Rendiconti
Accademia Nazionale delle Scienze detta dei XL.
Memorie di Matematica
112° (1994), Vol. XVIII, fasc. 1, pagg. 133-141

MAURO FABRIZIO (*)

Sul principio dell'azione ereditaria (**) (***)

RIASSUNTO. — Si perviene ad una caratterizzazione di materiale viscoelastico senza introdurre a priori una topologia. Quindi si osserva come sia possibile definire sullo spazio della storie diverse topologie che derivano da distinte energie libere. Infine si affronta il problema della non-unicità per il sistema quasi-statico della viscoelasticità.

On the Principle of Fading Memory

ABSTRACT. — The feature of a viscoelastic material is studied without the use of a-priori topology on the history space. Then we observe the possibility to define on the history space some topologies, which follow from different free energies. Finally the problem of non-uniqueness for the quasi-static system of the viscoelasticity is studied.

1. - INTRODUZIONE

Le più recenti teorie sui materiali con memoria evanescente o con «fading memory» ([1], [2]) si fondano sulla caratterizzazione, data a priori, di uno spazio normato $\mathcal{H}$ delle storie che gode della proprietà di rilassamento (1), quindi l'ipotesi di memoria evanescente viene imposta pretendendo che il funzionale costitutivo dello stress $\bar{T}$ sia continuo su $\mathcal{H}$. Infatti in base a tale continuità si prova che la proprietà di rilassamento si trasmette al funzionale $\bar{T}$ e quindi si manifesta l'effetto di memoria evanescente.

(*) Indirizzo dell'Autore: Dipartimento di Matematica, Università degli Studi di Bologna, Piazza di Porta S. Donato, 5 - 40127 Bologna.

(**) Memoria presentata il 27 settembre 1994 da Gaetano Fichera, uno dei XL.

(***) Lavoro svolto nell'ambito della attività di ricerca del GNFM del CNR e dei progeti 40% e 60% del MURST.

(1) Per proprietà di rilassamento intendiamo la condizione che il congelamento di una storia sul valore finale tende per $t \to \infty$, secondo la topologia di $\mathcal{H}$, alla corrispondente storia costante.

Una tale impostazione ha consentito notevoli sviluppi matematici che hanno permesso di costruire una teoria in grado di fornire risultati importanti ([2], [3]).

È comunque vero che questa teoria è stata oggetto di riflessioni critiche. La prima si riferisce alla struttura dello spazio $\mathcal{H}$ che, nella sua definizione, contiene una funzione $b:[0,\infty)\to\mathbb{R}^+$, chiamata funzione di influenza che come osservato in [4] non risulta «experimentally determinable». Una seconda e più radicale critica è stata sollevata dal professor G. Fichera in [5], [6] (vedi anche [7], [8]), in cui si osserva come i risultati relativi ai materiali con memoria evanescente siano sensibili «rispetto allo spazio funzionale scelto e alla topologia in esso introdotta». A conferma di ciò è stato osservato in [9], che non esiste un'unica norma naturale, cioè deducibile dall'energia del sistema, poiché per i materiali con memoria evanescente esistono diverse energie tutte in grado di introdurre una topologia sullo spazio delle storie rispetto alla quale il funzionale costitutivo $\bar{T}$ è continuo. Queste topologie non sono fra loro equivalenti e nessuna è da privilegiare rispetto alle altre. Per cui l'utilizzo di una di esse per definire il materiale fà si che tale definizione «dipenda pesantemente dalla scelta dello spazio funzionale» (vedi [8]). Invece l'utilizzazione della topologia deve dipendere dalla «scelta del ricercatore [che] non può essere dettata da esperienze fisiche», ma soltanto motivata dai risultati (ad esempio stabilità) che vuole conseguire. Inoltre è stato provato in [9] che una delle topologie naturali, quella connessa con l'energia (libera) massima e rispetto a cui $\bar{T}$ è continuo, non gode della proprietà di rilassamento, ciò fa sorgere nuove riflessioni sulla necessità di introdurre a priori lo spazio $\mathcal{H}$. Infatti in tale caso verrebbe esclusa la topologia che discende dall'energia libera massima.

