Rendiconti
Accademia Nazionale delle Scienze detta dei XL
Memorie di Matematica e Applicazioni
115° (1997), Vol. XXI, fasc. 1, pagg. 163-169

ALBERTO SECCO (*)

Onde di Alfvén in fluidi di Cosserat linearmente viscosi (**)

RIASSUNTO. — Si scrivono le equazioni di campo per una classe di fluidi viscosi di Cosserat elettricamente conduttori. Facendo quindi uso delle condizioni iterate di compatibilità e tenendo conto delle restrizioni termodinamiche sui coefficienti di viscosità, si studia la propagazione di onde magneto-idrodinamiche e si trovano due casi nei quali tale propagazione è possibile.

Alfvén Waves in Cosserat Linear Viscous Fluids

SUMMARY. — Field equations are established for a class of Cosserat viscous fluid conductors. The propagation of magneto-hydrodynamic waves is then studied by the use of the iterated conditions of compatibility. The thermodynamic restrictions on the viscosities are demonstrated to permit the propagation of waves in two subclasses of the aforementioned one.

Nel caso di un fluido di Cosserat carico elettricamente, si può ritenere che il moto di rotazione delle «molecole» delle quali è composto influisca sul suo comportamento in presenza di un campo elettromagnetico. Nel presente studio, mediante semplici ipotesi costitutive, si caratterizzano tali effetti per un fluido linearmente viscoso di questo tipo; trattando quindi il campo magnetico generato dal moto come una perturbazione del campo esterno, si perviene alle equazioni della magneto-idrodinamica per tale classe di fluidi.

Successivamente, limitandosi per semplicità al caso isotermo e adiabatico, si studia la propagazione delle onde di Alfvén mediante l'uso delle condizioni di compatibilità iterate. Si trova che le condizioni imposte sulle discontinuità dalle suddette equazioni e le limitazioni cui devono soddisfare i coefficienti di viscosità consentono la propagazione di onde di Alfvén in due sottoclassi di tali fluidi.

(*) Indirizzo dell'Autore: Cannaregio 6234, 30131 Venezia.
(**) Memoria presentata il 21 settembre 1997 da Giuseppe Grioli, uno dei XL.

1. - Equazioni fondamentali

Si riferisca lo spazio a coordinate cartesiane ortogonali (Ox_i) e si consideri un fluido di Cosserat C linearmente viscoso, omogeneo ed isotropo, carico elettricamente e soggetto ad un campo elettromagnetico. Le equazioni di Maxwell sono

$$(1)\qquad \begin{cases} \operatorname{rot} \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} + \dfrac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}\,, & \operatorname{div} \boldsymbol{B} = 0\,; \qquad \boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H}\,, \\ \operatorname{rot} \boldsymbol{E} = -\dfrac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\,, & \operatorname{div} \boldsymbol{D} = \varrho_e\,; \quad \boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E}\,, \end{cases}$$

ove ϱ_e è la densità di carica; $\boldsymbol{J}$ è la densità di corrente elettrica, data da

$$(2)\qquad \boldsymbol{J} = \sigma(\boldsymbol{E} + \dot{\boldsymbol{x}} \wedge \boldsymbol{B}) + \varrho_e \dot{\boldsymbol{x}}\,,$$

essendo σ la conduttività elettrica e $\dot{\boldsymbol{x}}$ il campo di velocità.

Nelle (1) μ e ε possono essere ritenute costanti, data l'omogeneità di C. Si riterrà $\boldsymbol{B}$ la somma di un campo esterno imperturbato $\boldsymbol{B}_0$ e di un campo $\boldsymbol{B}'$ originato dalla rotazione delle «molecole» di C, pensabili come sferette cariche. Infatti, una sfera S, avente massa m e carica elettrica q_e, con densità di carica uniforme ϱ_e, ruotando attorno ad un suo diametro assume un momento magnetico $\boldsymbol{\mu}^*$, parallelo all'asse di rotazione, il cui modulo è legato al momento della quantità di moto Q rispetto allo stesso asse dalla relazione $\mu^* = (Q/2m)\,q_e$ mentre il campo magnetico prodotto dalla rotazione assume nel centro di S il valore $(5/6)\,\mu_0 \varrho_e (Q/m)$. Si farà perciò l'ipotesi che al moto di C siano associati un momento magnetico per unità di volume $\boldsymbol{\mu}^*$ ed un campo magnetico $\boldsymbol{B}'$ dati, rispettivamente, da

