(v-\xi)^2}{4S(t)}\right) \cdot g(e^t\xi) \cdot d\xi, \tag{21}$$

dove

$$S(t) = \frac{1-e^{-2t}}{2} \tag{22}$$

Le figure (3) mostrano l'evoluzione di una distribuzione inizialmente Gaussiana, soggetta ad un processo regolato dalla equazione (16), il cui significato sarà discusso nel paragrafo relativo alle applicazioni fisiche.

Gli esempi discussi finora riguardano soluzioni esatte, che sono esempi piuttosto rari tra i casi di equazioni di Fokker-Planck, comunemente incontrati nell'analisi di problemi fisici. Mostreremo ora, come i metodi precedentemente esposti, possano essere utilizzati per la ricerca di soluzioni approssimate.

Consideriamo pertanto l'equazione

$$\begin{aligned} \partial_t f(v, t) &= (\partial_v v \partial_v) f(v, t), \\ f(v, 0) &= g(v). \end{aligned} \tag{23}$$

Sebbene questa non ricordi un'equazione del calore generalizzata, possiamo utilizzare l'identità

$$\partial_v v \partial_v = v^{1/2} \partial_v v^{1/2} \partial_v - \frac{1}{2} \cdot \partial_{vv}, \tag{24}$$

e scrivere la soluzione formale della (19) come

$$f(v, t) = e^{t\left[v^{1/2}\partial_v v^{1/2}\partial_v - \frac{1}{2}\cdot\partial_{vv}\right]} \cdot g(v). \tag{25}$$

La relazione precedente presenta alcune difficoltà intrinseche per la ricerca di una forma disaccoppiata dell'operatore di evoluzione [3], dovremo pertanto accontentarci di forme approssimate che permettano di ottenere algoritmi di cal-

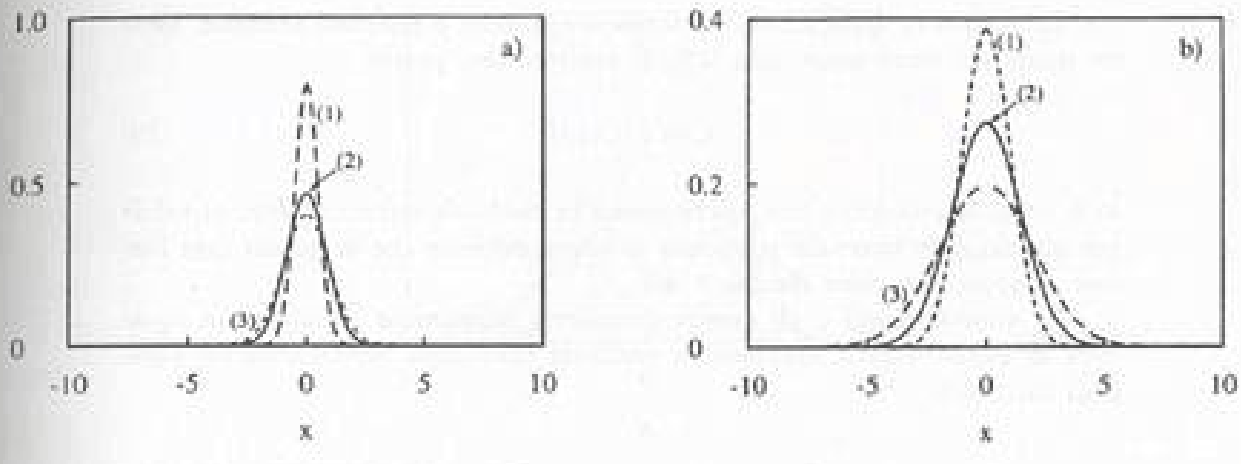

Fig. 3. a) Grafico della soluzione della equazione (13) a tempi diversi con g(x) Gaussiana e $\sigma = 0.5$,1) $t = 0$,2) $t = 0.5$,3) $t = 1$. b) come 3a) per $\sigma = 2$.

