Rendiconti
Accademia Nazionale delle Scienze detta dei XL
Memorie di Matematica e Applicazioni
115° (1997), Vol. XXI, fasc. 1, pagg. 147-155

RITA GIULIANO ANTONINI (*)

Comparaison de densités sur certains ensembles d'entiers (**)

RÉSUMÉ. — On démontre un critère général permettant d'établir la coincidence de deux densités sur une partie donnée de $\mathbb{N}^*$. On étudie ensuite deux cas particuliers de ce critère, dont l'un fait intervenir une densité qui s'avère être indiscernable de la densité arithmétique. Les résultats obtenus permettent notamment de justifier le fait que, pour une large classe de parties de $\mathbb{N}^*$, le conditionnement par rapport à l'ensemble P des nombres premiers ne modifie pas les valeurs des densités inférieure et supérieure, aussi bien pour la densité arithmétique que pour la densité logarithmique.

Confronto di densità su certi insiemi d'interi

SUNTO. — Si dimostra un criterio generale per la coincidenza di due densità su un'assegnata parte di $\mathbb{N}^*$. Si studiano poi due casi particolari di questo criterio, uno dei quali fa intervenire una densità che si rivela indistinguibile dalla densità aritmetica. I risultati ottenuti permettono tra l'altro di giustificare il fatto che, per una vasta classe di parti di $\mathbb{N}^*$, il condizionamento rispetto all'insieme P dei numeri primi non modifica i valori delle densità inferiore e superiore, sia per la densità aritmetica sia per quella logaritmica.

0. - NOTATIONS ET RAPPELS

Pour les relations de comparaison entre suites de nombres réels, nous utiliserons la notation de Hardy, qui consiste à écrire $a_n \prec b_n$ au lieu de $a_n = o(b_n)$ (et $a_n \preccurlyeq b_n$ au lieu de $a_n = O(b_n)$). Comme d'habitude, P désignera l'ensemble des nombres premiers, et $\pi(x)$ (pour tout nombre réel $x \geqslant 1$) le cardinal de l'ensemble $\mathrm{P} \cap [1, x]$. Il est bien connu (voir [1]) que l'on a (lorsque x tend vers $+\infty$)

$$\pi(x) \sim x(\log x)^{-1}, \tag{0.1}$$

(*) Indirizzo dell'Autrice: Dipartimento di Matematica, via Buonarroti 2, I-56127 Pisa.
(**) Memoria presentata il 30 maggio 1997 da Giorgio Letta, uno dei XL.

Le terme *mesure* sera employé comme synonyme de «mesure positive et σ-finie sur R, concentrée sur N* et de masse totale infinie». Si μ est une telle mesure, on posera

$$F_\mu(n) = \mu([1, n[)\,.$$

En outre, pour toute partie A de N*, on désignera par $\underline{\delta}_\mu(A)$ la *μ-densité inférieure de A*, définie par

$$\underline{\delta}_\mu(A) = \liminf_n\, (F_\mu(n))^{-1}\, \mu(A \cap [1, n[)\,.$$

De même, on désignera par $\overline{\delta}_\mu(A)$ la *μ-densité supérieure* de A, définie de manière analogue. Lorsque ces deux nombres coïncident, leur valeur commune sera appelée la μ-densité de A. (On dira alors que A admet une μ-densité.)

Le résultat élémentaire suivant est bien connu (voir [2, Th. 8.2]):

(0.2) Proposition: *Si la partie A de N* n'est ni finie ni de complémentaire fini, on peut la représenter (de manière unique) sous la forme*

$$A = \mathrm{N}^* \cap \bigcup_{n \geq 0} [p_n, q_n[\,, \tag{0.3}$$

où $(p_n), (q_n)$ sont deux suites d'entiers, avec $1 \leq p_n < q_n < p_{n+1}$ pour tout n. On a alors

$$\underline{\delta}_\mu(A) = \liminf_n\, (F_\mu(p_{n+1}))^{-1} \sum_{j=1}^{n} [F_\mu(q_j) - F_\mu(p_j)]\,, \tag{0.4}$$

$$\overline{\delta}_\mu(A) = \limsup_n\, (F_\mu(q_n))^{-1} \sum_{j=1}^{n} [F_\mu(q_j) - F_\mu(p_j)]\,. \tag{0.5}$$