$$(3)\qquad \boldsymbol{\mu}^* = \frac{1}{2} j \varrho_e \boldsymbol{\omega}\,, \qquad \boldsymbol{B}' = \frac{5}{6}\,\mu_0 \varrho_e j \boldsymbol{\omega}$$

ove j è il micromomento d'inerzia, costante lungo le linee di corrente nel caso considerato di un fluido isotropo omogeneo e $\boldsymbol{\omega}$ è la velocità angolare.

Le equazioni cardinali sono allora

$$(4)\qquad \begin{cases} \varrho \ddot{x}_i = t_{ki,k} + \phi_{ki,k} - \mu\varepsilon \dfrac{\partial}{\partial t}\, e_{ikh} E_k H_h + \varrho F_i\,, \\ \varrho j \dot{\omega}_i = e_{ikm} t_{km} + m_{ki,k} + \dfrac{1}{2} \mu j \varrho_e e_{ikm} \omega_k H_m + \varrho M_i\,, \end{cases}$$

ove $\phi_{ki} = \mu H_k H_i + \varepsilon E_k E_i - (1/2)(\mu H^2 + \varepsilon E^2)\,\delta_{ki}$ è il tensore degli sforzi elettromagnetici, F_i e M_i rappresentano le forze e le coppie di volume non elettromagnetiche e ϱ è la densità di massa.

Infine vi è l'equazione di continuità

$$(5)\qquad \dot{\varrho} + \varrho \operatorname{div} \dot{\boldsymbol{x}} = 0\,.$$

Le equazioni costitutive per gli sforzi e le coppie di contatto sono

$$
(6)\qquad \begin{cases} t_{hk} = (-\pi + \lambda \dot{x}_{r,r})\,\delta_{hk} + \nu(\dot{x}_{h,k} + \dot{x}_{k,h}) + k(\dot{x}_{r,k} - e_{hk}\,\omega_r)\,, \\ m_{hk} = \alpha\omega_{r,r}\delta_{hk} + \beta\omega_{h,k} + \gamma\omega_{k,h}\,. \end{cases}
$$

Nei casi isotermo o adiabatico, qui considerati, la pressione π è funzione della sola densità ϱ, mentre i coefficienti di viscosità λ, ν, k, α, β, γ sono costanti; essi soddisfano alle limitazioni

$$
(7)\qquad \begin{cases} 3\lambda + 2\nu + k \geqslant 0\,, \quad 2\nu + k \geqslant 0\,, \quad k \geqslant 0\,, \\ 3\alpha + \beta + \gamma \geqslant 0\,, \quad -\gamma \leqslant \beta \leqslant \gamma\,, \quad \gamma \geqslant 0\,, \end{cases}
$$

conseguenti alla disuguaglianza di Clausius-Duhem.

Nel caso, qui considerato, che la conducibilità elettrica σ sia elevata (per semplicità, infinita) e nell'ipotesi di Alfvén che si possa trascurare la corrente di spostamento, si hanno $\boldsymbol{J} \wedge \boldsymbol{B} = \operatorname{div}\boldsymbol{\varphi} = \mu \operatorname{rot}\boldsymbol{H} \wedge \boldsymbol{H}$; facendo uso delle (6), le (1), (2), (4), (5) si possono allora porre nella forma

$$
(8)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} + \operatorname{rot}(\boldsymbol{H} \wedge \dot{\boldsymbol{x}}) = \boldsymbol{0}\,, \\ \operatorname{div}\boldsymbol{H} = 0\,, \\ \varrho\ddot{\boldsymbol{x}} = \mu \operatorname{rot}\boldsymbol{H} \wedge \boldsymbol{H} + \varrho\boldsymbol{F} - \operatorname{grad}\pi + (\lambda + \nu)\operatorname{grad}\operatorname{div}\dot{\boldsymbol{x}} + (\nu + k)\,\Delta\dot{\boldsymbol{x}} + k \operatorname{rot}\boldsymbol{\omega}\,, \\ \varrho j\dot{\boldsymbol{\omega}} = \dfrac{1}{2}\mu j \varrho_e\, \boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{H} + \varrho\boldsymbol{M} + (\alpha + \beta)\operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{\omega} + \gamma\Delta\boldsymbol{\omega} + k \operatorname{rot}\dot{\boldsymbol{x}} - 2k\boldsymbol{\omega}\,, \\ \dot{\varrho} + \varrho \operatorname{div}\dot{\boldsymbol{x}} = 0\,. \end{cases}
$$

