Rendiconti
Accademia Nazionale delle Scienze detta dei XL
Memorie di Matematica
112° (1994), Vol. XVIII, fasc. 1, pagg. 1-25

RITA CASOLA (*)

Maggiorazione integrale esplicita relativa ad un operatore lineare ellittico di ordine $2m$ (**)

RIASSUNTO. — Viene dimostrata la maggiorazione (1.3) per ogni soluzione del problema al contorno (1.1). Inoltre, sotto opportune ipotesi per gli operatori al contorno B_j, viene esposto un metodo per il calcolo esplicito della costante C.

Explicit Integral Estimate Connected with a Linear Elliptic Operator of Order $2m$

SUMMARY. — The estimate (1.3) for a solution of the BVP (1.1) is proved and, under suitable hypotheses on the boundary operators B_j, a method for the explicit computation of C is given.

In questo lavoro estendo al più generale operatore ellittico Eu (cfr. Sez. 1.1) i risultati già da me ottenuti in [2] per l'operatore biarmonico. Precisamente, considerato il problema al contorno (1.1) (cfr. Sez. 1.1), dimostro, per ogni soluzione u di esso, la formula di maggiorazione (1.3).

L'aspetto più importante della mia ricerca è costituito dal fatto che, sotto opportune ipotesi per gli operatori al contorno $B_j u$, è possibile fornire un *calcolo esplicito* per la costante C, che interviene nella (1.3).

Le ipotesi da me assunte sugli operatori B_j sono tali da includere fra questi quelli corrispondenti al *problema di Dirichlet* per l'operatore E, consentendo, in tal modo, un'ampia estensione dei risultati di [2].

(*) Indirizzo dell'Autrice: via San Godenzo 52, 00189 Roma.
(**) Memoria presentata il 16 marzo 1994 da Gaetano Fichera, uno dei XL.

1. - Posizione del problema

Indichiamo con Ω un aperto limitato e semplicemente connesso del piano della variabile complessa $z = x + iy$ e con Σ la sua frontiera. Supponiamo che Σ sia una curva di classe C^{1+b} ossia che il vettore normale interna $n(z)$ verifichi una condizione uniforme di Hölder su Σ con esponente b; supponiamo inoltre $b > \frac{1}{2}$.

Nel seguito considereremo i seguenti spazi:

$C^k(\Sigma)$ $(C^k(\bar{\Omega}))$ costituito dalle funzioni continue verificanti su Σ (in $\bar{\Omega}$) una condizione di Hölder uniforme per qualche esponente k $(0 < k \leq 1)$;

$C^{m+k}(\bar{\Omega})$ costituito dalle funzioni dotate di derivate fino all'ordine m in $\bar{\Omega}$ e tali che $D^\alpha u \in C^k(\bar{\Omega})$ per $|\alpha| = m$;

$L^2(\Sigma)$ costituito dalle funzioni che su Σ hanno modulo di quadrato sommabile rispetto alla misura di Lebesgue ds; in $L^2(\Sigma)$ introduciamo il prodotto scalare $(\varphi, \psi) = \int_\Sigma \varphi(z)\psi(z)\,ds$ (la norma introdotta da tale prodotto scalare verrà indicata con $\|\cdot\|$);

$(L^2(\Sigma))^m$ costituito dai vettori $\varphi = (\varphi_0, \ldots, \varphi_{m-1})$, $\varphi_i \in L^2(\Sigma)$ in cui poniamo $(\varphi, \psi)_{(L^2(\Sigma))^m} = \sum_{i=0}^{m-1} (\varphi_i, \psi_i)$ (la norma associata sarà indicata con $\|\cdot\|_{(L^2(\Sigma))^m}$);

$H^m(\Omega)$ completamento di $C^m(\bar{\Omega})$ rispetto alla norma $\|u\|_{H^m(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \int_\Omega |D^\alpha u|^2\,dx\,dy\right)^{1/2}$;

$H' = (C^k(\Sigma))^m \times R^\sigma$ $\left(\sigma = \frac{m(m+1)}{2}\right)$ costituito dai vettori (φ, c) tali che $\varphi \in (C^k(\Sigma))^m$ e $c \in R^\sigma$;

$H = (L^2(\Sigma))^m \times R^\sigma$ costituito dai vettori (φ, c) tali che $\varphi \in (L^2(\Sigma))^m$ e $c \in R^\sigma$. In H verrà introdotto il seguente prodotto scalare $[(\varphi, c), (\psi, d)] = \sum_{i=0}^{m-1} (\varphi_i, \psi_i) + \sum_{i=0}^{\sigma-1} c_i d_i$; la norma associata a tale prodotto scalare verrà indicata con $|||\cdot|||$.

Denotiamo con E il seguente operatore ellittico in due variabili indipendenti, di ordine $2m$, a coefficienti reali costanti:

$$Eu = \sum_{k=0}^{2m} a_k \frac{\partial^{2m}}{\partial x^{2m-k}\partial y^k} u\,.$$

Indichiamo inoltre con B_j $(j = 0, \dots, m-1)$ gli operatori al bordo così definiti:

$$B_j u = \sum_{k=0}^{m} b_k^j(z) \frac{\partial^m}{\partial x^{m-k} \partial y^k} u + \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{l=0}^{m-1-i} b_{i,m-1-l}^j(z) \frac{\partial^{m-1-i}}{\partial x^{m-1-l-i} \partial y^l} u$$

essendo $b_k^j(z)$, $b_{i,m-1-l}^j(z)$ funzioni reali appartenenti allo spazio $C^\lambda(\Sigma)$.