colo efficienti per soluzioni numeriche. Consideriamo dunque il cosiddetto metodo della decomposizione simmetrica degli operatori esponenziali, ovvero [5]

$$e^{t(\hat{I}+\hat{O})} \cong e^{\frac{t}{2}\hat{I}}\, e^{t\hat{O}}\, e^{\frac{t}{2}\hat{I}} + o(t^3) \tag{26}$$

Dove $\hat{I}$ ed $\hat{O}$ sono generici operatori, senza una struttura algebrica che permetta di esprimere esattamente l'operatore a destra della (26), come prodotto finito di operatori esponenziali. Risulta ovvio che la decomposizione (26) è accurata solo all'ordine t^3 e pertanto l'applicazione del metodo, se non iterata è valida solo per piccoli intervalli temporali.

Torniamo allo specifico e riscriviamo la forma approssimata di operatore di evoluzione, relativa alla equazione (23) e valida per piccoli intervalli temporali, che saranno denotati con δ_t

$$\hat{U}(\delta_t) \cong e^{\frac{1}{2}(v^{1/2}\partial_v)^2}\, e^{\frac{\delta_t}{2}\partial_v}\, e^{\frac{1}{2}(v^{1/2}\partial_v)^2} \tag{27}$$

Il primo problema da risolvere è quello relativo all'azione dell'operatore esponenziale, contenente $(v^{1/2}\partial_v)^2$, sulla funzione iniziale. A tale scopo utilizziamo l'identità operatoriale [1] $e^{\lambda x^{1/2}\partial_x} f(x) = f([\sqrt{x}+\lambda]^2)$ che ci permette di stabilire la corrispondente trasformata di Gauss

$$e^{\frac{1}{2}(v^{1/2}\partial_v)^2} g(v) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-s^2}\, g\left(\left[\sqrt{v}+s\sqrt{\frac{\delta_t}{2}}\right]^2\right) \cdot ds. \tag{28}$$

La successiva applicazione del secondo operatore è piuttosto semplice, mentre quella del terzo segue dalla (28). È evidente che, poiché

$$\hat{U}(t) = \left[\hat{U}(\delta_t)\right]^n, \tag{29}$$

se $\delta_t = t/n$, la procedura può essere iterata in modo da ottenere soluzioni valide per un maggiore intervallo temporale (è altresì evidente che in questo caso l'errore di approssimazione diventa $n \cdot \delta_t^3$).

Le considerazioni e gli esempi precedenti permettono di affrontare equazioni di Fokker-Planck ricorrenti in problemi fisici come mostreremo nei paragrafi successivi.

3. Soluzione dell'equazione di Fokker-Planck per anelli di accumulazione

Torniamo ora alla soluzione dell'equazione (13) relativa, come già detto, a processi di tipo diffusivo-dissipativo, un esempio in tal senso è quello fornito dalla dinamica di un fascio di elettroni in moto in un anello di accumulazione [2]. La parte dissipativa del processo è legata alla emissione di radiazione di sincrotrone nei magneti curvanti mentre quella diffusiva è associata al «riscaldamento» indotto dalla natura quantistica di tale radiazione, le caratteristiche intrinseche del fascio di elettroni sono dovuti ad una condizione di equilibrio tra i due effetti. È pertanto molto istruttivo considerare la soluzione (21), specializzata al caso di distribuzione Gaussiana iniziale, ovvero

$$f(v, t) = \frac{e^{t}}{\sqrt{2\pi}\,\sqrt{\sigma^2 + 2 \cdot S(t) \cdot e^{2t}}}\, e^{\left[-\frac{v^2 e^{2t}}{2(\sigma^2 + 2 \cdot S(t) \cdot e^{2t})}\right]} \tag{30}$$

è evidente che la distribuzione rimane Gaussiana a tutti i tempi, con dispersione

$$\Sigma(t) = \sqrt{(\sigma^2 - 1) \cdot e^{-2t} + 1}. \tag{31}$$

Possiamo concludere che per $\sigma = 1$, la distribuzione è di equilibrio, mentre per $\sigma \# 1$, la distribuzione tende verso la condizione di equilibrio. Per $\sigma > 1$ è dominante il processo di dissipazione, mentre per $\sigma < 1$ quello di diffusione. Le caratteristiche di equilibrio del fascio vengono di solito dette naturali.