2. - Condizioni per le discontinuità

Si consideri ora C quale sede di superficie trasportanti discontinuità di prima specie delle derivate prime di $\boldsymbol{H}$ e delle derivate prime e seconde di $\dot{\boldsymbol{x}}$ e $\boldsymbol{\omega}$, mentre le funzioni stesse sono supposte continue ovunque. Se $\psi(x, t)$ indica una di tali funzioni e σ_t è la superficie, supposta dotata di tutte le proprietà di regolarità necessarie, allora le discontinuità (indicate con una parentesi quadra) soddisfano le condizioni

$$
(9)\qquad \begin{cases} [\psi_{,r}] = A n_r\,, \quad [\dot{\psi}] = -VA\,, \quad A = [\psi_{,r} n_r]\,, \quad V = u_n - \dot{\boldsymbol{x}} \cdot \boldsymbol{n}\,, \\ [\psi_{,n}] = A' n_r n_s + (x^{\Gamma}_{r} n_s + x^{\Gamma}_{s} n_r) A_{s\Gamma} - x_{rt} x_{s\Delta} b^{\Gamma\Delta} A\,; \quad A' = [\psi_{,n} n_r n_s]\,, \end{cases}
$$

nelle quali n_r è il versore normale a σ_t, V è la velocità di propagazione e u_n è la velocità di avanzamento di σ_t. Nelle (9) gli indici greci Γ, $\Delta = 1, 2$ sono associati ad un sistema di coordinate curvilinee su σ_t; la barretta indica la derivazione

covariante, mentre

$$a_{\Gamma\Delta} = x_{i\Gamma} x_{i\Delta}\,, \qquad b_{\Gamma\Delta} = -x_{k\Gamma} n_{k|\Delta} \tag{10}$$

definiscono i tensori della 1ª e 2ª forma fondamentale.

Particolarizzando le (9), dalle $(8)_{1,2,3}$ si deducono

$$\begin{cases} \boldsymbol{W}\cdot\boldsymbol{n} = 0\,, \quad W_r = \dfrac{(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{U})H_r - (\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{H})U_r}{V}\,, \quad B = \varrho\dfrac{\boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{n}}{V}\,, \\ W_r \equiv [H_{r,t} n_t]\,, \quad U_r \equiv [\dot{x}_{r,t} n_t]\,, \quad B \equiv [\varrho_{,t} n_t]\,. \end{cases} \tag{11}$$

Supposte continue (per semplicità) le forze e le coppie di massa F_l e M_l e facendo uso delle (9) e delle (11), dalle equazioni di campo $(8)_{1,4}$ si deducono le seguenti equazioni nelle discontinuità:

$$\begin{cases} \varrho V U_r - \dfrac{d\pi}{d\varrho}\varrho\dfrac{\boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{n}}{V} n_r - \\ \qquad - \dfrac{\mu}{V}\{H^2 n_r n_s - (\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{n})(H_r n_s + H_s n_r) + (\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{n})^2\delta_{rs}\}U_s + \\ \qquad + (\lambda+\nu)\{\boldsymbol{U}'\cdot\boldsymbol{n}n_r + (x_s^{\Gamma} n_r + x_r^{\Gamma} n_s)U_{s|\Gamma} - x_{s\Gamma}x_{s\Delta}b^{\Gamma\Delta}U_r\} + \\ \qquad + (\nu+k)(U_r' - a_{\Gamma\Delta}b^{\Gamma\Delta}U_r) + k e_{rkm} Z_m n_k = 0\,, \\ \varrho_f V Z_r + (\alpha+\beta)\{\boldsymbol{Z}'\cdot\boldsymbol{n}n_r + (x_s^{\Gamma} n_r + x_r^{\Gamma} n_s)Z_{s|\Gamma} - x_{s\Gamma}x_{s\Delta}b^{\Gamma\Delta}Z_r\} + \\ \qquad + \gamma(Z_r' - a_{\Gamma\Delta}b^{\Gamma\Delta}Z_r) + k e_{rkm} U_m n_k = 0\,, \\ U_r' = [\dot{x}_{r,st} n_s n_t]\,, \quad Z_r = [\omega_{r,t} n_t]\,, \quad Z_r' = [\omega_{r,st} n_s n_t]\,. \end{cases} \tag{12}$$