Per tutte queste ragioni, in questo lavoro, proponiamo una definizione di materiale con memoria evanescente che si basa sulle semplici e qualitative considerazioni di Volterra [10], [11], [12] e in cui non si utilizza alcuna topologia sullo spazio delle storie. Una tale definizione si avvale di una diretta imposizione della proprietà di rilassamento sul funzionale costitutivo.

Una seconda questione sollevata in [6], [13], si riferisce alla mancanza di unicità del problema quasi-statico della viscoelasticità lineare, allorquando l'intervallo temporale inizia da $t_0=-\infty$. Trattandosi di un semplice problema lineare, non è possibile sostenere che la teoria possa prevedere naturalmente la non unicità. Inoltre sulla base di una concreta motivazione matematica, emerge chiaramente la necessità di assegnare le condizioni iniziali, quindi il problema viene ricondotto all'intervallo temporale $t>t_0>-\infty$, in cui ammette unicità.

2. - Principio di memoria evanescente

Indichiamo con $\mathcal{B}$ un corpo continuo e con $F(x,t)$ il *gradiente di deformazione* relativo al punto $x\in\mathcal{B}$ e all'istante $t\in I$, definito mediante il vettore spostamento $u(x,t)$ come:

$$F(x,t)=\nabla_x u(x,t)\,, \tag{1}$$

inoltre sia T il *tensore degli sforzi* di Cauchy. La storia di F relativa al punto x e all'istante t è definita come la funzione $F^t(x,s) := F(x, t-s)$ dove $s \in [0, \infty)$. Come è noto un materiale elastico è descritto mediante una funzione del tipo:

$$T(x,t) = \bar{T}(F(x,t)) . \tag{2}$$

Nella teoria dei materiali elastici con memoria la relazione (2) viene sostituita dal funzionale (vedi [10], [12], [1], [2]):

$$T(x,t) = \bar{T}(F^t(x,s)) . \tag{3}$$

Inoltre poiché il valore attuale $F^t(0) = F(t)$, rispetto alla storia passata, fornisce un contributo importante sul funzionale costitutivo $\bar{T}$, l'equazione (3) viene scritta anche nella forma:

$$T(x,t) = \bar{T}(F(x,t), F^t(x,s)) . \tag{3'}$$

In viscoelasticità si presenta oltre al fenomeno dell'ereditarietà, cioè il tensore degli sforzi T all'istante t dipende anche dai valori precedenti tale istante del gradiente di deformazione F, anche l'effetto chiamato da Volterra di *dissipazione dell'azione ereditaria*, oggi più noto come «fading memory» (vedi [1]), per cui come espresso in [12] «*the modulus of the variation of the quantity* $z = F\left[\underset{-\infty}{\overset{t}{f}}(\tau)\right]$ *when* $f(\tau)$ *varies in any way (its modulus being always* $< M$*) in the interval* $(-\infty, t_1)$ (with $t_1 < t$), *can be made as small as we please by taking the interval* (t_1, t) *sufficiently large*».

Per formulare in termini matematici questa proprietà indichiamo con $\mathcal{D}$ l'insieme delle storie che costituiscono il dominio di definizione del funzionale (3). In questa fase supporremo $\mathcal{D}$ non dotato di alcuna struttura topologica, nonostante ciò, le proprietà di un materiale elastico con memoria evanescente vengono espresse attraverso le seguenti tre condizioni:

i) $\mathcal{D} = Lin \times \mathcal{D}_+$, dove $\mathcal{D}_+$ contiene l'insieme delle funzioni $L^\infty(0, \infty)$;

ii) se $F^t \in \mathcal{D}$, allora la sua *continuazione statica* F^t_s appartiene all'insieme $\mathcal{D}$, dove

$$F^t_s(s) = \begin{cases} F(t), & s \in [0, a), \\ F^t(s-a), & s \in [a, \infty), \end{cases} \tag{4}$$

inoltre:

$$\lim_{s \to \infty} \bar{T}(F^t_s) = \bar{T}(F_s(t)) , \tag{5}$$

essendo $F_s(t)$ la storia costante tale che $F^t(s) = F(t)$, $\forall s \in [0, \infty)$.

iii) al funzionale $\bar{T}(F_s(t))$ corrisponde una funzione $\bar{T}$: $\mathrm{Sim}(V) \to \mathrm{Sim}(V)$ in grado di descrivere il comportamento di un corpo elastico e tale per cui: $\bar{T}(F_s(t)) = \bar{T}(E(t))$.

