Rendiconti
Accademia Nazionale delle Scienze detta dei XL
Memorie di Matematica e Applicazioni
114° (1996), Vol. XX, fasc. 1, pagg. 7-34

ENNIO DE GIORGI - GIACOMO LENZI (*)

La Teoria '95. Una proposta di teoria aperta e non riduzionista dei Fondamenti della Matematica (**)

RIASSUNTO. — In questa nota esponiamo una teoria dei Fondamenti della Matematica che chiamiamo *Teoria '95*, sulla quale pensiamo possano essere innestati con successo molti rami della Matematica, della Logica e dell'Informatica e forse di altre discipline. Si tratta di una teoria *aperta*, dove possono essere introdotti nuovi concetti e nuovi assiomi, e di una teoria *non riduzionista*, che evita di ridurre tutti gli oggetti della Matematica a una sola specie, ma accetta fin dall'inizio l'esistenza di oggetti qualitativamente diversi: *numeri, collezioni, qualità, relazioni, operazioni, proposizioni e predicati*. La teoria è esposta in un linguaggio informale, che ci auguriamo faciliti il confronto d'idee non solo con matematici, logici e informatici, ma anche con studiosi di altre discipline scientifiche ed umanistiche.

Parole chiave: numero, collezione, qualità, relazione, operazione, proposizione, predicato.

Theory '95. An Open-Ended, Non-Reductionist Theory for the Foundations of Mathematics

ABSTRACT. — In this paper we expose a theory for the Foundations of Mathematics which we call *Theory '95*; we think that several branches of Mathematics, Logic and Computer Science, and maybe other disciplines, could be grafted on this theory. Theory '95 is *open-ended*, in that it allows for the introduction of new concepts and axioms, and is *non-reductionist*, in that it avoids reducing all objects of Mathematics to a unique species, but it accepts from the beginning the existence of qualitatively different objects: *numbers, collections, qualities, relations, operations, propositions and predicates*. The theory is exposed in an informal language, in order to make easier the discussion not only with mathematicians, logicians and computer scientists, but also with scholars of other scientific and human disciplines.

Key words: number, collection, quality, relation, operation, proposition, predicate.

(*) Indirizzo degli Autori: Scuola Normale Superiore, Piazza dei Cavalieri 7, 56100 Pisa.
(**) Memoria presentata il 13 novembre 1995 da Ennio De Giorgi, uno dei XL.

Introduzione

In questa nota sono esposte, con sostanziali ampliamenti ed approfondimenti, le linee generali di una teoria dei Fondamenti della Matematica che è stata discussa lungamente nei seminari della Scuola Normale di quest'anno e degli anni precedenti e che perciò chiameremo «Teoria '95». Tra le sostanziali novità segnaliamo, per esempio, alcune considerazioni riguardanti le *metaqualità* e gli assiomi di rimpiazzamento e specificazione.

Noi speriamo che questa nota sia accessibile non solo a matematici e logici, ma anche a studiosi di altre discipline, perché pensiamo che i fondamenti della Matematica e della Logica non debbano essere solo oggetto di ricerca specialistica ma debbano diventare oggetto di un ampio dibattito culturale. La Teoria '95 riprende i concetti fondamentali della matematica e della logica tradizionale, vedi ad esempio [1-3, 14, 21-24], per esempio i concetti di numero, operazione, relazione, proprietà (o qualità), insieme, funzione, proposizione, predicato ecc. e li immerge in un ambiente più ampio del consueto, che chiamiamo «collezione universale» e indichiamo con la lettera *V*. *In altri termini, tutti gli oggetti di cui parla la teoria sono elementi della collezione V.*

Uno dei caratteri principali della Teoria '95 è di essere una teoria *aperta*, in cui vengono introdotti alcuni concetti e assiomi fondamentali, ma vi è la più larga disponibilità ad aggiungere nuovi concetti e nuovi assiomi. In sostanza la Teoria '95 è inspirata alle parole di Shakespeare «vi sono più cose in cielo ed in terra di quante ne sogni la tua filosofia» (Amleto, atto I, scena V), e quindi non pretende di costituire essa stessa una «filosofia» esauriente della Logica e della Matematica, ma spera solo di essere una «filosofia» molto ampia, chiara ed aperta. In questo stesso spirito antiriduzionista, la scelta dei concetti e dei termini della teoria è guidata dal desiderio di facilitare il dialogo tra studiosi di Matematica e di Logica e studiosi di altre discipline scientifiche o umanistiche, perché siamo convinti che, dallo scambio d'idee tra persone che rispettano l'autonomia delle diverse discipline, ciascuno può ricavare nuove idee, nuove ispirazioni e una migliore comprensione degli stessi problemi su cui lavora.

Per la realizzazione di questo desiderio speriamo nella collaborazione critica non solo dei logici e dei matematici, ma anche degli studiosi di altre discipline, di cui ascolteremo con attenzione osservazioni, critiche e nuove proposte di ampliamento e approfondimento della teoria.

Infine il carattere antiriduzionista della teoria si manifesta anche nella scelta di considerare molte specie di oggetti qualitativamente differenti. Per esempio parleremo di *numeri*, *operazioni*, *relazioni*, *collezioni*, *proposizioni*, *predicati*, considerati come oggetti qualitativamente differenti, e per classificarli introdurremo tra gli oggetti della teoria anche le *proprietà qualitative* (che chiameremo più brevemente *qualità o proprietà*) che individuano le diverse specie di oggetti, e in particolare la *proprietà di essere una qualità*, che indicheremo con il simbolo *Qqual*.

Notiamo che l'introduzione della collezione universale *V* e della qualità *Qqual* sono i primi passi verso la realizzazione di un alto grado di *autoriferimento* a cui tende la stessa Teoria '95. Notiamo anche che l'ispirazione dell'autoriferimento è comune a molte discipline sia scientifiche che umanistiche. Gli esempi più elementari possono essere un vocabolario, in cui tra le altre parole elencate vi è pure il termine «vocabolario», una grammatica scritta rispettando le regole grammaticali, romanzi che parlano dell'opera di un romanziere, commedie che parlano di autori di commedie («teatro nel teatro»), ecc.

L'aspirazione all'autoriferimento è nello stesso tempo naturale e «pericolosa», dato che nella ricerca del massimo autoriferimento è facile cadere in contraddizioni, ciò che in passato è avvenuto anche a matematici e logici di altissimo livello. Nello scrivere questa nota abbiamo cercato naturalmente di premunirci contro questo rischio, anche tenendo presenti le varie antinomie classiche e moderne, cominciando dalla classica «antinomia del mentitore», o dalla più popolare «antinomia del barbiere del villaggio», che fa la barba a tutti coloro che non si radono da sé, e che in fondo può essere considerata la madre di tutte le antinomie. Saremo comunque grati a quei lettori che eventualmente segnalassero qualche contraddizione in cui fossimo involontariamente caduti. Siamo infatti convinti che sia tuttora valida l'idea, comune all'antica Sapienza greca ed ebraica, che il riconoscimento dell'errore è l'inizio del sapere umano, fiduciosi che, secondo le parole di uno dei più antichi libri della Bibbia, il Libro dei Proverbi, la Sapienza viene incontro a chi la cerca con umiltà.

Questa esposizione, volendo essere il punto di partenza di un dialogo interdisciplinare, è redatta in un linguaggio informale, ma potrebbe essere formalizzata nel linguaggio del calcolo dei predicati del primo ordine ampliando l'esposizione di [18] con l'introduzione di un certo numero di costanti e di un predicato «esterno» associato all'idea di metaqualità.

Il cammino attraverso cui si è giunti alla Teoria '95 è delineato nei lavori [4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 15, 16, 17, 18, 19, 20]. Fra essi osserviamo che la nota [19] ha avuto un particolare interesse per il suo carattere critico, che la differenzia dagli altri lavori di carattere prevalentemente propositivo; la nota [19] ha segnato un punto di svolta in tale cammino, mostrando l'impossibilità di sviluppare la teoria in alcune direzioni e la conseguente opportunità di svilupparla in altre.

Per quanto riguarda i contributi dei due autori a questa esposizione, osserviamo che le considerazioni di carattere «filosofico» sono dovute prevalentemente a E. De Giorgi, mentre quelle di carattere più «tecnico» sono dovute prevalentemente a G. Lenzi.

Desideriamo ringraziare tutti i partecipanti al Seminario sui Fondamenti tenutosi presso la Scuola Normale nell'anno 95 e negli anni precedenti, e quelli di altri incontri avvenuti a Roma e a Lecce, tra cui Massimo Angrisani, Gianfranco Basti, Massimo Clavelli, Marco Forti, Michele Grassi, Furio Honsell, Antonio Leaci, Giuseppe Longo, Diego Pallara e Vincenzo Maria Tortorelli.

1. - Varie specie di oggetti

Per introdurre lo studio degli oggetti qualitativamente diversi considerati nell'introduzione dobbiamo cominciare con il primo concetto fondamentale, quello di *oggetto che gode di una certa qualità*. Data una qualità q e un oggetto x, scriveremo

$$q\ x$$

per dire che l'oggetto x *gode della qualità* q, oppure x *possiede la qualità* q, oppure q *è una qualità dell'oggetto* x: queste tre frasi sono da noi considerate perfettamente equivalenti.

Introduciamo dopo di ciò la qualità *Qop*, cioè la *qualità di essere un'operazione*. Scrivere quindi *Qop f* equivale a dire che f è un'operazione. Analogamente introduciamo la *qualità di essere una collezione*, *Qcoll*, la *qualità di essere una relazione*, *Qrel*, la *qualità di essere un numero*, *Qnum*, la *qualità di essere una proposizione*, *Qprop*, e la *qualità di essere un predicato*, *Qpred*.