Inoltre (avendosi $\boldsymbol{W}\wedge\boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{H} = 0$) $\boldsymbol{W}$, $\boldsymbol{U}$, e $\boldsymbol{H}$ sono complanari.

È naturale supporre limitate le derivate prime di $\boldsymbol{H}$ su σ_j; in tale ipotesi, dalle equazioni cardinali discende la continuità delle componenti normali degli stress e delle coppie di contatto:

$$[t_{kl} n_k] = 0\,, \qquad [m_{kl} n_k] = 0\,. \tag{13}$$

Dalle (13), facendo uso delle (6) e delle (9), si ottiene il sistema:

$$\begin{cases} (\lambda+\nu)\,\boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{n}n_l + (\nu+k)\,U_l = 0\,, \\ (\alpha+\beta)\,\boldsymbol{Z}\cdot\boldsymbol{n}n_l + \gamma Z_l = 0\,. \end{cases} \tag{14}$$

Tenendo conto delle (7), la $(14)_1$ ha le soluzioni

$$\boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{n} = 0\,, \qquad \nu = k = 0\,, \tag{15}$$

$$\boldsymbol{U} = U\boldsymbol{n}\,, \qquad \lambda = 0\,, \qquad k = -2\nu\,. \tag{16}$$

Analogamente, la $(14)_2$ ha le soluzioni

$$\boldsymbol{Z}\cdot\boldsymbol{n}=0\,,\qquad \beta=\gamma=0\,, \tag{17}$$

$$\boldsymbol{Z}=Z\boldsymbol{n}\,,\qquad \alpha=0\,,\qquad \gamma=-\beta\,. \tag{18}$$

3. - Vari casi possibili di propagazione

Le $(11)_1$ e le (15)-(18) mostrano che eventuali onde sono necessariamente longitudinali o trasversali. Tenendo conto della complanarità di $\boldsymbol{W}$, $\boldsymbol{U}$, $\boldsymbol{H}$ e delle relazioni $x_{kT}n_k=0$, $n_{kT}=-b_T^A x_{kA}$ si può procedere alla discussione delle possibili alternative.

Caso I: $\boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{n}=0$, $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{k}=0$, $\boldsymbol{Z}\cdot\boldsymbol{n}=0$, $\beta=\gamma=0$, $\lambda\geqslant 0$, $\alpha\geqslant 0$ (cfr. (7), (15) e (17)). Dopo alcuni calcoli, le (12) divengono:

$$\begin{cases}\{\varrho V^2-\mu(\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{n})^2\}\,U_r+\{\mu(\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{n})(\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{U})+\lambda V(\boldsymbol{U}'\cdot\boldsymbol{n}+x_r^T U_{sT})\}\,n_r=0\,,\\ \varrho jVZ_r+\alpha\{\boldsymbol{Z}'\cdot\boldsymbol{n}+x_r^T Z_{sT}\}\,n_r=0\,.\end{cases} \tag{19}$$

I due termini della $(19)_1$ sono ortogonali e quindi si annullano entrambi. Ne seguono:

$$\begin{cases}V^2=\dfrac{\mu}{\varrho}(\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{n})^2\,,\\ \boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{U}=0\,,\qquad \boldsymbol{U}'\cdot\boldsymbol{n}+x_r^T U_{sT}=0\,.\end{cases} \tag{20}$$