Rappelons que lorsque μ est la mesure $\sum_{n \geq 1} \varepsilon_n$ (resp. $\sum_{n \geq 1} n^{-1} \varepsilon_n$), la μ-densité est appelée la densité *arithmétique* (resp. *logarithmique*). De même, lorsque μ est la mesure $\sum_{n \in \mathrm{P}} \varepsilon_n$ (resp. $\sum_{n \in \mathrm{P}} n^{-1} \varepsilon_n$), la μ-densité est appelée la densité arithmétique (resp. logarithmique) *conditionnelle* à P. À propos de ces densités conditionnelles, on trouve dans [3] le résultat suivant (voir les Théorèmes (1.7) et (2.1) de [3]):

(0.6) *Étant donnée une partie A de N* représentée sous la forme* (0.3), *on suppose qu'il existe un couple (ϱ, σ) de nombres réels, avec $0 < \varrho < \sigma < 1$, tel que l'on ait $q_{n-1} = \varrho q_n$, $p_n = \sigma q_n$ pour tout n assez grand. Alors:*

(*a*) *La densité arithmétique inférieure* (resp. *supérieure*) *de A coïncide avec la densité arithmétique inférieure* (resp. *supérieure*) *de A conditionnelle à* P.

(*b*) *L'ensemble A admet une densité logarithmique, ainsi qu'une densité logarithmique conditionnelle à* P, *et les valeurs de ces deux densités sont les mêmes.*

Les résultats du présent article permettrons de justifier, pour une classe d'ensembles beaucoup plus large que celle considérée dans (0.6) (voir (4.4), (4.5)), le fait que le conditionnement par rapport à P ne modifie pas les valeurs des densités inférieure et supérieure (aussi bien pour la densité arithmétique que pour la densité logarithmique).

1. - Un critère général pour la comparaison de deux densités

Le théorème élémentaire qui suit fournit un critère général permettant d'établir la coïncidence de deux densités sur une partie donnée de $\mathbb{N}^*$.

(1.1) Théorème: *On se donne un couple μ, ν de mesures et une partie A de $\mathbb{N}^*$, représentée sous la forme* (0.3). *On suppose que les deux conditions suivantes soient remplies:*

(*a*) $F_\mu(p_n) \sim F_\nu(p_n)$.

(*b*) $F_\mu(q_n) - F_\mu(p_n) \sim F_\nu(q_n) - F_\nu(p_n)$.

Alors la μ-densité inférieure (resp. *supérieure*) *de A coïncide avec la ν-densité inférieure* (resp. *supérieure*) *de A.*

Démonstration: Occupons nous des densités inférieures. Grâce à la symétrie des rôles des deux mesures μ, ν, il suffira de prouver l'inégalité $\underline{\delta}_\mu(A) \leq \underline{\delta}_\nu(A)$. À cet effet, fixons $\varepsilon > 0$. On a alors, en vertu de (*b*),

$$F_\mu(q_j) - F_\mu(p_j) \leq (1+\varepsilon)[F_\nu(q_j) - F_\nu(p_j)]$$

pour tout entier j assez grand. Il en résulte, grâce à (0.4) et à la relation $\lim_n F_\mu(p_{n+1}) = \infty$,

$$\underline{\delta}_\mu(A) \leq (1+\varepsilon) \liminf_n (F_\mu(p_{n+1}))^{-1} \sum_{j=1}^{n} [F_\nu(q_j) - F_\nu(p_j)].$$

En vertu de (*a*), on peut remplacer, au deuxième membre de cette inégalité, $F_\mu(p_{n+1})$ par $F_\nu(p_{n+1})$. On trouve ainsi (en appliquant (0.4) à la mesure ν)

$$\underline{\delta}_\mu(A) \leq (1+\varepsilon)\, \underline{\delta}_\nu(A).$$

Comme ε est arbitraire, cela suffit pour conclure.

On raisonne de manière analogue pour les densités supérieures. Il suffit pour cela d'employer (0.5), après avoir remarqué que les relations (*a*) et (*b*) (en tant que relations de comparaison entre suites de nombres réels *positifs*) entraînent, par addition, la relation $F_\mu(q_n) \sim F_\nu(q_n)$.