Ricordiamo che tra gli oggetti di V abbiamo preannunciato nell'introduzione la qualità *Qqual*. Possiamo perciò enunciare il primo *assioma di autoriferimento* della Teoria '95:

Assioma 1A: *Qqual è una qualità. In altri termini si ha*

$$Qqual\ Qqual.$$

Le operazioni possono avere diversi gradi di complessità, quindi per cominciare introduciamo qui la *qualità di essere un'operazione semplice*, *Qops*, e la *qualità di essere un'operazione binaria*, *Qopb*; le operazioni di maggiore complessità verranno considerate in un secondo momento, dopo l'introduzione dei primi elementi della teoria dei predicati. Anche le relazioni hanno diverse complessità, perciò introduciamo la *qualità di essere una relazione binaria*, *Qrelb*, la *qualità di essere una relazione ternaria*, *Qrelt*, e la *qualità di essere una relazione quaternaria*, *Qrelq*. Postuliamo perciò l'assioma:

Assioma 1B: *Qops, Qopb, Qrelb, Qrelt, Qrelq, Qnum, Qprop e Qpred sono qualità.*

Come nel caso delle operazioni, le relazioni di tipo più complesso vengono introdotte dopo i primi elementi della teoria dei predicati.

2. - Relazioni, operazioni e collezioni

In questo capitolo esponiamo le prime idee su relazioni, operazioni e collezioni, cominciando dal concetto primitivo di *oggetti che sono in una certa relazione* e dalle notazioni che esprimono tale concetto.

Quando x, y, r sono elementi di V ed r è una relazione binaria, scriviamo

$$r\,x\,y, \quad \text{oppure } r\,x, y$$

per dire che x e y sono fra loro nella relazione r.

Un esempio di relazione binaria è il seguente: «x, y sono numeri interi e x è minore di y».

Se x, y, z, ϱ sono elementi di V e ϱ è una relazione ternaria, scriviamo

$$\varrho\,xyz, \quad \text{oppure } \varrho\,x, y, z$$

per dire che x, y, z sono fra loro nella relazione ϱ.

Un esempio di relazione ternaria, preso dalla Geometria elementare, è il seguente: «x, y, z sono tre punti allineati e x è compreso tra y e z».

Infine, se x, y, z, t, τ sono elementi di V e τ è una relazione quaternaria, scriviamo

$$\tau\,xyzt, \quad \text{oppure } \tau\,x, y, z, t$$

per dire che x, y, z, t sono fra loro nella relazione τ.

Un esempio di relazione quaternaria, anch'esso preso dalla Geometria elementare, è il seguente: «x, y, z, t sono quattro punti del piano e x è il centro di un triangolo equilatero di vertici y, z, t».

Una relazione di speciale importanza è la *relazione d'identità*, *Rid*, che soddisfa il seguente assioma:

Assioma 2A: 1) *Rid è una relazione binaria* (*cioè si ha Qrelb Rid*).

2) *Data una coppia di oggetti* x, y, *si ha*:

$$Rid\,x, y \text{ se e solo se } x = y\,.$$

In altre parole x, y stanno nella relazione *Rid* se e solo se x e y sono *lo stesso oggetto*.

Introduciamo ora un primo gruppo di relazioni che «descrivono» l'azione di alcuni dei tipi di oggetti finora elencati: la *relazione di godimento di una qualità*, *Rqual*, la *relazione di appartenenza a una collezione*, *Rcoll*, e la *relazione d'inclusione fra collezioni*, *Rincl*. La relazione *Rqual* è caratterizzata dall'assioma seguente:

Assioma 2B: 1) *Rqual è una relazione binaria*.

2) *Per ogni coppia di oggetti* q, x *si ha*:

Rqual q, x *se e solo se* q *è una qualità e* x *gode della qualità* q.

In altri termini, scrivere *Rqual* q, x equivale, secondo le notazioni introdotte in § 1, a scrivere qx.

L'assioma su *Rcoll* è il seguente:

Assioma 2C: 1) *Rcoll è una relazione binaria.*

2) *Se Rcoll C, x allora C è una collezione.*

La relazione di *appartenenza a collezioni, Rcoll*, ha il compito di «descrivere» le collezioni; infatti, se C è una collezione, x è un oggetto qualsiasi e si ha *Rcoll* Cx, allora diremo che x è un elemento della collezione C, oppure che x *appartiene* alla collezione C, e scriveremo

$$x \in C, \quad \text{oppure} \quad C \ni x .$$

Poiché tutti gli oggetti della teoria appartengono alla collezione universale V, avremo per ogni scelta di x:

$$Rcoll\ V, x \ (\text{o equivalentemente } x \in V) .$$

Al concetto di appartenenza è legato quello di *inclusione*, rappresentato dalla relazione *Rincl* che soddisfa il seguente assioma:

Assioma 2D: 1) *Rincl è una relazione binaria.*

2) *Date le collezioni C, D, si ha*

Rincl C, D se e solo se ogni elemento di C è anche elemento di D.

Talvolta, invece di scrivere *Rincl C, D* diremo che la collezione C è *inclusa* nella collezione D, o è *parte* della collezione D, oppure che D *contiene* C, e scriveremo

$$C \subseteq D, \quad \text{oppure} \quad D \supseteq C .$$

Disponendo della notazione per l'inclusione possiamo enunciare agevolmente il classico assioma di *estensionalità* per le collezioni:

Assioma 2E (Estensionalità): *Se C, D sono collezioni e se si ha simultaneamente* $C \subseteq D$, $D \subseteq C$, *allora* $C = D$.

Molte collezioni saranno considerate in seguito; qui cominciamo introducendo, accanto alla collezione universale V, altre tre collezioni notevoli: la *collezione delle collezioni, Coll*, la *collezione degli insiemi, Ins*, e l'*insieme dei numeri naturali, N*. Diamo perciò l'assioma:

Assioma 2F: 1) *V, Coll, Ins e N sono collezioni, cioè godono della qualità Qcoll;*

2) $x \in V$ *per ogni* x;

3) $C \in Coll$ *se e solo se C è una collezione;*

4) $Ins \subseteq Coll$;

5) $N \in Ins$.

Ne segue tra l'altro $Coll \in Coll$, $V \in Coll$, $Coll \subsetneq V$.

In altri termini *Coll* è la collezione di tutte le collezioni, e la sua esistenza rappresenta un aspetto fondamentale in cui la teoria delle collezioni differisce dalla teoria degli insiemi. Quest'ultima viene recuperata ammettendo l'esistenza di una collezione *Ins*, collezione di tutti gli insiemi, che verifica le due condizioni

$$Ins \in Coll\,, \qquad Ins \subsetneq Coll\,.$$

In altri termini gli insiemi sono particolari collezioni e la loro totalità costituisce la collezione *Ins* (che non è un insieme). Esistono molti insiemi, il primo tra essi è l'insieme N dei numeri naturali che anche nella Teoria '95 hanno un ruolo fondamentale come in tutta la tradizione matematica. Intuitivamente gli insiemi sono collezioni che possono essere infinite, ma non di un'infinità così «grande» come quella della collezione universale *V* e delle collezioni *Ins* e *Coll*. Questa minore grandezza rende gli insiemi particolarmente «maneggevoli» nei confronti di molte operazioni matematiche. In particolare questa «maneggevolezza» è espressa dagli assiomi di rimpiazzamento e di specificazione a cui accenneremo alla fine di questa nota.

Passiamo a un secondo gruppo di relazioni un po' più complesse che «descrivono» tutte le relazioni e le operazioni di complessità minore; abbiamo la *relazione fondamentale delle relazioni binarie, Rrelb*, la *relazione fondamentale delle relazioni ternarie, Rrelt*, la *relazione fondamentale delle operazioni semplici, Rops*, e la *relazione fondamentale delle operazioni binarie, Ropb*. Altre relazioni ancora più complesse verranno considerate dopo le prime nozioni sui predicati.

La relazione *Rrelb* verifica l'assioma seguente:

Assioma 2G: 1) *Rrelb è una relazione ternaria.*

2) *Data una terna di oggetti r, x, y, si ha*

$$Rrelb\, r, x, y \text{ se e solo se}$$

r è una relazione binaria e x, y stanno tra loro nella relazione r.

Analogamente, la relazione *Rrelt* verifica l'assioma:

Assioma 2H: 1) *Rrelt è una relazione quaternaria.*

2) *Data una quaterna di oggetti ϱ, x, y, z, si ha*

$$Rrelt\, \varrho, x, y, z \text{ se e solo se}$$

ϱ è una relazione ternaria e x, y, z stanno tra loro nella relazione ϱ.

A questo punto possiamo enunciare gli assiomi sulle relazioni *Rops* e *Ropb*:

Assioma 2I: 1) *Rops è una relazione ternaria.*

2) *Se Rops f, x, y, allora f è un'operazione semplice.*

3) (*Univocità*) *Sia* x, y, z *una terna di oggetti. Se si ha simultaneamente*

$$Rops\, f, x, y,\ Rops\, f, x, z$$

allora $y = z$.

Assioma 2L: 1) *Ropb è una relazione quaternaria.*

2) *Se Ropb* φ, x, y, z *allora* φ *è un'operazione binaria.*

3) (*Univocità*) *Sia* x, y, z, t *una quaterna di oggetti. Se si ha simultaneamente*

$$Ropb\, \varphi, x, y, z,\ Ropb\, \varphi, x, y, t$$

allora $z = t$.