Alla luce di questa analisi risulta più chiaro il significato delle figure (3). Come è giusto attendersi, il processo è tale che il sistema tende verso la medesima configurazione stazionaria, qualsiasi sia la distribuzione iniziale (si veda la figura (4)).

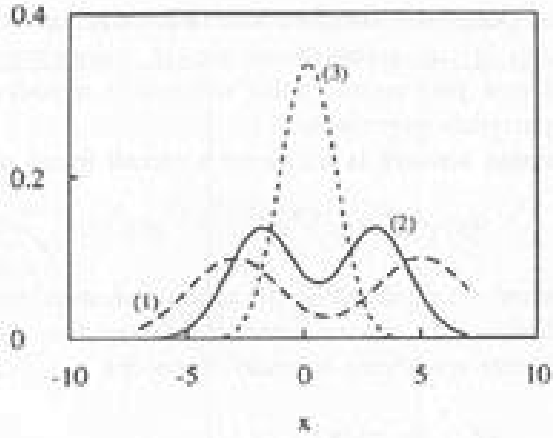

Fig. 4. Come in Figura 2) per

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\left\{\exp\left[-\frac{(x-x_1)^2}{2\cdot\sigma^2}\right] + \exp\left[-\frac{(x-x_2)^2}{2\cdot\sigma^2}\right]\right\},$$

$\sigma = 2,\ x_1 = 5,\ x_2 = -3$

Bisogna tenere presente che l'esempio testé discusso, tiene conto di un aspetto molto parziale della dinamica longitudinale di un fascio di elettroni in anello di accumulazione. L'equazione di Fokker-Planck che include ulteriori effetti è del tipo

$$\partial_t f(x, v, t) = \left[(v\partial_x - p(x)\partial_v) + \frac{2}{\xi}\cdot(v\partial_v + \partial_v^2) + \frac{2}{\xi}\right]\cdot f(x, v, t),$$
$$f(x, v, 0) = g(x, v). \tag{32}$$

L'operatore a destra della (32) è composto da due parti

$$L = v\partial_x - p(x)\partial_v,$$
$$D = \frac{2}{\xi}\cdot\left(\partial_v v + \partial_v^2\right). \tag{33}$$

L'operatore D tiene conto del già discusso effetto dispersivo-dissipativo, mentre L costituisce la parte «Liouvilliana» relativa alla dinamica indotta dal sistema accelerante a radio-frequenza. Le variabili x e v sono associate, rispettivamente, alla coordinata longitudinale ed alla energia relativa, mentre ξ è legato al tempo di damping dell'acceleratore [2]. Una soluzione esatta dell'equazione (33) è limitata ai casi in cui p(x) è una funzione lineare di x, ossia quando si considera solo la

parte quadratica del potenziale associato alla radiofrequenza (si vedano il riferimento [6]). Nel caso in cui, come spesso accade, vanno inglobati i contributi non lineari, il problema può essere risolto utilizzando metodi approssimati, del tipo descritto nel paragrafo precedente.

Possiamo pertanto scrivere la soluzione a piccoli tempi come segue

$$f(x, v, \delta_t) \cong e^{\frac{1}{2}\delta_t D} e^{\delta_t L} e^{\frac{1}{2}\delta_t D} \cdot g(x, v). \tag{34}$$

Per quanto concerne l'applicazione del primo operatore esponenziale, è possibile utilizzare l'identità (21), mentre l'azione dell'operatore contenente la parte Liouvilliana potrà essere specificata tenendo conto che

$$\begin{aligned} &\left[\hat{U}(\delta_t)\right]^n f(x, v) \cong f(x_n, v_n), \\ &x_n = x_{n-1} + y_{n-1}\delta_t - p\left(x_{n-1} + y_{n-1} \cdot \frac{\delta_t}{2}\right) \cdot \frac{\delta_t^2}{2}, \\ &y_n = y_{n-1} + p\left(x_{n-1} + y_{n-1} \cdot \frac{\delta_t}{2}\right) \cdot \delta_t, \\ &\hat{U}(\delta_t) = e^{\delta_t L}. \end{aligned} \tag{35}$$