Nous nous proposons maintenant d'examiner deux cas particuliers intéressants dans lesquels on peut appliquer le critère qu'on vient de démontrer.

2. - Première application

(2.1) Théorème: *Considérons les deux mesures μ, ν définies par*

$$\mu = \sum_{n \geq 2} (\log n)^{-1} \varepsilon_n , \qquad \nu = \sum_{n \in \mathbb{P}} \varepsilon_n .$$

Étant donnée une partie A de $\mathbb{N}^*$, représentée sous la forme (0.3), *supposons que l'on ait*

$$\pi(q_n) - \pi(p_n) \sim \int_{p_n}^{q_n} (\log x)^{-1} \, dx . \tag{2.2}$$

Les conditions (a), (b) *de* (1.1) *sont alors remplies. Par conséquent, la μ densité inférieure* (resp. *supérieure*) *de A coïncide avec la ν-densité inférieure* (resp. *supérieure*) *de A.*

Démonstration: On a $F_\mu(n) \sim n(\log n)^{-1} \sim F_\nu(n)$, de sorte que la condition (a) de (1.1) est remplie de manière évidente. Pour achever la démonstration, posons

$$I_n = \int_{p_n}^{q_n} (\log x)^{-1} \, dx \tag{2.3}$$

et remarquons que l'on a

$$F_\mu(q_n) - F_\mu(p_n) = I_n + r_n ,$$

avec $0 \leq r_n \leq (\log p_n)^{-1}$. Il en résulte

$$F_\mu(q_n) - F_\mu(p_n) \sim I_n \sim \pi(q_n) - \pi(p_n) \sim F_\nu(q_n) - F_\nu(p_n) ,$$

de sorte que la condition (b) de (1.1) est également remplie.

Le théorème suivant peut faciliter, dans la pratique, l'application du résultat précédent. En effet, des conditions figurant dans son énoncé, chacune des trois premières est *suffisante*, tandis que la dernière est *nécessaire*, pour que la condition (2.2) soit remplie.

(2.4) Théorème: *Étant donnés une partie A de $\mathbb{N}^*$, représentée sous la forme* (0.3), *et un entier $m \geq 2$, considérons les conditions suivantes:*

(a) $1 < \inf_n (q_n/p_n)$.

(b) $q_n (\log q_n)^{-(m-1)} < q_n - p_n$.

(c) $q_n (\log q_n)^{-m} < \int_{p_n}^{q_n} (\log x)^{-1} \, dx$.

(d) $\pi(q_n) - \pi(p_n) \sim \int_{p_n}^{q_n} (\log x)^{-1} \, dx$.

(e) $(\log p_n)^{1-\varepsilon} < q_n - p_n$ *pour tout* $\varepsilon > 0$.

On a alors $(a) \Rightarrow (b) \Rightarrow (c) \Rightarrow (d) \Rightarrow (e)$.

Démonstration $(a) \Rightarrow (b)$: La condition (a) peut se mettre sous la forme équivalente $q_n \preccurlyeq q_n - p_n$. Elle entraîne donc

$$q_n (\log q_n)^{-(m-1)} \prec q_n \preccurlyeq q_n - p_n .$$

$(b) \Rightarrow (c)$ Cette implication résulte aussitôt de l'inégalité élémentaire

$$(q_n - p_n)(\log q_n)^{-1} \preccurlyeq \int_{p_n}^{q_n} (\log x)^{-1} \, dx .$$

$(c) \Rightarrow (d)$ Rappelons que l'on a

$$\pi(x) = \int_2^x (\log t)^{-1} \, dt + \varrho(x) \quad \text{avec } \varrho(x) \preccurlyeq x(\log x)^{-m}$$

(voir [1, Lemma 2.6]). Il en résulte

$$\pi(q_n) - \pi(p_n) = I_n + \varrho(q_n) - \varrho(p_n) , \tag{2.5}$$

où I_n est défini par (2.3) et où les termes $\varrho(q_n)$, $\varrho(p_n)$ vérifient, sous l'hypothèse (c), les relations

$$\varrho(q_n) \preccurlyeq q_n (\log q_n)^{-m} \prec I_n ,$$

$$\varrho(p_n) \preccurlyeq p_n (\log p_n)^{-m} \prec q_n (\log q_n)^{-m} \prec I_n .$$