Gli assiomi precedenti ci suggeriscono di usare le seguenti notazioni.

Data un'operazione semplice f, scriveremo

$$y = fx$$

in luogo di *Rops* f, x, y, e diremo che *l'operazione* f *agisce su* x *dando il risultato* y, *oppure* f *trasforma* x *in* y, *oppure* f *manda* x *in* y.

Un esempio di operazione semplice è l'operazione *Nsucc* che manda un numero intero nel numero successivo.

Data un'operazione binaria φ scriveremo

$$z = \varphi xy\,, \qquad \text{oppure } z = \varphi x, y$$

in luogo di *Ropb* φ, x, y, z, e diremo che φ *agisce sugli oggetti* x, y *dando come risultato* z, *oppure* f *trasforma* x, y *in* z.

Un esempio di operazione binaria è l'addizione di due numeri.

In altre parole, parlando di operazioni ci riferiremo sempre a operazioni univoche, cioè il valore di un'operazione semplice f su un argomento x, se esite, è univocamente determinato, e analogamente il valore di un'operazione binaria φ su una coppia di argomenti x, y è anch'esso univocamente determinato. Il primo sarà denotato fx, il secondo sarà denotato φxy oppure $\varphi x, y$. Useremo anche notazioni con parentesi, come $f(gx)$ oppure $(fg)y$; osserviamo che la prima espressione ha senso se f e g sono operazioni semplici, g agisce su x ed f agisce su gx, mentre la seconda ha senso se f è un'operazione semplice che agisce su x, e il risultato fx è a sua volta un'operazione semplice che agisce su y. Precisamente si ha $z = f(gx)$ se e solo se esiste t con

$$z = ft,\ \ t = gx;$$

analogamente $w = (fx)y$ se esiste un'operazione semplice g tale che

$$fx = g,\ \ gy = w\,.$$

In sostanza, in questi come in altri casi analoghi, vale la convenzione che le operazioni dentro le parentesi devono essere eseguite per prime.

3. - Numeri naturali

In questo capitolo introduciamo solo i primi elementi di Aritmetica, che saranno usati nei successivi capitoli 4, 5, 6, 7, 8 della teoria, e quindi diamo un'assiomatica molto debole. Precisamente in questo capitolo consideriamo, oltre all'*insieme dei numeri naturali*, N, anche l'operazione di *addizione di numeri naturali*, *Nadd*, e l'*ordinamento tra numeri naturali*, *Nord*, e i primi due numeri naturali, 0 e 1. I successivi numeri naturali 2, 3, 4, ... saranno definibili mediante addizioni ripetute. Invece per il momento non siamo interessati ad introdurre operazioni più complesse come la moltiplicazione, la divisione, l'elevamento a potenza, ecc., e neanche a formulare un principio d'induzione, che è rinviato a un capitolo successivo.

Pertanto il primo assioma sui numeri naturali è il seguente:

Assioma 3A: 1) *N è un insieme.*

2) *0 ed 1 sono due distinti elementi di N.*

3) *Nadd è un'operazione binaria.*

4) *Nord è una relazione binaria.*

Diamo ora un assioma che regola il dominio e l'immagine dell'operazione *Nadd* e l'ambiente della relazione *Nord*:

Assioma 3B: 1) *Se Nadd $x\,y = z$, allora $x, y, z \in N$.*

2) *Se $x, y \in N$ allora esiste Nadd $x\,y$.*

3) *Se Nord $x\,y$ allora $x, y \in N$.*

Spesso in luogo di *Nadd* $x\,y$ useremo la notazione $x + y$, e in luogo della frase *Nord* $x\,y$ scriveremo $x \leqslant y$.

L'assioma di commutatività e associatività dell'addizione si scrive allora nel modo seguente:

Assioma 3C: *Per ogni scelta di $x, y, z \in N$ si ha:*

1) $x + y = y + x$.

2) $x + (y + z) = (x + y) + z$.

Segue l'assioma sullo zero:

Assioma 3D: *Per ogni scelta di $x, y \in N$ si ha:*

1) $x + 0 = x$.

2) *Se $x + y = x$ allora $y = 0$.*

3) *Se $x + y = 0$ allora $x = y = 0$.*

Proseguiamo cogli assiomi sull'ordinamento *Nord* ed il suo collegamento con l'addizione *Nadd*:

Assioma 3E: *Per ogni* $x, y \in N$ *si ha:*

1) $x \leqslant y$ *oppure* $y \leqslant x$;

2) $x \leqslant y$ *se e solo se esiste* $z \in N$ *tale che* $x + z = y$.

Infine diamo l'assioma sull'uno:

Assioma 3F: *Per ogni* $x \in N$, *se* $0 \leqslant x \leqslant 1$ *allora* $x = 0$ *oppure* $x = 1$.

Col linguaggio dell'Algebra, gli assiomi precedenti possono essere riassunti dicendo che N è un *monoide ordinato discreto con primo elemento*.

Dagli stessi assiomi seguono vari teoremi, ad esempio per ogni scelta di $x, y, z \in N$ si ha:

1) $x \leqslant x$ (proprietà riflessiva);

2) se $x \leqslant y$, $y \leqslant x$ allora $x = y$ (proprietà antisimmetrica);

3) se $x \leqslant y$, $y \leqslant x$ allora $x \leqslant z$ (proprietà transitiva);

4) se $x + y = x + z$ allora $y = z$ (legge di cancellazione).

Un altro teorema afferma che dati $x, t \in N$, con $x \leqslant t$, esiste un unico numero naturale d tale che $x + d = t$; il numero d sarà chiamato *differenza* e sarà denotato col solito simbolo $t - x$.

4. - Proposizioni, predicati e metaqualità

Nello studio delle proposizioni e dei predicati si incontrano molte specie di proposizioni, per esempio proposizioni di tipo affermativo, imperativo, interrogativo, dubitativo, ecc. Alcune proposizioni sono vere, per esempio «2 + 2 = 4», altre sono false, per esempio «2 + 2 = 5», per altre può non avere senso parlare di verità o falsità, per esempio nel caso di un comando come «Chiudi la finestra», o di una domanda come «Che ora è?».

La Teoria '95, che è una teoria aperta, non pretende di esaurire tutti i concetti della Logica antica e moderna, e di studiare tutte le proposizioni vere, false, possibili, probabili, necessarie, ecc., ma concentra la sua attenzione su due collezioni di proposizioni *Mqprop* e *Apred* 0 e su alcune collezioni di predicati *Apred b* ($b \in N$, $b \geqslant 1$), che comprendono le proposizioni e i predicati che intervengono nei capitoli «classici» della Matematica e sono sufficienti per enunciare i principali assiomi e teoremi riguardanti numeri, collezioni, insiemi, relazioni, operazioni, ecc.

Le proposizioni appartenenti ad *Apred* 0 verranno chiamate anche *proposizioni di serie A* e i predicati appartenenti ad *Apred b* ($b \in N$, $b \geqslant 1$), verranno chiamati anche *pre-*

dicati di serie A e grado b, non perché siano «migliori» di altre proposizioni o predicati, ma semplicemente perché sono le prime proposizioni e predicati presi in considerazione dalla Teoria '95 ed *A* è la prima lettera dell'alfabeto. Gli elementi di *Mqprop* sono invece proposizioni «giudicate» dalle metaqualità, nel senso che godono di una e una sola delle metaqualità *Mver* e *Mfals* che verranno introdotte in questo paragrafo. Ovviamente altre collezioni egualmente significative potranno essere prese in considerazione negli ulteriori sviluppi della teoria e anzi ci auguriamo che molti studiosi vorranno collaborare *con grande libertà* a tali sviluppi, ricuperando varie teorie logiche antiche e moderne e arricchendole eventualmente di significative innovazioni.

Gli assiomi che caratterizzano *Mqprop* e *Apred* sono i seguenti:

ASSIOMA 4A: 1) *Mqprop è una collezione.*

2) *Se $x \in Mqprop$, allora x è una proposizione.*

3) *Apred è un'operazione semplice.*

4) *Per ogni $b \in N$, Apred b è una collezione.*

5) *$Apred\, 0 \subseteq Mqprop$.*

6) *Se $b \in N$ e $p \in Apred(b+1)$, allora p gode simultaneamente delle qualità Qops e Qpred e, per ogni $x \in V$, si ha $px \in Apred\, b$.*

Successivi assiomi riguardanti le proposizioni appartenenti ad *Mqprop* e i predicati appartenenti ad *Apred b* assicureranno la possibilità di «descrivere bene» mediante *Mqprop* e *Apred b* i vari oggetti finora considerati, numeri, relazioni, operazioni, collezioni, qualità, ecc. Proprio per questa «forza» di *Mqprop* non può esservi una collezione a cui appartengono tutte e sole le proposizioni *vere* appartenenti ad *Mqprop*. Questa impossibilità è espressa da un teorema già contenuto in [12] e che riprenderemo e generalizzeremo nel § 8, teorema sostanzialmente inspirato alla classica antinomia del mentitore o alla popolare antinomia del barbiere del villaggio. Analogamente si prova che non esiste una qualità goduta da tutte e sole le proposizioni vere appartenenti ad *Mqprop*.

La riflessione su queste antinomie e il desiderio di dare uno «status» preciso alle proposizioni di *Mqprop* vere o false ha portato all'introduzione di un concetto più forte del concetto di qualità, cioè il concetto di *metaqualità*. Introduciamo perciò la *qualità di essere una metaqualità, Qmetaqual*. Intuitivamente le metaqualità sono il corrispettivo «matematico» delle qualità. Infatti, anche le metaqualità saranno godute o non godute dai singoli oggetti; data una metaqualità μ e un qualunque oggetto x, scriveremo

$$\mu x$$

per dire che *l'oggetto x gode della metaqualità μ*.