Queste tre condizioni consentono di caratterizzare le proprietà di un materiale con memoria evanescente, almeno nel caso di una particolare relazione lineare [2] del tipo:

$$T(x,t) = G_0(x)E(x,t) + \int_0^\infty \hat{G}(x,s)E^t(x,s)\,ds\,, \tag{6}$$

dove E rappresenta il tensore di deformazione infinitesima, il quale nell'approssimazione lineare sostituisce F, mentre G_0 e $\hat{G}$ sono due tensori del quarto ordine che supporremo simmetrici e che dipendono dal materiale. L'insieme $\mathcal{Q}$ è individuato dalle storie E^t per cui il prodotto $\hat{G}E^t$ è una funzione integrabile.

Come è facile provare, la condizione i. impone alla relazione (6) che $\hat{G}$ appartenga $L^1(0,\infty)$, affinchè l'integrale in (6) abbia senso per tutti $E^t \in L^\infty(0,\infty)$. Nel caso di una equazione costitutiva lineare del tipo (6), la condizione i) contiene la ii). Infatti se $\hat{G} \in L^1(0,\infty)$, allora esiste finito il limite:

$$\lim_{s\to\infty} \bar{T}(E^t_s) = \left(G_0 + \int_0^\infty \hat{G}(s)\,ds\right)E(t)\,. \tag{7}$$

Inoltre supporremo il tensore:

$$G_\infty(x) := G_0(x) + \int_0^\infty \hat{G}(x,s)\,ds\,, \tag{8}$$

definito positivo, pertanto la funzione:

$$\bar{T}(E_\tau(x,t)) = G_\infty(x)E(x,t)\,,$$

individua un materiale elastico lineare, da cui risulta vericata la condizione iii).

Come osservato nell'introduzione proveremo, limitatamente al caso lineare, che è possibile introdurre diverse topologie sullo spazio delle storie, che derivano direttamente dalle energie libere del problema.

Definizione: Una funzione $\Psi: \to \mathbb{R}^+$ è chiamata una *energia libera*, per un materiale viscoelastico rappresentato da (6), se :

a) su ogni processo differenziabile è verificata la disuguaglianza:

$$\dot{\Psi}(E^{t+\tau}) \leqslant \bar{T}(E^{t+\tau})\cdot\dot{E}(t+\tau)\,, \qquad t \geqslant 0\,; \tag{9}$$

[2] Il prof. G. Fichera, in una lettera a me inviata nel Gennaio del '94, mi fece notare come la relazione (6) sia solo una fra le tante espressioni lineari del funzionale (3°).

b) l'energia libera è un potenziale termodinamico, nel senso che:

$$\tilde{T}(E^t) = \partial_{E(t)} \Psi(E^t); \tag{10}$$

c) per tutte le storie tali che $\lim_{t \to 0^+} E^t(s) = E(t)$ risulta

$$\Psi(E^t) \geq \Psi(E_{c(t)}) \tag{11}$$

dove $E_{c(t)}$ è la storia costante per cui $E^t(s) = E(t)$, $\forall s \in (0, \infty)$.

Come primo esempio consideriamo l'energia libera di Volterra-Graffi [13], definita:

$$\Psi(E^t) = \frac{1}{2} G_\infty E(t) \cdot E(t) - \frac{1}{2} \int_0^\infty \hat{G}(s)(E^t(s) - E(t)) \cdot (E^t(s) - E(t))\, ds\,, \tag{12}$$

dove $\hat{G}(s) < 0$ e $\hat{G}'(s) \geq 0$. Sotto queste ipotesi è facile provare che il funzionale (12) verifica le condizioni *a*), *b*), *c*). Inoltre è possibile introdurre una norma $\|\cdot\|$ sullo spazio $\mathcal{D}$ ponendo:

$$\|E^t\| = \frac{1}{2} \left\{ G_\infty E(t) \cdot E(t) - \int_0^\infty \hat{G}(s)(E^t(s) - E(t)) \cdot (E^t(s) - E(t))\, ds \right\}. \tag{13}$$