Anche i due termini della $(19)_2$, essendo ortogonali, devono annullarsi: in particolare,

$$VZ_r=0\,.$$

L'ultima relazione mostra che le eventuali onde non possono trasportare discontinuità della velocità di rotazione. Questo caso corrisponde pertanto ad onde trasversali con vettori caratteristici delle discontinuità $\boldsymbol{U}$ e $\boldsymbol{W}$ paralleli tra loro ed ortogonali alle linee di forza del campo magnetico. La velocità di propagazione V è pari alla componente secondo la normale d'onda $\boldsymbol{n}$ della velocità di Alfvén di un fluido conduttore euleriano avente uguali permeabilità magnetica μ e densità ϱ; V è massima quando $\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{n}=H$ cioè quando la propagazione avviene lungo le linee di forza del campo magnetico $\boldsymbol{H}$.

Caso II: $\boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{n}=0$, $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{k}=0$, $\boldsymbol{Z}=Z\boldsymbol{n}$, $\alpha=0$, $\gamma=-\beta$, $\lambda\geqslant 0$ (cfr. (7), (15), (18)). Le $(12)_{1,2}$ divengono, rispettivamente, la $(19)_1$ e la

$$\varrho jVZn_r+\beta\{\boldsymbol{Z}'\cdot\boldsymbol{n}n_r+(x_r^T n_r+x_r^T n_s)(Z_{sT}n_r+Zn_{sT})-x_{rT}x_{sA}b^{TA}Zn_s\}-$$
$$-Z_r'+a_{TA}b^{TA}Zn_r=0\,. \tag{21}$$

Dalla (21) segue

$$VZ = 0$$

e si possono ripetere pertanto le considerazioni fatte a proposito del caso precedente.

Caso III: $\boldsymbol{U} = U\boldsymbol{n}$, $k = -2\nu$, $\boldsymbol{Z}\cdot\boldsymbol{n} = 0$, $\beta = \gamma = 0$, $\lambda = 0$, $\alpha \geqslant 0$ (cfr. (7), (16), (17)). Le (12) divengono

$$(22)\qquad \begin{cases} \left(\varrho VU - \dfrac{d\pi}{d\varrho}\varrho\,\dfrac{U}{V} + \nu\boldsymbol{U}'\cdot\boldsymbol{n} - \dfrac{\mu}{V}H^2U\right)n_r + \nu U_{/\Gamma}x_r^\Gamma - \nu U_r' - \\ \qquad\qquad -2\nu e_{rkm}Z_m n_k + \dfrac{\mu}{V}(\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{n})UH_r = 0\,, \\ \alpha(\boldsymbol{Z}'\cdot\boldsymbol{n} + Z_{k/\Gamma}x_k^\Gamma)n_l + \varrho jVZ_l = 0\,. \end{cases}$$

Saturando la $(22)_1$ con n_r si deduce

$$(23)\qquad V^2 = \pi' + \frac{\mu}{\varrho}\{H^2 - (\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{n})^2\}\,,\qquad \pi' = \frac{d\pi}{d\varrho}$$

mentre saturando la stessa $(22)_1$ con $x_{r\Gamma}$ si ottengono

$$(24)\qquad U_{/\Gamma} = U_r'x_{r\Gamma} + 2e_{rkm}Z_m n_k x_{r\Gamma}\,,\qquad (\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{n})UH_r = 0\,.$$

Dalla $(22)_2$, attesa l'ortogonalità di $\boldsymbol{Z}$ e $\boldsymbol{n}$, segue

$$(25)\qquad VZ_1 = 0\,.$$

Escludendo soluzioni banali, dalle (23) e $(24)_2$ segue che si ha propagazione, con velocità

$$V^2 = \pi' + \frac{\mu}{\varrho}H^2\,.$$

Questo caso corrisponde ad onde miste, con velocità di propagazione superiore tanto alla velocità del suono quanto alla velocità di Alfvén $V_A = \sqrt{\mu/\varrho}\,H$ di un fluido euleriano avente uguali μ e ϱ. Dalla complanarità di $\boldsymbol{W}$, $\boldsymbol{U}$, $\boldsymbol{H}$ e dalla $(24)_2$ segue che $\boldsymbol{H}$ e $\boldsymbol{W}$ sono paralleli, mentre la (25) mostra che anche in questo caso le onde non trasportano discontinuità della velocità di rotazione.