Tuttavia notiamo che il concetto di «godere di una metaqualità» deve essere assunto come un nuovo concetto primitivo, simile ma non riducibile a quello

di godere di una qualità. Infatti il teorema del § 8 ci mostrerà come non possiamo ripetere per le metaqualità tutti i discorsi fatti per le qualità.

Tra le metaqualità hanno un particolare interesse le due metaqualità *Mver* e *Mfals*. La prima è goduta dalle proposizioni vere di *Mqprop* e la seconda dalle proposizione false di *Mqprop*. Noi ammettiamo che per le proposizioni appartenenti ad *Mqprop* valgano tutte le regole della logica classica e in particolare il principio di non contraddizione e quello del terzo escluso. Essi sono espressi dai seguenti assiomi:

Assioma 4B: 1) *Una proposizione appartenente ad Mqprop non può godere simultaneamente delle due metaqualità Mver e Mfals:*

2) *Ogni proposizione appartenente ad Mqprop gode di una delle due metaqualità Mver e Mfals.*

La Teoria '95 non si pronuncia sulla eventuale estensione di questi due assiomi ad altri oggetti che godono della qualità *Qprop*, tra i quali potrebbero esservi oggetti con uno status più o meno indeciso (per esempio proposizioni ambigue, interrogative, imperative, ecc.). Ammetteremo invece che sulle proposizioni appartenenti ad *Mqprop* si possano eseguire le usuali operazioni logiche *Vel*, *Et*, *Non* (vedi § 6).

Nella nostra teoria, anche l'idea di predicato universalmente vero è rappresentata dalla metaqualità *Mver*, e l'idea di predicato universalmente falso è rappresentata dalla metaqualità *Mfals*. Valgono i seguenti assiomi di tipo ricorsivo:

Assioma 4C: *Se* $p \in Apred(b+1)$ *allora:*

1) $Mver\, p$ *se e solo se* $Mver(p\,x)$ *per ogni* $x \in V$;

2) $Mfals\, p$ *se e solo se* $Mfals(p\,x)$ *per ogni* $x \in V$.

Se $p \in Apred(b+1)$ e si ha $Mver\, p$, diremo che il predicato p è *universalmente vero*. Analogamente, se $p \in Apred(b+1)$ e si ha $Mfals\, p$, diremo che il predicato p è *universalmente falso*.

Anche per i predicati di $Apred\, b$ diamo un assioma di non contraddizione:

Assioma 4D: *Se* $p \in Apred\, b$, $b \in N$, *allora non può essere simultaneamente*

$$Mver\, p\,, \qquad Mfals\, p\,.$$

Invece, come seguirà facilmente dagli assiomi successivi, i predicati appartenenti ad $Apred\, b$ in generale non verificano il principio del terzo escluso, cioè vi sono predicati che non sono né universalmente veri né universalmente falsi.

Osserviamo che i casi particolari $b = 1, 2, 3, \ldots$ dell'Assioma 4D possono essere dedotti dagli assiomi precedenti, ma l'assioma generale 4D non può essere dedotto senza disporre di un assioma d'induzione sui numeri naturali abbastanza forte.

Un'altra metaqualità interessante, che verrà usata nel § 9, è la *metaqualità di essere un predicato funzionale (o univoco)*, *Mpfunz*, che verifica il seguente assioma:

Assioma 4E: 1) *Mpfunz è una metaqualità.*

2) *Se $P \in Apred\,1$, allora P è un predicato funzionale, cioè Mpfunz P, se e solo se esiste al più un elemento x tale che la proposizione $P\,x$ è vera.*

3) *Se $P \in Apred\,b + 2$, allora si ha Mpfunz P (cioè P è funzionale) se e solo se per ogni x Mpfunz $(P\,x)$ (cioè $P\,x$ è funzionale).*

Notiamo che se $P \in Apred\,2$, allora P è funzionale se e solo se per ogni x esiste al più un y tale che $(P\,x)\,y$ è vera. Analogamente, se $P \in Apred\,3$, P è funzionale se e solo se per ogni x, y esiste al più uno z tale che $((P\,x)\,y)\,z$ è vera, ecc.

5. - Collegamento tra i predicati e le altre specie di oggetti

Nel capitolo precedente abbiamo parlato delle collezioni *Apred b* ma non abbiamo indicato alcun esempio di predicato appartenente a tali collezioni. In questo capitolo introduciamo un'operazione *Gap*, *operazione generatrice di predicati di serie A*, che verifica il seguente assioma:

Assioma 5A: 1) *Gap è un'operazione semplice;*

2) *Gap agisce su tutte le qualità, le relazioni, le operazioni e le collezioni.*

Intuitivamente $Gap\,x$ è un predicato che «descrive» l'azione dell'oggetto x, sia esso una qualità, una relazione, un'operazione o una collezione. Perciò, cominciando dalle collezioni, avremo il seguente assioma su *Gap*:

Assioma 5B: *Se C è una collezione, allora:*

1) $Gap\,C \in Apred\,1$;

2) *per ogni x la proposizione $(Gap\,C)\,x$ è vera se e solo se $x \in C$.*

L'assioma precedente afferma in sostanza che la proposizione $(Gap\,C)\,x$ «dice» che x appartiene alla collezione C, e per ricordare questo useremo talvolta la notazione mnemonica

$$«x \in C»$$

in luogo di $(Gap\,C)\,x$.

Analogamente abbiamo il seguente assioma per le qualità:

Assioma 5C: *se q è una qualità, allora:*

1) $Gap\,q \in Apred\,1$;

2) *per ogni x la proposizione $(Gap\,q)\,x$ è vera se e solo se x gode della qualità q.*

L'assioma precedente suggerisce la notazione mnemonica

$$«q\,x»$$

in luogo di $(Gap\,q)\,x$.

Nel caso delle relazioni binarie avremo l'assioma:

Assioma 5D: *Se r è una relazione binaria, allora:*

1) $Gap\,r \in Apred\,2$;

2) *per ogni x, y la proposizione $((Gap\,r)\,x)\,y$ è vera se e solo se x, y stanno nella relazione r.*

L'assioma precedente giustifica la notazione

$$«r\,x, y», \text{ oppure } «r\,x\,y»$$

in luogo di $((Gap\,r)\,x)\,y$.

In particolare per $r = Rid$ scriveremo

$$«x = y»$$

in luogo di $((Gap\,Rid)\,x)\,y$.

Nel caso delle relazioni ternarie l'assioma sarà:

Assioma 5E: *Se ϱ è una relazione ternaria, allora:*

1) $Gap\,p \in Apred\,3$;

2) *per ogni x, y, z la proposizione $(((Gap\,\varrho)\,x)\,y)\,z$ è vera se e solo se x, y, z stanno nella relazione ϱ.*

L'assioma precedente giustifica la notazione

$$«\varrho\,x, y, z», \text{ oppure } «\varrho\,x\,y\,z»$$

in luogo di $(((Gap\,\varrho)\,x)\,y)\,z$.

Nel caso delle relazioni quaternarie l'assioma sarà:

Assioma 5F: *Se τ è una relazione quaternaria, allora:*

1) $Gap\,\tau \in Apred\,4$;

2) *per ogni x, y, z, t la proposizione $((((Gap\,\tau)\,x)\,y)\,z)\,t$ è vera se e solo se x, y, z, t stanno nella relazione τ.*

L'assioma precedente giustifica la notazione

$$«\tau\,x, y, z, t», \text{ oppure } «\tau\,x\,y\,z\,t»$$

in luogo di $((((Gap\,\tau)\,x)\,y)\,z)\,t$.

Per le operazioni semplici avremo l'assioma:

Assioma 5G: *Se f è un'operazione semplice, allora*:

1) $Gap\, f \in Apred\, 2$;

2) *per ogni x, y la proposizione $((Gap\, f)x)y$ è vera se e solo se f trasforma x in y.*

L'assioma precedente giustifica la notazione

$$«fx = y», \text{ oppure } «y = fx»$$

in luogo di $((Gap\, f)x)y$.

Analogamente per le operazioni binarie avremo l'assioma:

Assioma 5H: *Se φ è un'operazione semplice, allora*:

1) $Gap\, \varphi \in Apred\, 3$;

2) *per ogni x, y, z la proposizione $(((Gap\, \varphi)x)y)z$ è vera se e solo se φ trasforma x, y in z.*

L'assioma precedente giustifica la notazione

$$«\varphi x\, y = z» \text{ oppure } «\varphi x, y = z» \text{ oppure } «z = \varphi x, y» \text{ oppure } «z = \varphi x, y»$$

in luogo di $(((Gap\, \varphi)x)y)z$.

Osserviamo che nelle notazioni appena introdotte per le operazioni semplici e binarie abbiamo usato un nuovo simbolo $=$; l'uso di questo simbolo serve ad evitare confusione tra la proposizione

$$((Gap\, f)x)y\,, \quad \text{cioè } «fx = y»$$

e la proposizione

$$((Gap\, Rid)(fx))y\,, \quad \text{cioè } «fx = y»;$$

notiamo che, se l'operazione f agisce su x e dà come risultato y, entrambe queste proposizioni sono vere; se l'operazione f agisce su x e dà un risultato diverso da y, entrambe queste proposizioni sono false; tuttavia se l'operazione f *non* agisce su x, allora la prima è falsa, ma la seconda non ha senso perché non ha senso l'espressione fx.