Essendo l'ultimo operatore uguale al primo si potrà riapplicare l'identità (21). L'iterazione della procedura fornisce un efficiente algoritmo di calcolo per ottenere la soluzione di equazioni del tipo (33). Esempi di evoluzione con differenti potenziali di radiofrequenza sono dati nelle figure (5, 6). È evidente che quando si includono effetti non lineari, il sistema tende ad una distribuzione di equilibrio significativamente diversa da una Gaussiana.

4. Considerazioni conclusive

Nei paragrafi precedenti si è visto come l'uso di tecniche che coinvolgono la metodologia dell'operatore di evoluzione e procedimenti di tipo algebrico, forniscono uno strumento di notevole flessibilità per lo studio di equazioni di Fokker-Planck. Abbiamo però considerato soltanto casi in cui l'operatore di Fokker-Planck non fosse dipendente dal tempo. La tecnica proposta è abbastanza generale da essere estendibile ai casi in cui l'equazione proposta contenga termini esplicitamente dipendenti dal tempo. Consideriamo pertanto la generalizzazione della (16), ovvero

$$\partial_t f(v, t) = a(t) \cdot \partial_v^2 f(v, t) + b(t) \cdot (\partial_v v) f(v, t) \tag{36}$$

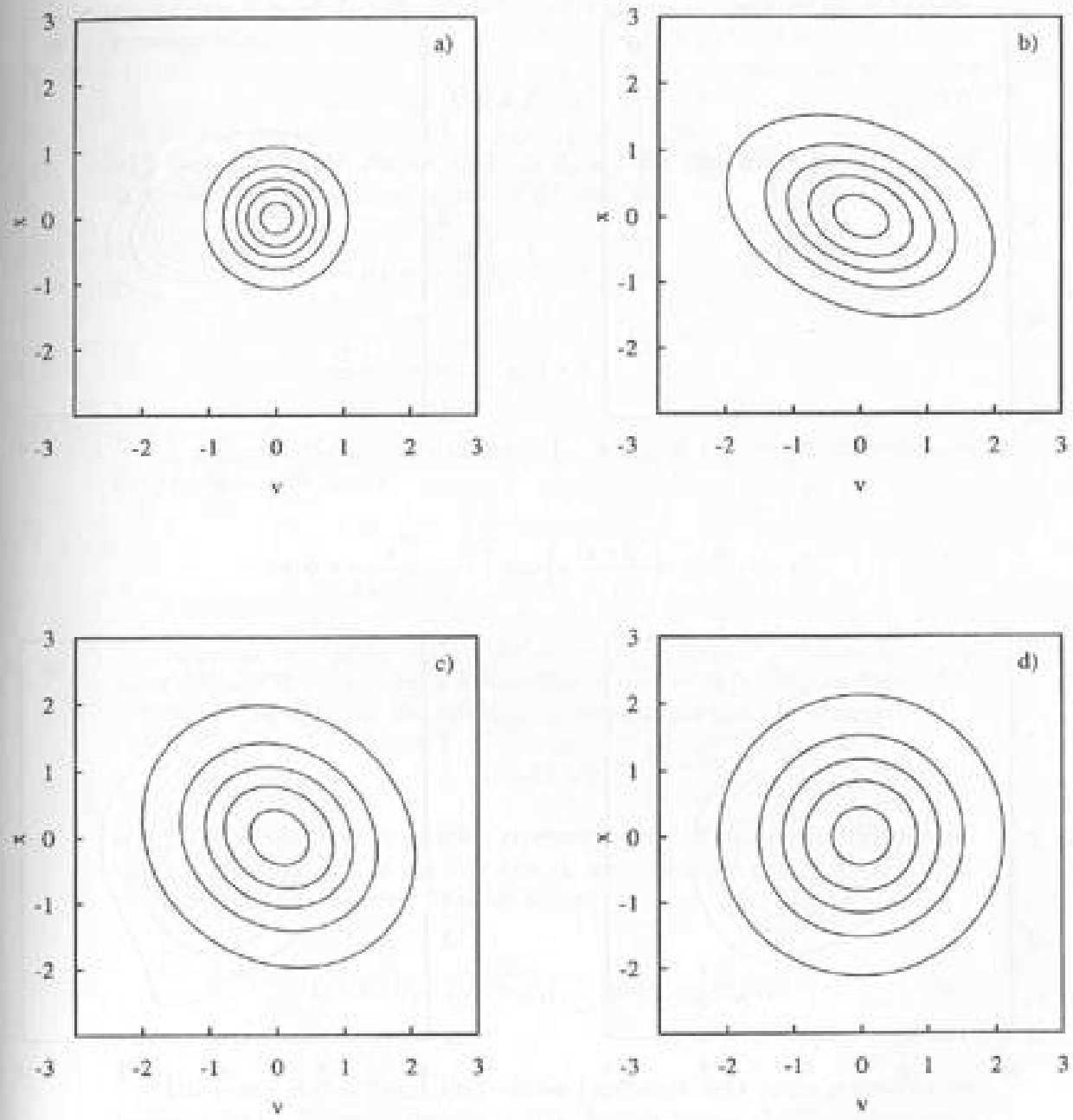

Fig. 5. Curve di livello a tempi diversi relative alla distribuzione f(x, v), p(x) = x e ξ = 1.1.
Distribuzione iniziale gaussiana con $\sigma_x = \sigma_v = 0.5$.
a) t = 0, b) t = 1, c) t = 2, d) t = 3.