Proviamo ora che T è continuo rispetto a questa norma, infatti la relazione (6) può anche essere scritta:

$$T(x,t) = G_\infty(x)\, E(x,t) + \int_0^\infty \hat{G}(x,s)[E^t(x,s) - E(x,t)]\, ds\,, \tag{14}$$

da cui mediante la disuguaglianza di Schwarz si ha:

$$|T| \leq |G_\infty|^{1/2} (G_\infty E(t) \cdot E(t))^{1/2} + \left(\int_0^\infty |\hat{G}(s)|\, ds \right)^{1/2} \left(- \int_0^\infty \hat{G}(s)(E^t(s) - E(t)) \cdot (E^t(s) - E(t))\, ds \right)^{1/2}$$

che assicura la continuità di T rispetto alla norma (13).

Un'altra energia libera per il nostro problema è data dall'espressione:

$$\Psi_M(E^t) = \frac{1}{2} G_\infty E(t) \cdot E(t) - \tag{15}$$

$$- \frac{1}{\pi} \int_0^\infty [\omega \hat{G}_s(\omega)(\hat{E}_s^t(\omega) - E(t)/\omega) \cdot (\hat{E}_s^t(\omega) - E(t)/\omega) + \omega \hat{G}_s(\omega)\, \hat{E}_s^t(\omega) \cdot (\hat{E}_s^t(\omega))]\, d\omega$$

dove $\hat{G}_s$, $\hat{E}_s^t$ sono le trasformate di Fourier L^2-seno di $\hat{G}$, ed E, mentre $\hat{E}_c^t$ è la trasformata di Fourier L^2-coseno di E. Inoltre è noto che come conseguenza dei principi della

termodinamica abbiamo (vedi [9]): $\hat{G}_s(\omega) < 0$, per tutti $\omega > 0$; e che la relazione costitutiva (14) si rappresenta, usando le trasformate $\hat{G}_s$, $\hat{E}_s^t$, $\bar{E}_s^t$ e il teorema di Parseval-Plancherel, nella equivalente forma:

$$T(x,t) = G_\infty(x)E(x,t) + \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \hat{G}_s(x,\omega)\left[\bar{E}_s^t(x,\omega) - \frac{E(x,t)}{\omega}\right]d\omega\,. \tag{16}$$

Una importante caratteristica dell'energia libera rappresentata in (15), si presenta quando si osserva che in questo caso la disuguaglianza (9) si trasforma in una uguaglianza. Infatti risulta:

$$\dot{\mathscr{F}}_M(E^{t+\tau}) = \bar{T}(E^{t+\tau})\cdot\dot{E}(t+\tau)\,, \qquad \tau \geq 0\,. \tag{17}$$

Questa proprietà consente di attribuire la qualifica di massima energia libera al funzionale $\mathscr{F}_M$ [3]. È immediato dedurre dall'espressione (15) la seguente norma sullo spazio delle storie:

$$\|E^t\|_M = \frac{1}{2}G_\infty E(t)\cdot E(t) - \tag{18}$$

$$-\frac{1}{\pi}\int_0^\infty [\omega\hat{G}_s(\omega)(\bar{E}_s^t(\omega) - E(t)/\omega)\cdot(\bar{E}_s^t(\omega) - E(t)/\omega) + \omega\hat{G}_s(\omega)\bar{E}_s^t(\omega)\cdot(\bar{E}_s^t(\omega))]\,d\omega\,.$$

Inoltre l'energia libera massima (15) risulta molto significativa per la proprietà (17), per cui è importante studiare la natura della corrispondente norma (18). A tal fine ricordo che in [9] si è messo in evidenza come questa norma non goda della proprietà di rilassamento, infatti consideriamo la famiglia di storie definite:

$${}_aE^t = \begin{cases} 0\,, & s \in [0,a)\,, \\ E\,, & s \in [a,\infty)\,. \end{cases}$$

Secondo le usali norme della teoria dei materiali con fading memory risulta: $\lim_{a\to\infty} F_a^t = 0$. In questo caso invece abbiamo:

$${}_a\bar{E}_s^t(\omega) = E\,\frac{\cos\omega a}{\omega}\,, \qquad {}_a\hat{E}_s^t(\omega) = -E\,\frac{\sin\omega a}{\omega}$$

per cui da (18) si ha:

$$\lim_{a\to\infty}\|{}_aE^t\|_M = \frac{1}{2}(G_0 - G_\infty)E\cdot E\,.$$

Come si vede la norma (18) non gode della proprietà di rilassamento, quindi non può appartenere alla famiglia di norme studiate in [4].