Grâce à (2.5), ces relations entraînent l'équivalence désirée:

$$\pi(q_n) - \pi(p_n) \sim I_n .$$

$(d) \Rightarrow (e)$ En raisonnant par l'absurde, supposons que, sous l'hypothèse (d), la condition (e) ne soit pas remplie, c'est-à-dire qu'il existe un nombre réel $\varepsilon > 0$ et un filtre $\mathcal{F}$, plus fin que le filtre de Fréchet, suivant lequel on ait

$$q_n - p_n \preccurlyeq (\log p_n)^{1-\varepsilon} .$$

On a alors, suivant ce filtre, $p_n \sim q_n$ et par conséquent

$$\pi(q_n) - \pi(p_n) \sim I_n - (q_n - p_n)(\log p_n)^{-1} \prec (q_n - p_n)(\log p_n)^{-(1-\varepsilon)} \preccurlyeq 1 .$$

Il en résulte que la suite d'entiers $(\pi(q_n) - \pi(p_n))$ converge vers 0 suivant $\mathcal{F}$. En d'autres termes, cette suite est «définitivement nulle» (au sens que sa restriction à un élément convenable de $\mathcal{F}$ est identiquement nulle). La relation précédente montre alors qu'il en est de même de la suite (I_n), ce qui est absurde.

Le théorème est ainsi complètement démontré.

(2.6) Remarque: Dans le théorème précédent, les conditions (d), (e) ne sont pas équivalentes, en général. Pour le voir, il suffit de prendre

$$q_n = p_n + \left[\frac{1}{2}\log p_n\right].$$

3. - Deuxième application

(3.1) Théorème: *Considérons les deux mesures μ, ν définies par*

$$\mu = \sum_{n \geq 3} (\log\log n - \log\log(n-1))\,\varepsilon_n\,, \qquad \nu = \sum_{n \in \mathrm{P}} n^{-1}\varepsilon_n\,.$$

Étant donnée une partie A de N^*, représentée sous la forme (0.3), *supposons que les suites (p_n), (q_n) vérifient la relation* (2.2).

Les conditions (a), (b) de (1.1) *sont alors remplies. Par conséquent, la μ-densité inférieure* (resp. *supérieure*) *de A coïncide avec la ν-densité inférieure* (resp. *supérieure*) *de A.*

Démonstration: On a $F_\mu(n) \sim \log\log n \sim F_\nu(n)$, de sorte que la condition (a) de (1.1) est remplie de manière évidente. Pour prouver que la condition (b) est également remplie, posons

$$J_n = \int_{p_n}^{q_n} (x\log x)^{-1}\,dx = \log\log q_n - \log\log p_n = F_\mu(q_n) - F_\mu(p_n)\,,$$

et prouvons que l'on a

$$F_\nu(q_n) - F_\nu(p_n) \sim J_n$$

ou, ce qui revient au même, $\nu([p_n, q_n]) \sim J_n$. À cet effet, remarquons que la formule (2.8) de [3] permet d'écrire

$$\nu(]p_n, q_n[) = \pi(q_n)q_n^{-1} - \pi(p_n)p_n^{-1} + \int_{p_n}^{q_n} \pi(x)x^{-2}\,dx\,.$$

En outre, grâce à (0.1), on a

$$\int_{p_n}^{q_n} \pi(x)x^{-2}\,dx \sim \int_{p_n}^{q_n} (x\log x)^{-1}\,dx = J_n\,.$$

Il suffit donc de prouver la relation suivante:

$$\pi(q_n)q_n^{-1} - \pi(p_n)p_n^{-1} \prec J_n\,. \tag{3.2}$$

Nous prouverons que cette relation a lieu suivant tout ultrafiltre plus fin que le filtre de

Fréchet. Fixons donc un tel ultrafiltre $\mathfrak{U}$, et convenons que toute relation de comparaison intervenant dans la suite de la démonstration soit à entendre «suivant $\mathfrak{U}$».