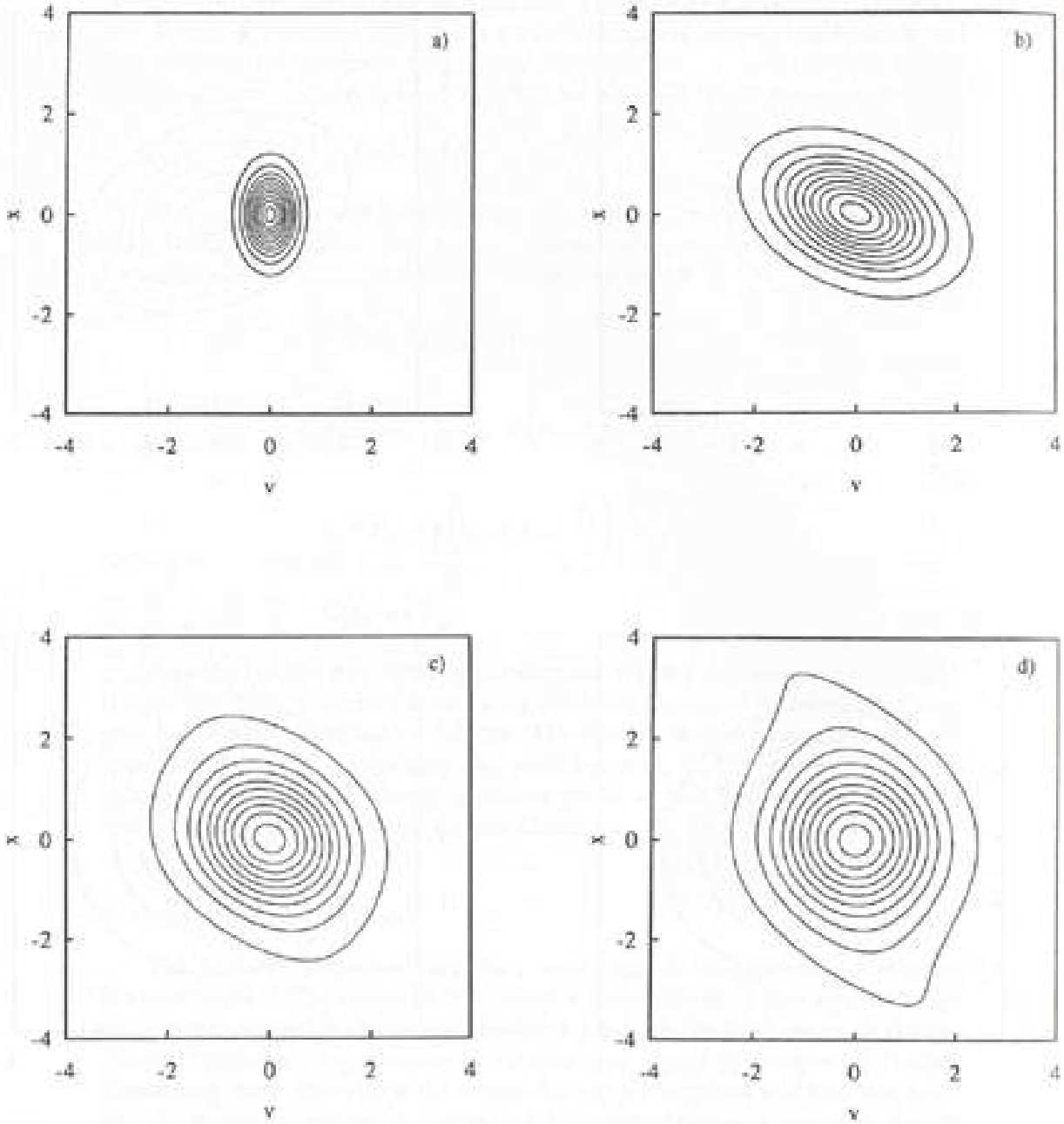

Fig. 6. Come in Figura 5), per $p(x) = \pi^{-1/6} x^3$ e $\sigma_1 = 0.5$, $\sigma_2 = 0.3$.

dove a(t) e b(t) sono funzioni continue non singolari del tempo. Anche in questo caso è possibile utilizzare le tecniche relative all'operatore di evoluzione; ponendo infatti

$$\hat{U}(t) = e^{s(t)\partial_v^2} e^{h(t)\partial_v v} \tag{37}$$

ed utilizzando il fatto che $[\partial_v^2, \partial_v v] = 2 \cdot \partial_v^2$, è facile dimostrare che le funzioni (s, h) soddisfano le seguenti equazioni differenziali

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt} s(t) + 2 \cdot \frac{d}{dt} h(t) \cdot s(t) = a(t), \quad s(0) = 0 \\ &\frac{d}{dh} h(t) = b(t), \quad g(0) = 0. \end{aligned} \tag{38}$$

È pertanto chiaro che, assumendo $f(v, 0) = g(v)$, si perviene alla soluzione del problema nella forma

$$f(v, t) = \frac{e^{h(t)}}{2 \cdot \sqrt{\pi s(t)}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4 \cdot s(t)}\right) \cdot g\left(e^{h(t)} \cdot \xi\right) \cdot d\xi \tag{39}$$

Abbiamo fatto anche notare che spesso si incontrano problemi in cui la parte diffusiva dell'operatore di Fokker-Planck non abbia la semplice forma data nella equazione (32), ma che coinvolga espressioni del tipo $D + \mathcal{D}$ dove

$$\mathcal{D} = \partial_v F(v) \partial_v \tag{40}$$

con F(v) funzione definita positiva, continua e priva di singolarità. Nel caso generale, ovvero nel caso in cui F(v) non sia semplicemente una funzione lineare, risulta conveniente riscrivere D come segue

$$D = R(v)\partial_v + \left(\sqrt{F(v)}\partial_v\right)^2, \quad R(v) = -\frac{1}{2}\partial_v F(v) \tag{41}$$

Dal punto di vista fisico, l'aver diviso l'operatore nella forma precedente significa avere esplicitato il termine con la derivata prima, che può essere visto come un ulteriore contributo, alla parte dissipativa del processo di evoluzione. Il secondo termine contenente la radice di F(v) può essere visto come un contributo diffusivo generalizzato, che può essere trattato utilizzando il metodo della trasformata generalizzata.