Analoghe considerazioni valgono nel caso delle operazioni binarie.

Per unificare la trattazione dell'operazione *Gap* su molti oggetti matematici si può introdurre l'operazione *Ar*, *arietà*, che sostanzialmente indica la complessità di un oggetto. Precisamente vale l'assioma:

Assioma 5I: 1) *Ar è un'operazione semplice*;

2) *per ogni collezione C e per ogni qualità q si ha $Ar\, C = Ar\, q = 1$*;

3) *per ogni relazione r si ha $Ar\, r \in \mathbf{N}$, $Ar\, r \geq 2$*;

4) *per ogni operazione f si ha $Ar\,f \in N$, $Ar\,f \geqslant 2$;*

5) *una relazione r è binaria se e solo se $Ar\,r = 2$, è ternaria se e solo se $Ar\,r = 3$, ed è quaternaria se e solo se $Ar\,r = 4$;*

6) *un'operazione f è semplice se e solo se $Ar\,f = 2$, ed è binaria se e solo se $Ar\,f = 3$.*

Osserviamo che non abbiamo imposto ad Ar di essere definita solo su collezioni, qualità, relazioni e operazioni, e anzi riteniamo che Ar possa essere definita anche su altri oggetti, e non escludiamo a priori che possa assumere anche valori che non sono numeri naturali.

Il collegamento tra Ar e Gap è dato dal seguente assioma:

Assioma 5L: *Se $Ar\,x = h \in N$, $h \geqslant 1$, allora $Gap\,x \in Apred\,h$.*

Accanto all'operazione Ar possiamo introdurre le relazioni fondamentali di $Rfond\,h$, $h \in N$, $h \geqslant 1$. Intuitivamente la relazione $Rfond\,h$ descrive l'azione di tutti gli oggetti di arietà h. Le relazioni $Rfond\,h$ sono generate dall'operazione $Rfond$ che verifica il seguente assioma:

Assioma 5M: *1) $Rfond$ è un'operazione semplice;*

2) se $h \in N$, $h \geqslant 1$ allora $Rfond\,h$ è una relazione di arietà $h + 1$;

3) se $Ar\,x = h \in N$, $h \geqslant 1$ allora $(Gap(Rfond\,h))x = Gap\,x$;

4) se $h \in N$, $h \geqslant 1$ ma la proposizione «$Ar\,x = h$» è falsa, allora $(Gap(Rfond\,h))x$ è un predicato universalmente falso.

Dall'assioma precedente segue che, per ogni oggetto a di arietà 1, si ha

$$(Rfond\,1)\,a, x \text{ se e solo se } Mver((Gap\,a)x);$$

quando queste due condizioni si verificano, scriveremo talvolta

$$a \uparrow \downarrow x\,.$$

Analogamente l'assioma implica che, per ogni oggetto b di arietà 2, si ha

$$(Rfond\,2)\,b, x, y \text{ se e solo se } Mver(((Gap\,b)x)y);$$

quando queste due condizioni si verificano, scriveremo anche

$$b \uparrow \downarrow x, y\,.$$

Talvolta notazioni analoghe sono usate anche per arietà superiori (vedi ad es. [11], [16]).

Infine, disponendo della metaqualità *Mpfunz* e dell'operazione *Gap*, possiamo dare agevolmente l'assioma di funzionalità per tutte le operazioni, nel modo seguente:

Assioma 5N: *Se f è un'operazione allora $Gap\,f$ è un predicato funzionale, cioè $Mpfunz(Gap\,f)$.*

6. - Operazioni logiche su proposizioni e predicati

Nel paragrafo precedente abbiamo visto che con i predicati appartenenti ad *Apred b* si possono esprimere proposizioni «atomiche» come ad esempio «2 + 2 = 4», che si esprime come «*Nadd* 2, 2 = 4», cioè $(((Gap\,Nadd)\,2)\,2)\,4$.

Accanto alle proposizioni atomiche ci sono quelle ottenibili dal *calcolo delle proposizioni e dei predicati*. Introduciamo quindi le *operazioni booleane su proposizioni*, cioè la *congiunzione Et*, la *disgiunzione Vel* e la *negazione Non*; inoltre introduciamo le quantificazioni *esistenziale*, *Exist*, ed *universale*, *Univ*, sulle quali postuliamo:

Assioma 6A: *1) Et, Vel sono operazioni binarie; Non, Exist, Univ sono operazioni semplici.*

2) Se α, β sono elementi di Mqprop, allora esistono $Et\,\alpha\beta$, $Vel\,\alpha\beta$, $Non\,\alpha$ e appartengono ad Mqprop.

3) Se α, β sono elementi di $Apred\,b$, $b \in N$, allora esistono $Et\,\alpha\beta$, $Vel\,\alpha\beta$, $Non\,\alpha$ e appartengono ad $Apred\,b$.

4) Se $p \in Apred(b+1)$, allora esistono $Exist\,p$, $Univ\,p$ e appartengono ad $Apred\,b$.

Adottando le usuali notazioni scriveremo $\alpha \& \beta$, $\alpha \vee \beta$, $\neg \alpha$ in luogo di $Et\,\alpha\beta$, $Vel\,\alpha\beta$, $Non\,\alpha$. Inoltre poniamo

$$\alpha \rightarrow \beta = (\neg \alpha) \vee \beta;$$

$$\alpha \leftrightarrow \beta = (\alpha \rightarrow \beta) \& (\beta \rightarrow \alpha);$$

$$«x \neq y» = \neg «x = y»;$$

$$«x \notin C» = \neg «x \in C».$$

Se poi $p \in Apred(b+1)$, scriveremo $\exists p$, $\forall p$ in luogo di $Exist\,p$, $Univ\,p$. Talvolta al posto di $\exists p$ e $\forall p$ useremo la scrittura più familiare «$\exists x(p\,x)$», «$\forall x(p\,x)$» oppure «$\exists z(p\,z)$», «$\forall z(p\,z)$», ecc., mentre scriveremo $\exists x(p\,x)$ in luogo di $Mver(\exists p)$, $\forall x(p\,x)$ in luogo di $Mver(\forall p)$, ecc.

Sull'azione delle operazione logiche sui predicati di $Apred(b+1)$ abbiamo l'assioma seguente, che scambia l'azione delle operazioni logiche con quelle dei predicati, visti come operazioni:

Assioma 6B: *Per ogni scelta di* $p, q \in Apred(b+1)$, $r \in Apred(b+2)$ *e per ogni* $x \in V$ *si ha:*

1) $(p \vee q)x = (px) \vee (qx)$;
2) $(p \& q)x = (px) \& (qx)$;
3) $(\neg p)x = \neg(px)$;
4) $(\exists r)x = \exists(rx)$;
5) $(\forall r)x = \forall(rx)$.

Diamo ora alcune condizioni di verità sulle proposizioni ottenute mediante applicazioni di operazioni logiche:

Assioma 6C: *Per ogni scelta di* $\alpha, \beta \in Maprop$, $p \in Apred\,1$ *si ha:*

1) $\neg\alpha$ *è vera se e solo se* α *è falsa;*
2) $\alpha \vee \beta$ *è vera se e solo se almeno una tra* α *e* β *è vera;*
3) $\alpha \& \beta$ *è vera se e solo se sia* α *che* β *sono vere;*
4) $\exists p$ *è vera se e solo se* px *è vera per qualche* x;
5) $\forall p$ *è vera se e solo se* px *è vera per ogni* x.

Introduciamo ora alcune classiche notazioni mnemoniche.

Siano $\alpha, \beta \in Maprop$. Quando si ha $Mver(\alpha \to \beta)$ scriveremo $\alpha \Rightarrow \beta$, e diremo che la proposizione α *implica* la proposizione β. Quindi si ha $\alpha \Rightarrow \beta$ se e solo se α è falsa oppure β è vera. Useremo notazioni analoghe anche per $p, q \in Apred\,b$.

Analogamente, quando si ha $Mver(\alpha \leftrightarrow \beta)$ scriveremo $\alpha \Leftrightarrow \beta$, e diremo che la proposizione α *equivale* alla proposizione β. Quindi si ha $\alpha \Leftrightarrow \beta$ se e solo se α, β sono o entrambe vere o entrambe false. Useremo notazioni analoghe anche per $p, q \in Apred\,b$.

Inoltre sia $p \in Apred\,1$. Scriveremo $\exists x(px)$ quando la proposizione $\exists p$ è vera, e scriveremo $\forall x(px)$ quando la proposizione $\forall p$ è vera. Useremo anche notazioni analoghe per quantificazioni ripetute; ad esempio, se $q \in Apred\,2$, scriveremo $\exists x \forall y(qx)y$ quando la proposizione $\exists(\forall q)$ è vera, ecc.