Indichiamo con $L(w) = \sum_{k=0}^{2m} a_k w^{2m-k}$ il polinomio caratteristico dell'operatore E e con $L_j(w, z) = \sum_{k=0}^{m} b_k^j(z) w^{m-k}$ $(j = 0, \dots, m-1)$ i polinomi caratteristici delle condizioni al contorno. Supponiamo che gli operatori al bordo B_j verificano, rispetto all' operatore E, la condizione di Lopatinskii. Ciò avviene se, comunque si fissi $z \in \Sigma$, nessuna combinazione lineare a coefficienti complessi dei polinomi caratteristici delle condizioni al contorno $L_j(w, z)$, è divisibile per il polinomio di grado m avente per zeri tutti e soli gli zeri a parte immaginaria negativa di $L(w)$ e coefficiente direttivo unitario (cfr. [11]).

Consideriamo il seguente problema:

$$(1.1) \qquad \begin{cases} u \in C^{2m}(\Omega) \cap C^{m+\lambda}(\bar{\Omega}), & \\ Eu = 0 & \text{in } \Omega, \\ B_j u = g_j & \text{su } \Sigma, j = 0, \dots, m-1, \end{cases}$$

essendo g_j assegnate funzioni reali dello spazio $C^\lambda(\Sigma)$.

Osserviamo che, poiché E è ellittico, il suo polinomio caratteristico $L(w)$ non può avere zeri reali. Indichiamo con Γ una curva di Jordan semplice del piano della variabile complessa $w = u + iv$, tutta contenuta nel semipiano $\Im w < 0$, che contorni tutti gli zeri a parte immaginaria negativa di $L(w)$. Consideriamo la soluzione fondamentale

$$P(z, \zeta) = \frac{-1}{2\pi^2 (2m-2)!} \Re \int_{+\Gamma} \frac{[(x-\xi)w + (y-\eta)]^{2m-2} \log[(x-\xi)w + (y-\eta)]}{L(w)} dw$$

(cfr. [1], [6], [11]) avendo scelto per la funzione $\log[(x-\xi)w + (y-\eta)]$ la determinazione principale $(-\pi < \arg[(x-\xi)w + (y-\eta)] \leq \pi)$.

Nel terzo paragrafo verrà mostrato che, se le funzioni $g_j(z)$ verificano opportune condizioni di compatibilità, la soluzione del problema (1.1) esiste e può essere rappresentata al modo seguente:

$$(1.2) \qquad u(z) = \sum_{k=0}^{m-1} \int_{\Sigma} \varphi_k(\zeta) \frac{\partial^{m-1}}{\partial \xi^{m-1-k} \partial \eta^k} P(z, \zeta) ds_\zeta + \sum_{i,j=0, i+j \leq m-1}^{m-1} c_{ij} x^i y^j,$$

essendo le $\varphi_k(z)$ $(k = 0, \dots, m-1)$ funzioni reali di classe $C^\lambda(\Sigma)$ e le c_{ij} costanti reali.

Nel paragrafo quarto verrà considerata la seguente formula di maggiorazione:

$$\inf_{u_0 \in U_0} \|u + u_0\|_{H^m(\Omega)} \leq C \left(\sum_{j=0}^{m-1} \|B_j u\|^2 \right)^{1/2} \tag{1.3}$$

essendo u una soluzione del problema (1.1) e U_0 l'insieme delle autosoluzioni di tale problema. Per la (1.3), rappresentando la soluzione di (1.1) tramite la (1.2), si otterrà una stima della costante di maggiorazione C.

Nel paragrafo quinto, nel caso gli operatori al bordo siano del tipo seguente

$$B_j u = \frac{\partial}{\partial \sigma} \left(\sum_{k=0}^{m-1} b_k^j(z) \frac{\partial^{m-1}}{\partial x^{m-k-1} \partial y^k} u \right) + \tag{1.4}$$

$$+ \sum_{r=0}^{m-1} \sum_{i=0}^{m-1-r} b'_{i,m-1-r}(z) \frac{\partial^{m-1-r}}{\partial x^{m-1-r-i} \partial y^i} u$$

($b_k^j(z) \in C^{1+\lambda}(\Sigma)$, $b'_{i,m-1-r}(z) \in C^{\lambda}(\Sigma)$), verrà fornito, utilizzando i risultati del §2, un metodo per rendere esplicita la stima predetta; si otterrà, quindi, in questo modo il calcolo esplicito della costante di maggiorazione C.

2. - Richiami della teoria degli autovalori

Sia T un operatore compatto, positivo ed autoaggiunto (P.C.O.) di uno spazio di Hilbert $\mathcal{H}$ in sé (il prodotto scalare di $\mathcal{H}$ verrà indicato con $(\cdot,\cdot)$). Siano $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \geq \ldots \geq \mu_k \geq \ldots$ i suoi autovalori. Vogliamo costruire due successioni $\{\lambda_k^{(\nu)}\}$ e $\{\sigma_k^{(\nu)}\}$ che approssimino per difetto e per eccesso l'autovalore μ_k.