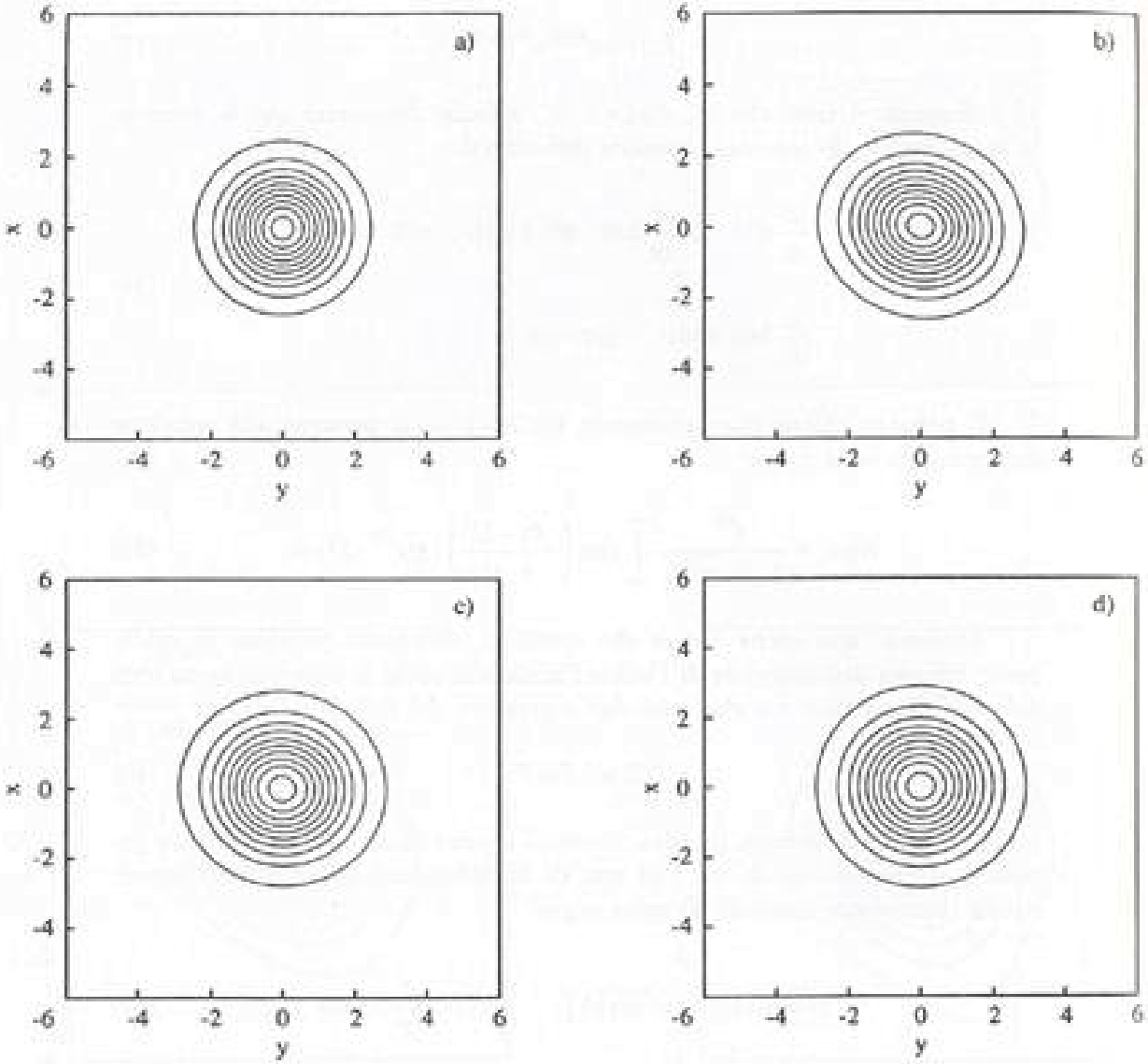

Fig. 7. Come in Figura 5) con il contributo della interazione FEL, per $\xi = 1.1$, $a_x = a_y = 1$, $W = 0.5$.
a) $\tau = 0$, b) $\tau = 1$, c) $\tau = 2$, d) $\tau = 3$.