[3] Rimandiamo al lavoro [9] per la dimostrazione dettagliata di come $\mathscr{F}_M$ verifichi l'uguaglianza (17) e le proprietà *b*) *c*).

3. - Unicità del problema quasi-statico

Nella nota [13], [6] il prof. G. Fichera ha fornito un contro-esempio all'unicità del problema quasi-statico della viscoelasticità quando l'intervallo temporale è $(-\infty, T)$, dove $T \leqslant \infty$. Tale contro-esempio si riferisce ad un nucleo di memoria $G(s) = 1/2(1 + \exp(-s))$, che evidentemente soddisfa tutte le eventuali restrizioni di tipo fisico che si possono imporre a priori. Ciò nonostante il problema quasi statico relativo al dominio $Q = \Omega \times (-\infty, T)$:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-s} \frac{\partial^2 u(x,t-s)}{\partial x^2}\, ds = f(x,t), \qquad (x,t) \in Q, \tag{19}$$

$$u(x,t)|_{\partial\Omega} = 0, \qquad (x,t) \in \partial\Omega \times (-\infty\, T), \tag{20}$$

non ammette una unica soluzione. Infatti per $f \equiv 0$, abbiamo come soluzioni: $u \equiv 0$ e $u(x,t) = u_0(x)e^{-t/2}$, dove $u_0(x)$ può essere una generica funzione di $C^2(\Omega)$ nulla su $\partial\Omega$.

Se poniamo in (19): $g(x,t) = \partial^2 u(x,t)/\partial x^2$, e quindi deriviamo rispetto al tempo otteniamo:

$$\dot{g}(x,t) - \frac{1}{2}g(x,t) + \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-s} g(x,t-s)\, ds = \dot{f}(x,t) \tag{21}$$

da cui

$$\dot{g}(x,t) + \frac{1}{2}g(x,t) = \dot{f}(x,t) + f(x,t). \tag{22}$$

L'espressioni (19) e (22) sono equivalenti, poichè è possibile partendo dall'equazione (22) riottenere (19). Infatti da (22) si ha:

$$\int_0^\infty \left[\dot{g}(x,t-s) + \frac{1}{2}g(x,t-s)\right] e^{-s}\, ds = \int_0^\infty [\dot{f}(x,t-s) + f(x,t-s)]e^{-s}\, ds \tag{23}$$

da cui integrando per parti abbiamo (19).

L'equivalenza fra (19) e (22) appare anche osservando che da (22), quando $f = 0$, oltre alla soluzione $g \equiv 0$, si ha:

$$g(x,t) = A(x)e^{-t/2}$$

dove A è legato a u_0 da: $\partial^2 u_0/\partial x^2 = A$, cioè ritroviamo il medesimo insieme di soluzioni.

È impensabile ritenere che il problema quasi-statico della viscoelasticità possa naturalmente presentare soluzioni non uniche. Essendo un semplice problema lineare, in cui non sono presenti effetti di isteresi, è invece ragionevole pretendere, come richiesto in [5], [6], l'unicità di un tale problema. Ciò è possibile solo fornendo le condizioni ini-

ziali. Tale esigenza risulta chiara allorquando si osserva l'equivalenza fra l'equazione (19) e la sua rappresentazione differenziale (22), per il cui studio è essenziale assegnare i dati iniziali, che nel caso specifico in cui il nucleo è dato da $\hat{G} = -(1/2)e^{-t}$, si limitano a fornire il valore iniziale $u_0(x)$. Quando invece il nucleo $\hat{G}$ è una generica funzione di $L^1(0, \infty)$, allora non essendo possibile ricondurre (19) a (22), occorre assegnare la storia di u fino all'istante iniziale t_0. Questo comporta che nella dimostrazione dell'unicità si deve prendere $u \equiv 0$ fino a t_0. «Occorre quindi, come faceva Volterra, studiare i problemi ereditari in intervalli di tempo finiti» (vedi [5]).