Supposons d'abord $p_n \sim q_n$. Grâce au théorème des accroissements finis, on a alors (avec la notation (2.3))

$$J_n \sim p_n^{-1} I_n \sim (p_n \log p_n)^{-1} (q_n - p_n) . \tag{3.3}$$

Écrivons maintenant le premier membre de (3.2) sous la forme $a_n + b_n$, avec

$$a_n = \pi(q_n) q_n^{-1} - \pi(q_n) p_n^{-1} , \qquad b_n = \pi(q_n) p_n^{-1} - \pi(p_n) p_n^{-1} .$$

Il suffit alors de prouver que l'on a $a_n \sim -J_n$, $b_n \sim J_n$. La deuxième de ces relations résulte aussitôt de (3.3) et de l'hypothèse (2.2). Pour prouver l'autre relation, il suffit de remarquer que l'on a

$$\pi(q_n) \sim q_n (\log q_n)^{-1} \sim q_n (\log p_n)^{-1}$$

et par conséquent, grâce à (3.3),

$$a_n \sim q_n (\log q_n)^{-1} (q_n^{-1} - p_n^{-1}) = (p_n \log q_n)^{-1} (p_n - q_n) \sim -J_n .$$

Supposons maintenant $p_n \nsim q_n$, c'est-à-dire

$$1 \leqslant \log (q_n / p_n) . \tag{3.4}$$

Distinguons deux cas.

Premier cas: $\log q_n \nsim \log p_n$. Dans ce cas, la limite (suivant $\mathfrak{U}$) du rapport $\log q_n / \log p_n$ est supérieure à 1. Autrement dit, la limite du logarithme de ce rapport est strictement positive. On a donc

$$(\log q_n)^{-1} \leqslant (\log p_n)^{-1} < 1 \leqslant \log (\log q_n / \log p_n) = J_n .$$

Par conséquent, les termes $\pi(q_n) q_n^{-1}$, $\pi(p_n) p_n^{-1}$ (qui sont respectivement équivalents à $(\log q_n)^{-1}$ et à $(\log p_n)^{-1}$) sont négligeables devant J_n, de sorte que la relation (3.2) a lieu.

Deuxième cas: $\log q_n \sim \log p_n$. Dans ce cas, la relation (3.4) permet d'écrire

$$(\log q_n)^{-1} - (\log p_n)^{-1} \leqslant (\log p_n)^{-1} \log (q_n / p_n) = \log q_n / \log p_n - 1 -$$
$$- \log (\log q_n / \log p_n) = J_n .$$

On voit donc que la relation (3.2) est vraie en tout cas, et cela achève la démonstration.

4. - Comparaison avec des résultats antérieurs

Nous nous proposons maintenant de montrer que les théorèmes des sections précédentes généralisent certains des résultats de [3]. À cet effet, nous commencerons

par démontrer le théorème suivant, qui montre que la densité associée à la mesure μ de (2.1) coïncide, en fait, avec la densité arithmétique.

(4.1) THÉORÈME: *Soit μ comme dans* (2.1). *La μ-densité est alors indiscernable de la densité arithmétique, au sens suivant: pour toute fonction f positive et bornée sur $\mathbb{N}^*$, les deux suites $(a_n), (b_n)$ définies par*

$$a_n = n^{-1} \sum_{k=1}^{n} f(k), \qquad b_n = (F_\mu(n))^{-1} \sum_{k=1}^{n} f(k) (\log k)^{-1}$$

ont les mêmes valeurs d'adhérence.

DÉMONSTRATION: Sans diminuer la généralité, on pourra supposer f à valeurs dans $[0, 1]$. Remarquons que la relation élémentaire

$$F_\mu(n) \sim \int_2^n (\log x)^{-1}\, dx \sim n (\log n)^{-1}$$

entraîne

$$b_n \sim n^{-1} \log n \sum_{k=2}^{n} f(k) (\log k)^{-1} .$$

Fixons un ultrafiltre $\mathcal{U}$ sur $\mathbb{N}^*$, plus fin que le filtre de Fréchet. Il suffira alors de prouver que l'on a $\lim_{\mathcal{U}} a_n = \lim_{\mathcal{U}} b_n$ (les limites étant prises suivant $\mathcal{U}$). À cet effet, étant donné un nombre ε strictement compris entre 0 et 1, remarquons que l'on a

$$n^{-1} \sum_{k=1}^{[n^{1-\varepsilon}]} f(k) \leq n^{-1} [n^{1-\varepsilon}] \sim n^{-\varepsilon} ,$$

$$n^{-1} \log n \sum_{k=2}^{[n^{1-\varepsilon}]} f(k) (\log k)^{-1} \leq (\log 2)^{-1} [n^{1-\varepsilon}]\, n^{-1} \log n \sim n^{-\varepsilon} \log n .$$