Le considerazioni precedenti si applicano alla trattazione di amplificatori «Laser ad Elettroni Liberi» (FEL) in anello di accumulazione. In questo caso la dinamica longitudinale del fascio di elettroni viene influenzata, non solo dai contributi dissipativo-dispersivo convenzionali, ma da ulteriori termini dovuti alla diffusione indotta dalla interazione FEL [7]. Entrando nello specifico notiamo che il termine aggiuntivo D può essere scritto come

$$D = \frac{2}{\xi} \cdot W \cdot \partial v \left[\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot v \cdot \mu_v\right)}{\frac{\pi}{2} \cdot v \cdot \mu_v} \right]^2 \partial_v \tag{42}$$

dove W è legato alla potenza del laser e μ_v è una costante associata alla dispersione naturale di energia del fascio di elettroni.

Nella figura (7) è stata riportata l'evoluzione dello spazio delle fasi longitudinale di un fascio di elettroni di un anello di accumulazione soggetto ad una interazione di tipo FEL. Si è assunta, come distribuzione iniziale quella naturale, cioè quella di equilibrio in assenza di interazione FEL, e sono stati inclusi solo i contributi lineari del termine di radio frequenza. Lo spazio delle fasi è inizialmente caratterizzato da una evoluzione che coinvolge una dilatazione ed una rotazione. Tale rotazione implica una correlazione energia-posizione, la dilatazione è asimmetrica e riguarda, inizialmente, solo la componente v. A tempi più lunghi anche la componente x tende a crescere e l'effetto di correlazione tende a sparire. La configurazione finale è quella di una Gaussiana simmetrica. Il ruolo giocato dalla correlazione energia-posizione è quello di associare alla dispersione di energia indotta l'allungamento del pacchetto di elettroni (per ulteriori discussioni si veda il riferimento [8]).

La tecnica di analisi che abbiamo testé descritta ha fornito non solo un efficiente metodo di calcolo per processi diffusivo-dissipativo complessi, di cui l'anello di accumulazione è solo un esempio, ma anche uno strumento che, grazie alla sua natura modulare, permette di seguire più chiaramente la fisica dei processi in gioco.

Ringraziamenti

L'Autore ringrazia i dottori Luca Mezi e Pier Luigi Ottaviani per il continuo aiuto e per i suggerimenti che hanno permesso di migliorare significativamente la presentazione dell'argomento.

È inoltre doveroso esprimere un sincero riconoscimento al Prof. Maurizio Cumo, per il suo gentile interesse e per aver incoraggiato la stesura dell'articolo.

BIBLIOGRAFIA

[1] J. Sanchez-Mondragon and K.B. Wolf "Lie Methods in Optics", Springer-Verlag, Berlin 1986.

[2] M. Sands, Stanford Linear Accelerator Report SLAC-121, (1970) unpublished.

[3] G. Dattoli, P.L. Ottaviani, A. Torre and L. Vazquez, La rivista del *Nuovo Cimento*, **2** (1977).

[4] Si veda il riferimento [3] e R. Sack, *Philos. Mag.* **3**, 497 (1985).

[5] G. Dattoli, L. Giannessi, P.L. Ottaviani, A. Torre, *Phys. Rev.* E **51**, 821 (1998); G. Dattoli, P.L. Ottaviani, A. Segreto, A. Torre, *Nuovo Cimento* **B11**, 825 (1996).

[6] G. Dattoli, L. Mezi, M. Quattromini and A. Torre, in corso di pubblicazione sul *Nuovo Cimento* B.

[7] G. Dattoli, A. Renieri and A. Torre "Lectures on the Theory of Free Electron Laser and Related Topics", World-Scientific, Singapore (1993).

[8] G. Dattoli and L. Mezi in corso di pubblicazione su *Phys. Rev.* E.