È comunque possibile studiare il problema (19), (20) anche nell'intervallo temporale $(-\infty, T)$ come fatto in [14], ma anche in questo caso per l'unicità occorre assegnare una sorta di condizione iniziale imponendo che la classe delle soluzioni appartenga allo spazio $L^2(-\infty, T)$.

Questa conclusione ci fa riflettere ancora sulla definizione di materiale con memoria evanescente. Sembra infatti naturale che un tale materiale sia caratterizzato da un'unica storia iniziale o stato base. In altre parole due storie iniziali completamente «distinte» non possono appartenere allo stesso materiale, in quanto non è possibile passare da una all'altra mediante un processo finito. Poichè per tale passaggio occorrebbe ripercorrere tutta la storia, quindi impiegare un tempo infinito. Per cui due storie iniziali distinte generano due differenti materiali, questo in accordo con quanto osservato in [15] (*). Pertanto sarà necessario per la definizione di corpo viscoelastico precisare oltre alla equazione costitutiva anche lo spazio delle storie. Tale spazio $\mathcal{D}$ dovrà essere costituito da storie E^t, che possiamo scrivere $E^{t_0+\tau}$, tali che:

$$E^{t_0+\tau}(\tau + s) = E^{t_0}(s), \qquad \forall s > 0 \tag{24}$$

dove E^{t_0} è una storia assegnata caratteristica del materiale.

L'equazione costitutiva (6) sarà così comune ad un insieme di materiali la cui caratterizzazione specifica avviene allorquando si assegni lo spazio $\mathcal{D}$ con la proprietà (24), cioè si assegni la storia iniziale.

(*) Dove si afferma: «Thus two states belong to different materials, if they are represented by two hystories that cannot be connected through a process with finite work». Vedi anche Axiom I.

BIBLIOGRAFIA

[1] B. D. Coleman - W. Noll, *Foundations of linear viscoelasticity*, Rev. Mod. Phys., 33, (1961), 239-249.

[2] C. Truesdell - W. Noll, *The Non-Linear Fields Theory of Mechanics*, Handbuch der Physic, III/3, Berlin-New York (1965).

[3] B. D. Coleman, *Thermodynamics of materials with memory*, Arch. Rational Mech. Anal., 17 (1964), 1-46.

[4] B. D. Coleman - V. J. Mizel, *On the general theory of fading memory*, Arch. Rational Mech. Anal., 29 (1968), 18-31.

[5] G. Fichera, *Sui materiali elastici con memoria*, Atti Acc. Lincei Rend. fis., s. 8, 82 (1988), 473-478.
[6] G. Fichera, *I difficili rapporti fra l'analisi funzionale e la fisica matematica*, Rend. Mat. Acc. Lincei, s.9, 1 (1990), 161-170.
[7] G. Fichera, *Avere una memoria tenace crea gravi problemi*, Arch. Rational Mech. Anal., 70 (1972), 101-112.
[8] G. Fichera, *Sul principio di memoria evanescente*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, 68 (1982) 245-259.
[9] M. Fabrizio - A. Morro - C. Giorgi, *Normed spaces and free energies for linear viscoelasticity*, Arch. Rational Mech. Anal., 125 (1994), 341-373.
[10] V. Volterra, *Leçons sur les fonctions de lignes*, Gauthier-Villars, Paris (1913).
[11] V. Volterra, *Sur les équations intégro-différentielles et leurs applications*, Acta Math., 35 (1912), 569-577.
[12] V. Volterra, *Theory of Functionals and of Integral and Integro-Differential Equations*, Blackie & Son Limited, London and Glasgow (1930).
[13] D. Graffi, *Sull'espressione dell'energia libera nei materiali viscoelastici lineari*, Ann. Mat. Pura Appl., 98 (1974), 273-279.
[14] G. Fichera, *On linear viscoelasticity*, Mech. Res. Comm., 12 (1985), 241-242.
[15] M. Fabrizio, *An existence and uniqueness theorem in quasi-static viscoelasticity*, Quart. Appl. Math., 47 (1989), 1-8.
[16] M. Fabrizio - B. Lazzari, *On the notion of state for a material system*, Meccanica, 14 (1981), 175-180.