Caso IV: $\boldsymbol{U} = U\boldsymbol{n}$, $\lambda = 0$, $k = -2\nu$, $\boldsymbol{Z} = Z\boldsymbol{n}$, $\alpha = 0$, $\gamma = -\beta$ (cfr. (16), (18)). La $(12)_1$ diviene ancora la $(22)_1$, mentre la $(12)_2$ diviene

$$(\boldsymbol{Z}'\cdot\boldsymbol{n} + \varrho jZV)n_l + Z_{/\Gamma}x_l^\Gamma - Z_l' = 0$$

dalla quale, saturando con n_l, segue

$$VZ = 0\,.$$

Valgono quindi le considerazioni fatte a proposito del Caso III.

4. - Conclusione

In conclusione, nelle ipotesi fatte, si possono individuare due classi di fluidi di Cosserat linearmente viscosi ed elettricamente conduttori nei quali può aver luogo la propagazione di onde di Alfvén. Nei fluidi della prima classe, individuata dai valori $\nu = k = 0$ delle viscosità, possono propagarsi onde trasversali, con vettori caratteristici delle discontinuità U e W paralleli tra loro ed ortogonali alle linee di forza del campo magnetico; la velocità di propagazione V è, in questo caso, pari alla componente secondo la normale d'onda n della velocità di Alfvén di un fluido conduttore euleriano avente uguali densità ϱ e permeabilità magnetica μ. Nei fluidi della seconda classe, individuata dai valori $\lambda = 0, k = -2\nu$, possono propagarsi onde di tipo misto trasportanti discontinuità longitudinali della derivata prima della velocità e discontinuità trasversali della derivata prima di H, con velocità generalmente maggiore sia della velocità del suono che di quella di Alfvén. In nessun caso tali onde possono trasportare discontinuità della velocità di rotazione; di conseguenza, sussistono le $(24)_1$ con $Z_m = 0$. Tali relazioni, come pure le $(20)_3$, mostrano che queste onde inducono discontinuità delle derivate seconde della velocità $\dot{x}$, propagantisi con la stessa velocità V data, rispettivamente, da $(20)_1$ e da (23).

BIBLIOGRAFIA

[1] C. Agostinelli, *Magnetofluidodinamica*, Edizioni Cremonese, Roma.

[2] G. Capriz, *Continua with Microstructure*, Springer Tracts in Natural Philosophy, vol. 15 (ed. C. Truesdell), Springer-Verlag, New York (1989).

[3] A. C. Eringen, *Mechanics of Micropolar Continua*, Contribution to Mechanics, Pergamon Press (1970).

[4] Antonio C. Grioli, *Sulla propagazione di onde di accelerazione in un fluido micropolare viscoso*, Atti Acc. Naz. dei Lincei, Classe di Sc. Fis. Mat. e Nat., vol. LXVII (1979).

[5] Antonio C. Grioli, *Sul decadimento delle discontinuità di accelerazione in un fluido linearmente viscoso di Cosserat*, Atti Acc. Naz. dei Lincei, Classe di Sc. Fis. Mat. e Nat., vol. LXVII (1979).

[6] Antonio C. Grioli, *Sulla propagazione di onde di accelerazione in continui con struttura*, Rend. Sem. Mat. Univers. Politecn. Torino, 42 (1984), 2.

[7] M. E. Gurtin - M. Vianello - W. O. Williams, *On fluids of grade n*, Meccanica, 21 (1986).

[8] L. Landau - E. Lifchitz, *Mécanique des fluides*, Editions Mir, Moscou (1971)

[9] G. A. Maugin - A. C. Eringen, *Variational formulation of the relativistic theory of microelectromagnetism*, J. Math. Phys., 15 (1974).

[10] T. Y. Thomas, *Extended compatibility conditions for the study of surfaces of discontinuity in continuum mechanics*, Journal of Mathematics and Mechanics, vol. 6 (1957).

[11] C. Truesdell - R. A. Toupin, *The Classical Field Theories*, Handbuch der Physik (Ed. S. Flugge), Band III/1, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York (1960).