Consideriamo un sistema ortonormale e completo di vettori $\{w_k\}$ nello spazio $\mathcal{H}$; denotiamo con W_ν il sottospazio di $\mathcal{H}$ generato dai primi ν vettori e con P_ν la proiezione di $\mathcal{H}$ su W_ν. Si ha:

(I) *Gli autovalori dell'operatore $P_\nu T P_\nu$ sono le radici della seguente equazione:*

$$\det[(Tw_i, w_j) - \lambda(w_i, w_j)] = 0, \qquad i, j = 1, \ldots, \nu, \tag{2.1}$$

più l'autovalore $\lambda = 0$.

Indicate con $\lambda_1^{(\nu)} \geq \lambda_2^{(\nu)} \geq \ldots \geq \lambda_\nu^{(\nu)}$ tali radici, per ogni fissato k e per ogni $\nu \geq k$ si ha:

$$\lambda_k^{(\nu)} \leq \lambda_k^{(\nu+1)} \leq \mu_k \qquad \lim_{\nu \to \infty} \lambda_k^{(\nu)} = \mu_k .$$

È così risolto il problema dell'approssimazione per difetto di μ_k. Per costruire una successione approssimante μ_k per eccesso è necessario fare maggiori ipotesi sull'operatore T.

Diremo che il P.C.O. T appartiene alla classe $\mathcal{T}^n$ se $\sum_{k=1}^{\infty} \mu_k^n < +\infty$; poniamo in tal caso $\vartheta^n(T) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k^n$. $\vartheta^n(T)$ è un invariante ortogonale di T ed è una funzione continua di T rispetto alla convergenza uniforme.

(II) *Supponiamo* $T \in \mathcal{T}^n$. *Se* $\lambda_1^{(\nu)} \geq \lambda_2^{(\nu)} \geq \ldots \geq \lambda_\nu^{(\nu)}$ *sono le radici della* (2.1), *poniamo*

$$\sigma_k^{(\nu)} = [\vartheta^n(T) - \vartheta^n(P_\nu T P_\nu) + (\lambda_k^{(\nu)})^n]^{1/n} .$$

Si ha:

$$\sigma_k^{(\nu)} \geq \sigma_k^{(\nu+1)} \geq \mu_k \qquad \lim_{\nu \to \infty} \sigma_k^{(\nu)} = \mu_k .$$

Supponiamo ora che $\mathcal{H} = L^2(D, \mu)$ cioè lo spazio di Hilbert (reale) costituito dalle funzioni che in D hanno modulo di quadrato sommabile rispetto alla misura positiva μ. Ciò non è restrittivo poiché ogni spazio di Hilbert separabile è congruente ad uno spazio $L^2(D, \mu)$. Sussiste il seguente teorema che caratterizza i P.C.O. della classe $\mathcal{T}^n$:

(III) *Un operatore* T *nello spazio* $L^2(D, \mu)$ *appartiene alla classe* $\mathcal{T}^n$ *se e solo se ammette la rappresentazione integrale:*

$$T^n u = \int_D K(x, y) u(y) \, d\mu_y$$

essendo

$$K(x, y) = \int_D H(x, t) H(t, y) \, d\mu_t$$

ed $H(x, y)$ *un nucleo simmetrico appartenente allo spazio* $L^2(D \times D, \mu \times \mu)$.

Possiamo a questo punto dare all'invariante ϑ^n una espressione integrale:

$$\vartheta^n(T) = \int_D K(x, x) \, d\mu_x = \int_D \int_D |H(x, y)|^2 \, d\mu_x \, d\mu_y . \tag{2.2}$$

Per la dimostrazione dei Teoremi (I), (II), (III) cfr [8], [9].

Sia ora T un operatore compatto ed autoaggiunto di $\mathcal{H}$ in sé (non necessariamente positivo) e tale che il P.C.O. T^2 appartenga alla classe $\mathcal{T}^n$. Supponiamo di dover determinare

$$\lambda = \sup_{x \in \mathcal{H} - \{0\}} \frac{(Tx, x)}{\|x\|^2} .$$

Si considera la soluzione $\lambda_1^{(\nu)}$ di (2.1) e si pone (cfr. [4]):

$$\gamma_\nu = [\mathfrak{I}^n(T^2) - \mathfrak{I}^n((P_\nu T P_\nu)^2) + (\lambda_1^{(\nu)})^{2n}]^{1/2n}.$$

Risulta:

$$\lambda_1^{(\nu)} \leqslant \lambda_1^{(\nu+1)} \qquad \gamma_\nu \geqslant \gamma_{\nu+1} \qquad \lim_{\nu\to\infty} \lambda_1^{(\nu)} = \lim_{\nu\to\infty} \gamma_\nu = \lambda .$$

Supponiamo sempre che T sia un operatore compatto ed autoaggiunto. Se T ha almeno k autovalori negativi (contati con la loro molteplicità) poniamo μ_k uguale al k-esimo autovalore negativo, altrimenti poniamo $\mu_k = 0$. Anche ora il nostro scopo è di costruire due successioni approssimanti μ_k per eccesso e per difetto.