7. - Manipolazioni combinatorie

Nell'impostazione del paragrafo precedente, le operazioni binarie &, $\vee$ sono applicate a due predicati P, Q solo quando P e Q appartengono alla stessa classe $Apred\,b$. Per avere una teoria sia pur parziale del calcolo dei predicati abbastanza efficiente, è necessario un procedimento che consenta di ricondursi sempre a predicati che appartengono alla stessa collezione. Ciò può ottenersi introducendo l'operazione *generatrice di operazioni a risultato costante*, K, che è caratterizzata dagli assiomi seguenti:

Assioma 7A: 1) *K è un'operazione semplice.*

2) *Per ogni $x \in V$ esiste Kx ed è un'operazione semplice.*

3) *Per ogni $x, y \in V$ si ha $(Kx)y = x$. Cioè K associa ad ogni $x \in V$ un'operazione che, applicata a un qualsiasi $y \in V$, dà come risultato x.*

4) *Se $h \in N$, $P \in Apred\, h$, allora $KP \in Apred\,(h+1)$.*

Problemi più complicati si hanno quando si vuole cambiare l'ordine in cui vari oggetti sono «presi in considerazione» da un predicato. Per esempio, dato un predicato $P \in Apred\, 2$, si vuole trovare un predicato $Q \in Apred\, 2$ tale che, per ogni scelta degli oggetti x, y, si abbia $(Qx)y = (Py)x$; oppure, dato un predicato $\alpha \in Apred\, 3$, si vuole trovare un predicato $\beta \in Apred\, 3$ tale che $((\alpha x)y)z = ((\beta z)y)x$, ecc.

Per realizzare queste trasposizioni disponendo dei numeri naturali e delle operazioni binarie, ma non ancora delle nozioni di sostituzione e di n-upla, introdurremo un'operazione binaria di *trasposizione di predicati affermativi*, *Trap*, caratterizzata dagli assiomi seguenti:

Assioma 7B: 1) *Trap è un'operazione binaria.*

2) *Se $h, k \in N$, $h, k \geq 1$, allora esiste $Trap\, h\, k$ ed è un'operazione semplice.*

3) *Se $p \in Apred\, n$, $n \in N$, $n \geq h, k$ allora $(Trap\, h, k)p \in Apred\, n$.*

Per descrivere rapidamente le ulteriori proprietà di *Trap*, adottiamo nei successivi assiomi la notazione $T_{hk} = Trap\, h\, k$. Nel prossimo assioma ammetteremo anche che gli indici h, k, s, n siano numeri naturali e che si abbia $1 \leq h \leq n$, $1 \leq k \leq n$, $1 \leq s \leq n$ e $P \in Apred\, n$.

Assioma 7C: 1) $T_{hh} P = P$.

2) $T_{hk} P = T_{kh} P$.

3) *Se $n \geq 2$, allora* $((T_{1,2} P)x)y = (Py)x$;

4) $T_{hk}(T_{hk} P) = P$.

5) *Se $h, k \geq 2$, allora* $(T_{hk} P)x = T_{h-1,k-1}(Px)$.

6) *Se $s \neq h, k$ allora*

$$T_{hk}(T_{sh}(T_{hk} P)) = T_{sh} P\,.$$

Dagli assiomi precedenti si possono dedurre vari teoremi che in sostanza garantiscono ampie possibilità di scambio fra gli oggetti su cui successivamente opera un predicato appartenente ad $Apred\, h$. Ad esempio, applicando i punti 3) e 5) abbiamo:

1) Se $p \in Apred\, 3$ allora

$$(((T_{2,3} p)x)y)z = ((p\, x)z)y;$$

2) Se $p \in Apred\,4$ allora

$$(((((T_{3,4}p)x)y)z)t = (((p\,x)y)t)z\,;$$

applicando anche il punto 6) si trova:

3) Se $p \in Apred\,3$ allora

$$(((T_{1,3}p)x)y)z = ((p\,z)y)x;$$

4) Se $p \in Apred\,4$ allora

$$(((((T_{1,4}p)x)y)z)t = (((p\,t)y)z)x\,;$$

$$(((((T_{2,4}p)x)y)z)t = (((p\,x)t)z)y\,;$$

Analogamente si procede per predicati di grado più alto.

Attraverso le operazioni introdotte in questo e nei due paragrafi precedenti possiamo, sia pur faticosamente, arrivare a costruire tutte le proposizioni che interessano nelle usuali applicazioni del calcolo dei predicati. probabilmente questa fatica potrebbe essere sensibilmente alleviata considerando collezioni di predicati diverse dalle collezioni *Apred b* e usando (come si è fatto per esempio in [12]) alcune nozioni di Analisi riguardanti insiemi finiti, funzioni, n-uple, sostituzioni, ecc., che in questa trattazione non abbiamo voluto utilizzare, preferendo rinviare a un secondo tempo l'innesto dell'Analisi sul tronco della Teoria '95.

La ricerca delle migliori presentazioni del calcolo dei predicati nel quadro della Teoria '95 e dei suoi collegamenti con la teoria degli insiemi e delle funzioni è uno dei problemi aperti su cui vorremmo richiamare l'attenzione degli studiosi interessati.

8. - Il teorema del mentitore

Il paragrafo precedente conclude l'esposizione della teoria base '95. Osserviamo che sarebbe possibile dedurre dagli assiomi esposti vari teoremi riguardanti qualità, relazioni, operazioni, collezioni, numeri naturali, proposizioni e predicati. Uno dei teoremi più significativi è ispirato alla classica antinomia del mentitore, secondo la quale la proposizione «io mento» non è né vera né falsa. Nella nostra teoria, ciò si traduce in un risultato limitativo sulla potenza espressiva dei predicati appartenenti ad *Apred b*: nessuno di essi può esprimere il fatto che una proposizione è vera, e quindi *Gap Mver* $\notin$ $\notin$ *Apred* 1.

Per dimostrarlo useremo il seguente lemma:

Lemma: *Se* $\beta \in Apred\,1$, *allora esiste* $q \in Apred\,1$ *tale che per ogni* $p \in Apred\,1$ *si ha*:

$$q\,p \Leftrightarrow \neg\beta(p\,p)\,.$$

Dimostrazione: Poniamo

$$q_1 = T_{2,3}(Gap\ Rops) \& T_{1,3}(K(gap\ Rid));$$

$$q_2 = \exists q_1;$$

$$q_3 = q_2 \& \neg K\,\beta;$$

$$q = \exists q_3;$$

In tal modo si ha, per ogni x, y, z:

$$q_1 \in Apred\,3\,,\ \ ((q_1 x)\,y)\,z = «Rops\,x, z, y» \ \&\ «xz»;$$

$$q_2 \in Apred\,2\,,\ \ (q_2 x)\,y = «Rops\,x, x, y»;$$

$$q_3 \in Apred\,3\,,\ \ (q_3 x)\,y = «Rops\,x, x, y» \& \neg(\beta\,y).$$

Inoltre se x è un'operazione semplice che agisce su se stessa, si ha

$$q\,x \Leftrightarrow \neg\beta(x\,x)\,.$$

Basta ora prendere $x = p$ per avere la tesi. Q.E.D.

Dal lemma si deriva immediatamente il seguente teorema:

Teorema: *Non esiste un predicato $\beta \in Apred\,1$ tale che per ogni $\alpha \in Apred\,0$ si abbia*

$$(\beta\ \alpha) \Leftrightarrow \alpha\,.$$

In altre parole non esiste un predicato di Apred 1 che esprime la verità di tutte le proposizioni di Apred 0.

Dimostrazione: Se esistesse un tale β allora, prendendo $p = q$ e $\alpha = q\,q$ nel lemma precedente, otterremmo

$$\alpha \Leftrightarrow (\neg\,\alpha)\,,$$

e ciò è assurdo. Q.E.D.

Corollario 1: *Non esiste una qualità q tale che α gode della qualità q se e solo se α è una proposizione vera appartenente ad Mqprop.*

Corollario 2: *Non esiste una collezione C tale che $\alpha \in C$ se e solo se α è una proposizione vera appartenente ad Mqprop.*

I corollari si dimostrano considerando $\beta = Gap\,q$ e $\beta = Gap\,C$ rispettivamente.

9. - Cenni sull'innesto della teoria degli insiemi e delle funzioni

Il teorema del paragrafo precedente conclude la Teoria '95 ma lascia aperta la via a un amplissimo programma di ricerca diretto a innestare molti rami della Matematica, della Logica e dell'Informatica ed eventualmente di altre discipline sul tronco della stessa teoria.

Tale innesto aiuterebbe a capire meglio i rapporti tra Matematica, Logica e Informatica e potrebbe contribuire al progresso di tutte queste discipline.

Per la piena realizzazione di questo programma è necessaria la collaborazione di molti studiosi che si muovano con indipendenza e con una certa audacia in varie direzioni e poi confrontino i risultati conseguiti e i problemi incontrati nella loro ricerca. Per fornire uno dei vari modi in cui si potrebbero innestare l'aritmetica e la teoria degli insiemi, delle funzioni, delle collezioni e delle correlazioni esponiamo ora pochi assiomi semplici ma di notevole forza, che potrebbero essere il primo passo di tale innesto.

Mentre i numeri naturali hanno permesso l'introduzione delle classi *Apred b* e quindi in un certo senso l'Aritmetica è premessa alla Logica, l'introduzione alla collezione *Apred* 1 consente di enunciare una versione abbastanza forte del *principio* d'induzione per numeri naturali. Diamo perciò la definizione di *minimo numero naturale verificante un predicato* $p \in$ *Apred* 1.

Definizione: *Sia m un numero naturale e sia $p \in$ Apred 1. Diremo che m è il minimo numero naturale verificante p se:*

1) *$p\,m$ è vera;*

2) *$p\,n$ è falsa per ogni numero naturale $n < m$.*

Perciò possiamo enunciare il principio d'induzione nel modo seguente:

Assioma 9A: *Se $p \in$ Apred 1 ed esiste almeno un $n \in \mathbf{N}$ che verifica p, allora esiste un minimo $n \in \mathbf{N}$ che verifica p.*

Notiamo che ogni innesto eseguito sulla Teoria '95 che arricchisce la collezione *Apred* 1 rafforza in sostanza l'Assioma 9A, quindi la Teoria '95 è un'ottima base per lo sviluppo di varie teorie aritmetiche più o meno forti, e in particolare per la discussione dei modelli standard e non-standard dell'Aritmetica.