Ces relations impliquent

$$\lim_{\mathcal{U}} a_n = \lim_{\mathcal{U}} n^{-1} \sum_{k=[n^{1-\varepsilon}]+1}^{n} f(k), \tag{4.2}$$

$$\lim_{\mathcal{U}} b_n = \lim_{\mathcal{U}} n^{-1} \log n \sum_{k=[n^{1-\varepsilon}]+1}^{n} f(k) (\log k)^{-1} . \tag{4.3}$$

On a, d'autre part,

$$n^{-1} \sum_{k=[n^{1-\varepsilon}]+1}^{n} f(k) \leq n^{-1} \log n \sum_{k=[n^{1-\varepsilon}]+1}^{n} f(k) (\log k)^{-1} \leq$$

$$\leq n^{-1} \log n (\log [n^{1-\varepsilon}])^{-1} \sum_{k=[n^{1-\varepsilon}]+1}^{n} f(k) \sim (1-\varepsilon)^{-1} n^{-1} \sum_{k=[n^{1-\varepsilon}]+1}^{n} f(k).$$

Il en résulte, grâce aux relations (4.2), (4.3),

$$\lim_n a_n \leqslant \lim_n b_n \leqslant (1-\varepsilon)^{-1} \lim_n a_n .$$

Comme ε est arbitraire, cela suffit pour conclure.

Le théorème qu'on vient de démontrer permet de déduire de (2.1) le corollaire suivant:

(4.4) COROLLAIRE: *Étant donnée une partie A de $\mathbb{N}^*$, représentée sous la forme* (0.3), *supposons que les suites* (p_n), (q_n) *vérifient la relation* (2.2).

Alors la densité arithmétique inférieure (resp. *supérieure*) *de A coïncide avec la densité arithmétique inférieure* (resp. *supérieure*) *de A conditionnelle à* P.

On remarquera que ce corollaire contient comme cas particulier la partie (*a*) de (0.6): en effet la condition $p_n = \sigma q_n$ (avec $\sigma < 1$) imposée dans (0.6) est beaucoup plus restrictive que notre condition (2.2) (voir le Théorème (2.4)).

De manière analogue, puisqu'on sait que la densité associée à la mesure μ de (3.1) est un prolongement de la densité logarithmique (voir [2, (3.5)]), on peut déduire du Théorème (3.1) le corollaire suivant (qu'on comparera avec la partie (*b*) de (0.6)):

(4.5) COROLLAIRE: *Étant donnée une partie A de $\mathbb{N}^*$, représentée sous la forme* (0.3), *supposons que les suites* (p_n), (q_n) *vérifient la relation* (2.2).

Alors la densité logarithmique inférieure (resp. *supérieure*) *de A coïncide avec la densité logarithmique inférieure* (resp. *supérieure*) *de A conditionnelle à* P.

Remerciements. – Je tiens à exprimer ma gratitude à Luca Pratelli pour ses critiques et ses suggestions, qui m'ont permis d'améliorer considérablement les résultats du présent article.

BIBLIOGRAPHIE

[1] P. D. T. A. ELLIOT, *Probabilistic Number Theory I*, Springer, Berlin (1979).

[2] A. FUCHS - R. GIULIANO ANTONINI, *Théorie générale des densités*, Rend. Acc. Naz. Sci. XL, Mem. Mat., 108 (1990), XIV, 15, 295-321.

[3] A. FUCHS - G. LETTA, *Le problème du premier chiffre décimal pour les nombres premiers*, Rend. Acc. Naz. Sci. XL, Mem. Mat., 112 (1994), XVIII, 1, 81-87.