Fissati $t_1, \dots, t_{k-1} \in \mathcal{H}$, poniamo $U = \{u \in \mathcal{H} - \{0\} \ t.c. \ (u, t_i) = 0, \ i = 1, \dots, \dots, k-1\}$.

(IV) *Sia T un operatore compatto ed autoaggiunto. Indicate con $\mu_1^{(\nu)} \leqslant \mu_2^{(\nu)} \leqslant \dots \leqslant \leqslant \mu_\nu^{(\nu)}$ le radici di* (2.1) *si ha*

$$\mu_k^{(\nu)} = \max_{t_1, \dots, t_{k-1} \in \mathcal{H}} \alpha_\nu(t_1, \dots, t_{k-1})$$

essendo $\alpha_\nu(t_1, \dots, t_{k-1}) = \min_{W_\nu \cap U} \dfrac{(Tu, u)}{\|u\|^2}$.

Inoltre

$$\mu_k \leqslant \mu_k^{(\nu+1)} \leqslant \mu_k^{(\nu)}, \qquad \lim_{\nu\to\infty} \mu_k^{(\nu)} = \mu_k .$$

Vogliamo ora costruire una successione approssimante μ_k per difetto.

(V) *Sia T un operatore compatto ed autoaggiunto. Supponiamo $T^2 \in \mathcal{T}^n$. Poniamo*

$$\sigma_k^{(\nu)} = [\mathfrak{I}^n(T^2) - \mathfrak{I}^n((P_\nu T P_\nu)^2) + (\mu_k^{(\nu)})^{2n}]^{1/2n} ;$$

si ha

$$\sigma_k^{(\nu)} \geqslant \sigma_k^{(\nu+1)}, \qquad \lim_{\nu\to\infty} (-\sigma_k^{(\nu)}) = \mu_k .$$

Per la dimostrazione dei Teoremi (IV), (V) cfr [2].

3. - Teoremi di esistenza e di rappresentazione

Siano $\varphi_k(z)$ $(k = 0, \dots, m-1)$, m funzioni reali di classe $C^\lambda(\Sigma)$; consideriamo la funzione:

$$v_0(z) = \sum_{k=0}^{m-1} \int_\Sigma \varphi_k(\zeta) \frac{\partial^{m-1}}{\partial\xi^{m-1-k}\partial\eta^k} P(z, \zeta)\, ds_\zeta . \tag{3.1}$$

Posto $V(\Omega) = \{u \in C^{2m}(\Omega) \cap C^{m+\Lambda}(\bar{\Omega})$ *t.c.* $Eu = 0$ *in* $\Omega\}$, si ha $v_0(z) \in V(\Omega)$ (cfr. [6]).

(VI) *C.N.S. affinché* $u \in V(\Omega)$ *è che esista* $(\varphi, c) \in H'$ *tale che*

$$u(z) = v_0(z) + \sum_{i,j=0,\, i+j \leq m-1}^{m-1} c_{ij} x^i y^j . \tag{3.2}$$

La condizione è sufficiente per ciò che è stato prima osservato.

Sia $u(z) \in V(\Omega)$; consideriamo il problema:

$$\begin{cases} v \in V(\Omega), \\ \dfrac{\partial}{\partial r} \dfrac{\partial^{m-1}}{\partial x^{m-1-j} \partial y^j} v = b_j \quad \text{su } \Sigma, \quad j = 0, \dots, m-1, \end{cases} \tag{3.3}$$

essendo $b_j = (\partial/\partial r)(\partial^{m-1}/\partial x^{m-1-j} \partial y^j) u \in C^{\Lambda}(\Sigma)$. Dimostrare che esiste $(\varphi, c) \in H'$ tale che la $u(z) \in V(\Omega)$ ammette la rappresentazione (3.2) equivale a dimostrare che esiste $\varphi \in (C^{\Lambda}(\Sigma))^m$ tale che la funzione $v_0(z)$ sia soluzione di (3.3) poiché il problema omogeneo associato al problema (3.3) ha come autosoluzioni i polinomi di grado $m-1$ in due variabili reali. Abbiamo già osservato che la funzione $v_0(z) \in V(\Omega)$; rimane da verificare che il vettore $\varphi(z)$ può scegliersi in modo tale che siano verificate le condizioni al contorno. Imponendo tali condizioni si ottiene il seguente sistema di equazioni integrali singolari (cfr [6]):

$$\sum_{k=0}^{m-1} \left[\frac{\gamma_{jk}}{\pi i} \int_{+\Sigma} \frac{\varphi_k(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta + \int_{+\Sigma} D_{jk}(z, \zeta) \varphi_k(\zeta) d\zeta \right] = \tag{3.4}$$

$$= b_j(z)(-1)^m 2\pi, \qquad z \in \Sigma, \qquad j = 0, \dots, m-1,$$

essendo $\gamma_{jk} = i \int_{+\Gamma} (w^{2m-2-(j+k)}/L(w)) dw$ e $D_{jk}(z, \zeta) = O(|z - \zeta|^{\lambda - 1})$. Tale sistema è regolare ed ha indice nullo (cfr. [10], pag. 417, [6], pag. 69). Consideriamo il sistema omogeneo associato

$$\sum_{k=0}^{m-1} \left[\frac{\gamma_{jk}}{\pi i} \int_{+\Sigma} \frac{\varphi_k(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta + \int_{+\Sigma} D_{jk}(z, \zeta) \varphi_k(\zeta) d\zeta \right] = 0, \tag{3.5}$$

$$z \in \Sigma, \qquad j = 0, \dots, m-1.$$

Diremo che il vettore $\varphi(z)$ è un' autosoluzione di prima specie per il sistema (3.5) se $\varphi(z)$ non è il vettore nullo e se $v_0(z) = 0$, $\forall z \in R^2$. Ogni autosoluzione che non è di prima specie verrà detta di seconda specie. In [6] viene dimostrato che il sistema (3.5) ammette $(m(m-1))/2$ autosoluzioni di prima specie e inoltre che, indicata con d la dimensione dello spazio delle autosoluzioni, si ha $\sigma \leq d \leq m^2$.