L'assioma fondamentale della teoria degli insiemi è probabilmente l'*assioma di rimpiazzamento*. Esso può essere enunciato usando la definizione di predicato funzionale (mediante la metaqualità *Mpfunz*) nel modo seguente:

Assioma 9B: *Dato un insieme E ed un predicato funzionale $P \in$ Apred 2, esiste un insieme L tale che $y \in L$ se e solo se esiste $x \in E$ tale che $(P\,x)y$ è vera.*

L'insieme L sarà indicato col simbolo $\bar{P}(E)$ oppure, con notazione più vicina a quel-

le usuali, col simbolo

$$\{y \mid \exists x \in E \cdot ((P\,x)\,y)\}\,.$$

Dall'esistenza dell'insieme N e dall'assioma di rimpiazzamento si deduce l'esistenza di moltissimi insiemi finiti. Per cominciare, l'insieme vuoto $\emptyset$ si ottiene con $E = N$ e $P = q \,\&\, (\neg q)$, ove q è un qualsiasi elemento di *Apred* 2. Inoltre per ogni $a \in V$ si ottiene il singoletto $\{a\}$ di a, cioè l'insieme a cui appartiene solo a, usando un predicato p tale che $(p\,x)\,y \Leftrightarrow$ «$x = 1$» & «$y = a$». Analogamente si ottengono tutti gli insiemi di due, tre, quattro elementi, ecc., considerando disgiunzioni di predicati p tali che $(p\,x)\,y \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow$ «$x = i$» & «$y = a_i$». Ad esempio l'insieme $\{a, b\}$ cui appartengono solo gli oggetti a, b si ottiene dall'insieme $E = N$ e da un predicato p tale che

$$(p\,x)\,y = (\text{«}x = 1\text{»} \,\&\, \text{«}y = a\text{»}) \vee (\text{«}x = 2\text{»} \,\&\, \text{«}y = b\text{»})\,.$$

Un'immediata conseguenza dell'assioma di rimpiazzamento è il seguente *teorema di specificazione o separazione*:

Teorema: *Dati $q \in$ Apred 1 e un insieme E, esiste un insieme L tale che $y \in L$ se e solo e $y \in E$ e qy è vera.*

Dimostrazione: Basta prendere il predicato

$$p = (Gap\ Rid) \,\&\, (Kq)$$

e applicare il rimpiazzamento a p ed E. Q.E.D.

Applicando questo teorema ai casi in cui $C \in Coll$, $q = Gap\,C$, si trova che se $E \in Ins$, allora $C \cap E \in Ins$.

Altri due classici assiomi insiemistici sono l'assioma dell'unione e l'assioma delle parti. Diamo perciò i corrispondenti assiomi nella nostra teoria:

Assioma 9C: *Se $E \in Ins$, $E \subseteq Ins$, allora esiste un insieme U tale che $x \in U$ se e solo se esiste $y \in E$ per cui $x \in y$.*

Assioma 9D: *Se $X \in Ins$ allora esiste un insieme Y tale che $y \in Y$ se e solo se $y \in Ins$, $y \subseteq X$.*

Per lo studio dei Sistemi insiemistici e delle funzioni considerati ad esempio in [16] introduciamo la collezione *Sys* dei sistemi e la collezione *Fun* delle funzioni. Mentre il concetto di funzione viene dalla Matematica classica, il concetto di sistema è più recente e generalizza i concetti di lista finita, vettore, matrice, ecc.; in tutti questi esempi, certi oggetti sono indici del sistema e vengono associati dal sistema ad altri oggetti, chiamati valori. Il concetto di sistema può essere innestato sulla Teoria '95 con i seguenti assiomi:

Assioma 9E: 1) *Sys è una collezione.*

2) *Se* $S \in Sys$, *allora* $Ar\,S = 2$.

3) *Se* $S, T \in Sys$, $Gap\,S \Leftrightarrow Gap\,T$, *allora* $S = T$.

Dunque i sistemi sono oggetti binari e verificano un assioma di estensionalità. Se S è un sistema e la proposizione $((Gap\,S)x)y$ è vera, allora diremo che x è un indice del sistema S, e che y è un valore del sistema S associato all'indice x.

Il collegamento tra i sistemi e gli insiemi è assicurato dal seguente assioma.

Assioma 9F: 1) *Dato un sistema* S, *esiste un insieme* E *tale che, se* $((Gap\,S)x)y$ *è vera, allora* $x \in E$, $y \in E$.

2) *Viceversa, se* $p \in Apred\,2$ *ed esiste* $E \in Ins$ *tale che* $(px)y \Rightarrow$ «$x \in E$» & «$y \in E$», *allora esiste* $S \in Sys$ *tale che* $Gap\,S \Leftrightarrow p$.

Osserviamo che l'assioma precedente implica l'esistenza di moltissimi sistemi. Per cominciare il sistema vuoto $\emptyset_2$ si ottiene considerando un predicato di *Apred* 2 universalmente falso. Inoltre considerando opportuni predicati si ottengono tutti i possibili sistemi con n indici e m valori, con $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ e $m = 0, 1, 2, 3, \ldots$.

Le funzioni sono caratterizzate dal seguente assioma:

Assioma 9H: 1) *Fun è una collezione.*

2) $z \in Fun$ *se e solo se* $z \in Sys$, $Mpfunz(Gap\,z)$.

Dunque le funzioni sono esattamente i sistemi associati a predicati funzionali.

10. - Innesto delle collezioni e delle correlazioni

Per inserire una teoria delle collezioni come quella di [16] nella Teoria '95 conviene introdurre l'operazione semplice *Colp*, *generatrice di collezioni di predicati associati alle collezioni*. L'assioma su *Colp* è il seguente:

Assioma 10A: 1) *Colp è un'operazione semplice.*

2) *Se* $h \in \mathbf{N}$, *allora* $Colp\,h$ *è una collezione e* $Colp\,h \subseteq Apred\,h$.

3) *Se* $p \in Colp(h+1)$, *allora* $\exists p, \forall p \in Colp\,h$, *e inoltre si ha* $px \in Colp\,h$ *per ogni* x.

4) *Se* $p, q \in Colp\,h$ *allora* $p \vee q$, $p \,\&\, q$, $\neg p \in Colp\,h$, *e inoltre* $Kp \in Colp(h+1)$, *e se* $i, j \in \mathbf{N}$, $i, j \geq 1$, $i, j \leq h$, *allora* $T_{ij}p \in Colp\,h$.

5) *Per ogni collezione* C *si ha* $Gap\,C \in Colp\,1$.

6) *Se* $p \in Colp\,1$, *esiste* $C \in Coll$ *tale che* $p \Leftrightarrow Gap\,C$.

7) *Esiste* $b \in Colp\,2$ *tale che* $(bx)y \Rightarrow$ «$y \in x$» & «$x \in Ins$».

8) *Esiste* $q \in Colp\,3$ *tale che* $((qx)y)z \Leftrightarrow$ «$(Rfond\,2)x, y, z$» & «$x \in Sys$».

Da questi assiomi si possono dedurre molti teoremi delle teorie classiche degli insiemi e di quella delle collezioni, contenuta in [16]; per esempio per ogni $b \in N$ abbiamo l'esistenza della collezione V^b di tutte le b-uple, ove una b-upla è una funzione i cui indici sono esattamente i numeri naturali da 1 ad b. La b-upla che associa 1 ad x_1, 2 ad x_2, ..., b ad x_b è denotata $(x_1, x_2, \ldots, x_b)$.

Inoltre si possono dedurre vari teoremi di non appartenenza a *Ins* di alcune collezioni notevoli, per esempio le collezioni degli ordinali, dei cardinali, ecc., e teoremi di non appartenenza a *Colp b* di alcuni predicati notevoli, come i predicati «di Russell» $P \in Apred\,1$, tali che per ogni $xPx \Leftrightarrow$ «$x \in Coll$» & «$x \notin x$».

Introduciamo infine le *correlazioni*, che formano la collezione *Corr*. Tale collezione verifica il seguente assioma:

Assioma 10B: 1) *Corr è una collezione e* $Sys \subseteq Corr$.

2) *Se* $z \in Corr$, *allora* $Ar\,z = 2$.

3) (*Estensionalità*) *Se* $z, t \in Corr$, $Gap\,z \Leftrightarrow Gap\,t$, *allora* $z = t$.

4) *Per ogni* $z \in Corr$ *esiste una collezione* $C \subseteq V^2$ *tale che per ogni* $x, y((Gap\,z)x)y \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow$ «$(x, y) \in C$».

5) *Viceversa, per ogni* $C \in Coll$ *esiste* $z \in Corr$ *tale che per ogni* $x, y((Gap\,z)x)y \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow$ «$(x, y) \in C$».

Le *correlazioni funzionali* formano la collezione *Corfun* che verifica il seguente assioma:

Assioma 10C: 1) *Corfun è una collezione.*

2) $z \in Corfun$ *se e solo se* $z \in Corr$ *e inoltre* $Gap\,z$ *è funzionale.*

Questi assiomi gettano le basi di una teoria degli insiemi, funzioni, collezioni e correlazioni inserita nell'ambito della Teoria '95. Notiamo che, sia pure al prezzo di un lavoro un po' lungo, si possono recuperare molti teoremi della teoria degli insiemi e delle funzioni e della teoria delle collezioni di [16]. Si potrebbero anche approfondire le indagini sulle collezioni di cui si può dimostrare la non appartenenza a *Ins* e sui predicati di *Apred b* che non hanno equivalenti in *Colp b*.