Consideriamo il sistema omogeneo trasposto

$$(3.6)\qquad \sum_{k=0}^{m-1} \int_{\Sigma} \varphi_k(\zeta) \frac{\partial}{\partial s_\zeta} \frac{\partial^{2m-2}}{\partial x^{2m-2-k-j} \partial y^{k+j}} P(z, \zeta)\, ds_\zeta = 0\,, \qquad z \in \Sigma\,,$$

$$j = 0, \dots, m-1\,.$$

Diremo che il vettore $\varphi(z)$ è autosoluzione di prima specie per il sistema (3.6) se

$$(3.7)\qquad \sum_{k=0}^{m-1} \int_{\Sigma} \varphi_k(\zeta) \frac{\partial}{\partial s_\zeta} \frac{\partial^{m-1}}{\partial x^{m-1-k} \partial y^k} P(z, \zeta)\, ds_\zeta = 0\,, \qquad z \in \boldsymbol{R}^2\,.$$

Ogni autosoluzione di (3.6) che non è di prima specie verrà detta di seconda specie. Si verifica, mediante integrazione per parti, che i vettori $(1, 0, \dots, 0) \dots (0, 0, \dots, 1)$, $(x, y, 0, \dots, 0) \dots (0, 0, \dots, x, y)$, $\dots, \left(x^{m-1}, \binom{m-1}{1} x^{m-2} y, \dots, y^{m-1}\right)$ sono autosoluzioni di prima specie linearmente indipendenti. Verifichiamo che ogni altra autosoluzione di prima specie è loro combinazione lineare. Sia $q(z) \in C_0^\infty(\boldsymbol{R}^2)$; si ha

$$(3.8)\qquad q(z) = \frac{1}{8\pi} \int_{\boldsymbol{R}^2} Eq(\zeta) P(z, \zeta)\, d\xi\, d\eta\,.$$

Dalla (3.7) si deduce

$$(3.9)\qquad \sum_{k=0}^{m-1} \int_{\Sigma} \varphi_k(z) \frac{\partial}{\partial s} \frac{\partial^{m-1}}{\partial x^{m-1-k} \partial y^k} q(z)\, ds = 0 \qquad \forall q \in C_0^\infty(\boldsymbol{R}^2)\,.$$

Consideriamo la seguente matrice $m \times (m+1)$

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} \dot{x} & \dot{y} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \dot{x} & \dot{y} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \dot{x} & \dot{y} \end{pmatrix}$$

e il vettore

$$(3.10)\qquad \psi = \varphi \mathcal{P}\,.$$

Con tali posizioni la (3.9) diventa

$$(3.11)\qquad \sum_{k=0}^{m} \int_{\Sigma} \psi_k(z) \frac{\partial^m}{\partial x^{m-k} \partial y^k} q(z)\, ds = 0 \qquad \forall q \in C_0^\infty(\boldsymbol{R}^2)\,.$$

Ciò implica (cfr [3], § 2)

$$\varphi = \lambda \mathcal{M} \tag{3.12}$$

essendo $\lambda = (\lambda_0, \dots, \lambda_{\sigma-1})$, con λ_i arbitrarie costanti reali ed $\mathcal{M}$ la matrice così definita (cfr [3]):

$$\begin{bmatrix}
\dot{x} & \dot{y} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & \dot{x} & \dot{y} & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & \cdots & \cdots & 0 & \dot{x} & \dot{y} \\
\frac{d}{dt}(x^2) & 2\frac{d}{dt}(xy) & \frac{d}{dt}(y^2) & 0 & \cdots & 0 \\
0 & \frac{d}{dt}(x^2) & 2\frac{d}{dt}(xy) & \frac{d}{dt}(y^2) & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & \cdots & \cdots & \frac{d}{dt}(x^2) & 2\frac{d}{dt}(xy) & \frac{d}{dt}(y^2) \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\frac{d}{dt}(x^{m-1}) & \binom{m-1}{1}\frac{d}{dt}(x^{m-2}y) & \cdots & \binom{m-1}{m-2}\frac{d}{dt}(xy^{m-2}) & \frac{d}{dt}(y^{m-1}) & 0 \\
0 & \frac{d}{dt}(x^{m-1}) & \binom{m-1}{1}\frac{d}{dt}(x^{m-2}y) & \cdots & \binom{m-1}{m-2}\frac{d}{dt}(xy^{m-2}) & \frac{d}{dt}(y^{m-1}) \\
\frac{d}{dt}(x^m) & \binom{m}{1}\frac{d}{dt}(x^{m-1}y) & \cdots & \cdots & \binom{m}{m-1}\frac{d}{dt}(xy^{m-1}) & \frac{d}{dt}(y^m)
\end{bmatrix}.$$

Vogliamo verificare che esiste una matrice $\mathcal{P}'$ tale che $\mathcal{P}\mathcal{P}' = I$. Indichiamo con p_{ij} $(i = 1, \dots, m+1, j = 1, \dots, m)$ gli elementi della matrice $\mathcal{P}'$. Deve essere

$$p_{ik}\dot{x} + p_{i+1,k}\dot{y} = \delta_{ik} \qquad i, k = 1, \dots, m. \tag{3.13}$$

Per ogni fissato k e $i = 1, \dots, m$, si ottiene un sistema di m equazioni in $m+1$ incognite $(p_{1k}, \dots, p_{m+1,k})$. La matrice dei coefficienti ha rango uguale ad m poiché i vettori $(\dot{x}, \dot{y}, 0, \dots, 0) \dots (0, \dots, 0, \dot{x}, \dot{y})$ sono linearmente indipendenti (ciò segue dal fatto che $(\dot{x}, \dot{y}) \neq (0, 0)$). Il sistema (3.13) è quindi, per ogni fissato k, risolubile.

Dalla (3.10) e dalla (3.12) segue allora

$$\varphi = \lambda \mathcal{M}\mathcal{P}'. \tag{3.14}$$

Indicando con s_{ij} $(i = 1, \dots, \sigma, j = 1, \dots, m)$ gli elementi della matrice $\mathcal{M}\mathcal{P}'$ si ottiene facilmente che $s_{ij} = \delta_{ij}$, $i, j = 1, \dots, m$. Calcoliamo ora $s_{m+j,k}$, $(j = 1, \dots, m-1,$

$k = 1, \dots, m$):

$$s_{m+j,k} = \frac{d}{ds}(x^2)p_{jk} + 2\frac{d}{ds}(xy)p_{j+1,k} + \frac{d}{ds}(y^2)p_{j+2,k} =$$
$$= 2x(p_{jk}\dot{x} + p_{j+1,k}\dot{y}) + 2y(p_{j+1,k}\dot{x} + p_{j+2,k}\dot{y});$$

dalla (3.13) si deduce che

$$s_{m+j,k} = \begin{cases} 0 & k \neq j, j+1, \\ 2x & k = j, \\ 2y & k = j+1. \end{cases}$$

In modo analogo si possono calcolare gli altri coefficienti della matrice $\mathcal{M}\mathcal{S}'$ ottenendo che:

$$\mathcal{M}\mathcal{S}' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 2x & 2y & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 2x & 2y & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2x & 2y \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (m-1)x^{m-2} & 2\binom{m-1}{2}x^{m-3}y & \cdots & \cdots & (m-1)y^{m-2} & 0 \\ 0 & (m-1)x^{m-2} & \cdots & \cdots & 2\binom{m-1}{2}xy^{m-3} & (m-1)y^{m-2} \\ mx^{m-1} & 2\binom{m}{2}x^{m-2}y & \cdots & \cdots & 2\binom{m}{2}xy^{m-2} & my^{m-1} \end{bmatrix}$$

Dalla (3.14) si ottiene dunque che φ è combinazione lineare delle autosoluzioni già determinate.

Vogliamo ora dimostrare che il sistema (3.6) non ammette autosoluzioni di seconda specie. Sia ψ un'autosoluzione di seconda specie; consideriamo la funzione

$$w(z) = \sum_{k=0}^{m-1} \int_{\Sigma} \psi_k(\zeta) \frac{\partial}{\partial s_\zeta} \frac{\partial^{m-1}}{\partial x^{m-1-k}\partial y^k} P(z, \zeta)\, dS_\zeta.$$

Osserviamo che, poiché Σ è una curva di classe C^{1+k}, il vettore $\psi(z)$ appartiene allo

spazio $C^{b'}(\Sigma)$ con $b' > \frac{1}{2}$ (cfr. [10]). Ciò implica che $w(z) \in H^m(\Omega)$ (cfr. [5]). Tale funzione è quindi soluzione del problema $w \in H^m(\Omega)$, $Ew = 0$ in Ω, $\frac{\partial^{m-1} w}{\partial x^{m-1-i} \partial y^i} = 0$ su Σ, $(i = 0, \dots, m-1)$, e quindi si ha $w(z) = \sum_{k,h=0, k+h \leq m-2}^{m-2} d_{hk} x^h y^k$, $z \in \overline{\Omega}$, $d_{hk} \in R$. Posto $u(z) = w(z) - \sum_{k,h=0, k+h \leq m-2}^{m-2} d_{hk} x^h y^k$ risulta $u(z) = 0$, $z \in \overline{\Omega}$.

Sia D_R un disco di raggio R contenente Ω. La funzione $u(z)$ è soluzione del problema $u \in H^m(D_R - \Omega)$, $Eu = 0$ in $D_R - \Omega$, $D^\alpha u(z) = 0$ $|\alpha| \leq m-1$ in $\overline{\Omega}$. È possibile costruire una successione $u_n \in C_0^\infty(R^2 - \Omega)$ tale che $\lim_{n \to \infty} \|u_n - u\|_{H^m(D_R - \Omega)} = 0$. Ciò implica $\lim_{n \to \infty} \|D^\alpha u_n - D^\alpha u\|_{L^2(\partial D_R)} = 0$, $|\alpha| \leq m-1$.