Naturalmente, poiché la nostra è una teoria aperta, agli assiomi sopra indicati si possono aggiungere altri assiomi, per esempio varie versioni dell'assioma di Zermelo o delle sue negazioni, varie forme dell'ipotesi del continuo, varie forme di assiomi di fondazione e libera costruzione, Analisi standard e non standard, ecc.

Probabilmente il quadro della Teoria '95 è idoneo a trattare tutti questi temi nel modo più chiaro e trasparente possibile.

Disponendo di una buona teoria di insiemi, collezioni, funzioni e correlazioni si può anche riprendere il calcolo dei predicati esposto in [12] e studiare collezioni

di predicati di potenza espressiva non inferiore alle collezioni *Apred b* e di più agevole manipolazione formale.

11. - Altri problemi aperti

Concludiamo questa nota proponendo altri problemi aperti all'attenzione degli studiosi interessati.

Un primo problema è un recupero di vari tipi di logica classica e non classica nell'ambito della Teoria '95, comprese le logiche modali, temporali, probabilistiche, ecc. Infatti è verosimile che molte di tali logiche possano essere trattate molto bene in tale quadro.

Un problema analogo è l'innesto di varie branche classiche e moderne della Matematica, come teoria delle categorie, calcolo delle probabilità, ecc.

Un diverso tipo di problematica è lo studio più approfondito dei teoremi di non esistenza collegati alle più note antinomie, allo scopo di individuare le proprietà della struttura delle proposizioni e dei predicati che sono cause essenziali di tali risultati di non esistenza.

Per esempio si potrebbe studiare l'estensione di *Gap* alle metaqualità. In questo caso dobbiamo dare un assioma più prudente di quelli del § 5, in quanto non vogliamo che il predicato associato a ogni metaqualità stia sempre in *Apred* 1, il che renderebbe contraddittoria la teoria. Quindi un assioma sulle metaqualità potrebbe essere il seguente:

Se μ è una metaqualità, allora:

1) *Gap μ è un'operazione semplice*;

2) *per ogni $x \in V$ si ha* $(Gap\,\mu)x \in Mqprop$;

3) $(Gap\,\mu)x$ *è una proposizione vera se e solo se* x gode della metaqualità μ.

L'assioma precedente suggerisce la notazione mnemonica

$$«\mu x»$$

in luogo di $(Gap\,\mu)x$.

Una problematica legata alla precedente è l'introduzione di collezioni di proposizioni intermedie tra *Apred* 0 e *Mqprop* e collezioni di predicati più grandi di *Apred b*, nelle quali possano trovar posto predicati di verità (o falsità) di portata sempre più generale. Per esempio si potrebbe pensare a una gerarchia di collezioni di proposizioni «di serie B» *Bprop E*, con un indice E che varia tra gli insiemi, e ad un'analoga gerarchia di collezioni predicati b-ari «di serie B» $(Bpred\,E)b$, per ogni $b \in \mathbf{N}$. Precisamente si potrebbero introdurre quattro operazioni semplici *Bpred*, *Bprop*, *Bver*, *Bfals* e postulare che:

Se $E, L \in Ins$, $E \subseteq L$, $E \neq L$, *e se* $b \in N$, *allora*:

1) $(Bpred\,E)b \in Coll$, *se* $z \in (Bpred\,E)(b+1)$, *allora* $Qpred\,z$, $Qopr\,z$ *e* $zx \in (Bpred\,E)b$ *per ogni* $x \in V$;

2) $Bprop\,E \in Coll$, $(Bpred\,E)\,0 \subseteq Bprop\,E \subseteq (Bpred\,L)\,0 \subseteq Mgprop$;

3) $Apred\,b \subseteq (Bpred\,E)\,b \subseteq (Bpred\,L)\,b$;

4) $Bver\,E$, $Bfals\,E \in (Bpred\,L)\,1$;

5) *Se* $\alpha \in Bprop\,E$, *allora* $(Bver\,E)\,\alpha \Leftrightarrow \alpha$, $(Bfals\,E)\,\alpha \Leftrightarrow \neg\alpha$;

6) *Se* $p \in (Bpred\,E)(b+1)$, *allora* $(Bver\,E)\,p \Leftrightarrow$ «*Mver p*», $(Bfals\,E)\,p \Leftrightarrow$ «*Mfals p*».

Inoltre ammettiamo che rispetto alle operazioni logiche dei §§ 6, 7, le collezioni $Bprop\,E$ e $(Bpred\,E)\,b$ si comportino come $Mgprop$ e $Apred\,b$.

BIBLIOGRAFIA

[1] H. P. Barendregt, *The Lambda-Calculus*, Amsterdam (1981).

[2] Y. Bar Hillel - A. A. Fraenkel - A. Levy, *Foundations of Set Theory*, Amsterdam (1973).

[3] A. Church, *Set theory with a universal set*, in *Proceedings of the Tarski Symposium* (L. Henkin et al., eds.), Proc. of Symp. P. Math. XXV, Rhode Island (1974), 297-308.

[4] M. Clavelli, *Variabili e teoria A*, Rend. Sem. Fac. Sci. Univ. Cagliari (2), 59 (1985), 125-130.

[5] M. Clavelli - E. De Giorgi - M. Forti - V. M. Tortorelli, *A selfreqnence oriented theory for the Foundations of Mathematics*, in *Analyse Mathématiques et application - Contributions en l'honneur de Jacques-Louis Lions*, Parigi (1988), 67-115.

[6] E. De Giorgi, Contributo alla sessione *Fundamental Principles of Mathematics*, Plenary Session of the Pontifical Academy of Sciences (25-29 October 1994), 1994.

[7] E. De Giorgi, *Riflessioni sui Fondamenti della Matematica*, Conferenza per il centenario della società «Mathesis», Roma, 23 ottobre 1995, dattiloscritto.

[8] E. De Giorgi - M. Forti, *Una teoria quadro per i fondamenti della Matematica*, Atti Acc. Naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. (8), 79 (1985), 55-67.

[9] E. De Giorgi - M. Forti, «5×7»: *A basic theory for the foundations of mathematics*, Preprint di Matematica n. 74, Scuola Normale Superiore, Pisa (1990).

[10] E. De Giorgi - M. Forti - G. Lenzi, *Introduzione delle variabili nel quadro delle teorie base dei Fondamenti della Matematica*, Rend. Mat. Acc. Lincei, s. 9, v. 5 (1994), 117-128.

[11] E. De Giorgi - M. Forti - G. Lenzi, *Una proposta di teorie base dei Fondamenti della Matematica*, Rend. Mat. Acc. Lincei, s. 9, v. 5 (1994), 11-22.

[12] E. De Giorgi - M. Forti - G. Lenzi - V. M. Tortorelli, *Calcolo dei predicati e concetti metateorici in una teoria base dei Fondamenti della Matematica*, Rend. Mat. Acc. Lincei, s. 9, v. 6 (1995), 79-92.

[13] E. De Giorgi - M. Forti - V. M. Tortorelli, *Sul problema dell'autoriferimento*, Atti Acc. Naz. Lincei, Rend. Cl. Fis. Mat. Nat. (8), 80 (1986).

[14] S. Feferman, *Constructive theories of functions and classes*, in *Logic Colloquium 1978* (M. Boffa et al., eds.), Amsterdam (1979).

[15] M. Forti - F. Honsell, *Models of self-descriptive set theories*, in *Partial Differential Equations and the Calculus of Variations - Essays in Honor of Ennio De Giorgi* (F. Colombini et al., eds.), Boston (1989), 473-518.

[16] M. Forti - F. Honsell, *Sets and classes within the basic theories for the Foundations of Mathematics*, in *Proceedings of the International Conference on Logic and Algebra in Memory of Roberto Magari* (F. Montagna and A. Ursini, eds.) (1995), in corso di pubblicazione.

[17] M. Forti - F. Honsell - M. Lenisa, *A axiomatization of partial n-place operations*, Quaderni dell'Istituto di Matematiche Applicate «U. Dini», Facoltà di Ingegneria, Università di Pisa (1995).

[18] M. Grassi - G. Lenzi - V. M. Torricelli, *A formalization of a basic theory for the Foundations of Mathematics*, preprint del Dipartimento di Matematica dell'Università di Pisa, n. 1.98.804 (1994).

[19] G. Lenzi, *Estensioni contraddittorie della teoria Ampia*, Atti Acc. Naz. Lincei, Rend. Cl. Sc. Fis. Mat. Nat., 83 (1989), 15-28.

[20] G. Lenzi - V. M. Torricelli, *Introducing predicates into a basic theory for the Foundations of Mathematics*, Scuola Normale Superiore, preprint di Matematica n. 51 (1989).

[21] W. V. O. Quine, *New foundations for mathematical logic*, Amer. Math. Monthly, 44 (1973), 70-80.

[22] B. Russell - A. N. Whitehead, *Principia Mathematica*, Cambridge (1925).

[23] D. Scott, *Combinators and classes*, in *λ-Calculus and Computer Science Theory* (C. Böhm, ed.), Lec. Notes Comp., 37, Berlin (1975).

[24] J. von Neumann, *Eine Axiomatisierung der Mengenlehre*, J. f. Reine und Angew. Math., 154 (1925), 219-240.

Direttore responsabile: Prof. A. Ballio - Autorizz. Trib. di Roma n. 7269 dell'8-12-1959
«Monograf» - Via Collamarini, 5/L - Bologna