L'operatore E può essere fattorizzato nel prodotto di $2m$ operatori del primo ordine; più precisamente si ha $E = E_1 \dots E_m \overline{E}_1 \dots \overline{E}_m$ essendo

$$E_i \overline{E}_i = a_0^{(i)} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + a_1^{(i)} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + a_2^{(i)} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \qquad (a_j^{(i)} \in R,\ 4a_0^{(i)} a_2^{(i)} - (a_1^{(i)})^2 > 0).$$

Ponendo $E^{(m)} = E_1 \dots E_m$, $\overline{E}^{(m)} = \overline{E}_1 \dots \overline{E}_m$, si ottiene

$$\int_{D_R - \Omega} |E^{(m)} u|^2 dx\, dy = \lim_{n \to \infty} \int_{D_R - \Omega} (E^{(m)} u)(\overline{E}^{(m)} u_n)\, dx\, dy = \int_{\partial D_R} \mathcal{B}(u, \overline{E}^{(m)} u)\, ds$$

essendo $\mathcal{B}(u, \overline{E}^{(m)} u)$ una forma bilineare, in ogni termine della quale compare un prodotto di una derivata di ordine $m-k$ di u per una derivata di ordine $k-1$ di $\overline{E}^{(m)} u$ $(k = 1, \dots, m)$. Facendo tendere R all'infinito e osservando che si ha

$$D^\alpha u = O(|z|^{m-2-|\alpha|} \log |z|), \qquad |\alpha| \leq m-2, \qquad |z| \to \infty$$

$$D^{m-1} u = 0(|z|^{-1}), \qquad D^\alpha u = O(|z|^{m-|\alpha|-2}), \qquad |\alpha| \geq m, \qquad |z| \to \infty$$

si ottiene $\lim_{R \to \infty} \int_{\partial D_R} \mathcal{B}(u, \overline{E}^{(m)} u)\, ds = 0$. Da ciò segue che $\int_{R^2 - \Omega} |E^{(m)} u|^2 dx\, dy = 0$ e quindi che

$$E^{(m)} u = 0, \qquad \text{in } R^2 - \Omega. \tag{3.15}$$

Sia $q \in C_0^\infty(R^2)$; poniamo

$$f_b(z) = \int_{R^2} q(\zeta) \frac{\partial^{m-1}}{\partial \xi^{m-1-b} \partial \eta^b} P(z, \zeta)\, d\xi\, d\eta \qquad (b = 0, \dots, m-1).$$

Dalla (3.15) segue

$$\int_{D_R - \Omega} u E f_b\, dx\, dy = \int_{\partial D_R} \mathcal{B}(u, \overline{E}^{(m)} f_b)\, ds.$$

In ogni termine della forma bilineare $\mathcal{B}(u, \overline{E}^{(m)} f_k)$ compare un prodotto di una derivata di ordine k di u per una derivata di ordine $m-1-k$ di $\overline{E}^{(m)} f_k$ $(k = 0, \dots, m-1)$. Osservando che

$$D^{m-1-k}\overline{E}^{(m)} f_k = O(|z|^{k-m} \log |z|), \qquad |z| \to \infty,$$

si ha $\lim_{R \to \infty} \int_{\partial D_R} \mathcal{B}(u, \overline{E}^{(m)} f_k)\, ds = 0$. In definitiva si ottiene:

$$0 = \int_{\mathbf{R}^2 - \bar{G}} uEf_k\, dx\, dy = \int_{\mathbf{R}^2} uEf_k\, dx\, dy =$$

$$= (-1)^{m-1} 8\pi \int_{\mathbf{R}^2} u \frac{\partial^{m-1}}{\partial x^{m-1-k} \partial y^k} q\, dx\, dy \qquad \forall q \in C_0^\infty(\mathbf{R}^2),$$

cioè

$$\frac{\partial^{m-1}}{\partial x^{m-1-k} \partial y^k} w(z) = \frac{\partial^{m-1}}{\partial x^{m-1-k} \partial y^k} u(z) = 0, \tag{3.16}$$

$$k = 0, \dots, m-1, \qquad z \in \mathbf{R}^2.$$

Rappresentando una funzione $f(z) \in C_0^\infty(\mathbf{R}^2)$ tramite la (3.8), dalle (3.16) si ottiene

$$\sum_{k=0}^{m-1} \int_\Sigma \psi_k(z) \frac{\partial}{\partial s} \frac{\partial^{2m-2}}{\partial x^{2m-2-k-h} \partial y^{k+h}} f(z)\, ds = 0 \qquad \forall f \in C_0^\infty(\mathbf{R}^2) \qquad h = 0, \dots, m-1.$$

Ponendo, per $h = 0$, $q(z) = \dfrac{\partial^{m-1}}{\partial x^{m-1}} f$ si deduce la (3.9); ciò implica che ψ è un'autosoluzione di prima specie e ciò è assurdo.

Poiché il sistema (3.4) è regolare avrà soluzione per ogni m-upla di termini noti $(b_0, \dots, b_{m-1})$ ortogonali alle autosoluzioni del sistema (3.6). Dalla definizione delle b_j si deduce che tali condizioni sono verificate. Esiste sempre, quindi, un vettore $\varphi \in (L^2(\Sigma))^m$ soluzione del sistema (3.4). Poiché $b_j \in C^\lambda(\Sigma)$, si ha $\varphi_j \in C^\lambda(\Sigma)$ (cfr. [7], Teorema (XXII), pag. 264). Il sistema (3.4) ammette dunque sempre soluzione nello spazio $(C^\lambda(\Sigma))^m$.

Vogliamo ora determinare le condizioni cui devono soddisfare i termini noti g_j del problema (1.1) affinché tale problema ammetta soluzione.

Se u è soluzione di (1.1) allora $u \in V(\Omega)$; esistono quindi $(\varphi, c) \in H$ tali che la u si rappresenta mediante la (3.2). Imponendo le condizioni al bordo si ottiene:

$$(S\varphi)_j + (Lc)_j = (-1)^{m-1} 2\pi g_j, \qquad j = 0, \dots, m-1, \tag{3.17}$$

essendo S un operatore singolare di $(L^2(\Sigma))^m$ in sé ed L un operatore continuo di $\mathbf{R}^n$ in

$(L^2(\Sigma))^m$. Consideriamo i vettori $g = (g_0, \dots, g_{m-1})$, $S\varphi = ((S\varphi)_0, \dots, (S\varphi)_{m-1})$, $Lc = ((Lc)_0, \dots, (Lc)_{m-1})$, e il seguente operatore:

$$F(\varphi, c) = S\varphi + Lc\,. \tag{3.18}$$

F è un operatore continuo di H in $(L^2(\Sigma))^m$. La (3.17) può anche scriversi

$$F(\varphi, c) = (-1)^{m-1} 2\pi g\,. \tag{3.19}$$

Indichiamo con F^* l'operatore trasposto di F e consideriamo il sistema omogeneo trasposto di (3.19):

$$F^* \psi = 0\,. \tag{3.20}$$

(VII) *C.N.S. affinché il problema* (1.1) *abbia soluzione è che il termine noto g sia ortogonale alle autosoluzioni del sistema* (3.20).

La condizione è ovviamente necessaria.

Verifichiamo che la condizione è sufficiente. Considerando la funzione $v_0(z)$ data dalla (3.1) ed imponendo ad essa le condizioni al bordo del problema (1.1), si ottiene un sistema di equazioni integrali singolari

$$(-1)^{m-1} 2\pi B_j v_0 = (S\varphi)_j\,, \qquad j = 0, \dots, m-1\,. \tag{3.21}$$

Poiché abbiamo supposto che gli operatori al bordo B_j verificano le condizioni di Lopatinskii si ha che il sistema (3.21) è regolare (cfr. [11]). In tali ipotesi esiste un operatore continuo S' riducente S (cfr. [10], pag. 419, [12]) cioè tale che $S'S = I + Q$ essendo I l'operatore identità e Q un operatore compatto di $(L^2(\Sigma))^m$ in sé.

Consideriamo il seguente operatore: $F'\psi = (S'\psi, 0)$. F' è un operatore continuo di $(L^2(\Sigma))^m$ in H ed inoltre riduce F. Dalla teoria degli operatori riducibili (cfr. [7], pag. 138) si deduce che all'equazione $F(\varphi, c) = (-1)^{m-1} 2\pi g$ è applicabile il principio dell'alternativa, cioè tale equazione è risolubile se e solo se il termine noto g è ortogonale alle autosoluzioni del sistema (3.20).

Abbiamo così dimostrato che se g è ortogonale alle autosoluzioni di (3.20) esiste un vettore $(\varphi, c) \in H$ verificante l'equazione $F(\varphi, c) = (-1)^{m-1} 2\pi g$. Rimane da verificare che la funzione

$$u(z) = \sum_{k=0}^{m-1} \int_{\Sigma} \varphi_k(\zeta) \frac{\partial^{m-1}}{\partial \xi^{m-1-k} \partial \eta^k} P(z, \zeta)\, ds_\zeta + \sum_{i,j=0,\, i+j \le m-1}^{m-1} c_{ij} x^i y^j$$

appartiene alla classe $C^{2m}(\Omega) \cap C^{m+\Lambda}(\bar{\Omega})$ cioè che $\varphi \in (C^\Lambda(\Sigma))^m$ (cfr. Teorema (VI)).

Il vettore (φ, c) è soluzione di (3.17); poiché $(Lc)_j \in C^\Lambda(\Sigma)$, si ha $(S\varphi)_j \in C^\Lambda(\Sigma)$ e ciò implica $\varphi_j \in C^\Lambda(\Sigma)$ (cfr. [7], Teorema (XXII), pag. 264).

Osserviamo che, in generale, la rappresentazione della funzione u soluzione di (1.1)

tramite la (3.2) non è unica. Il sistema (3.5) può scriversi in forma compatta al modo seguente:

$$\overline{S}\varphi = 0 \tag{3.22}$$

essendo $\overline{S}$ un operatore singolare di $(L^2(\Sigma))^m$ in sé. Indichiamo con Y l'autoinsieme del sistema (3.22). Poiché $\varphi \in Y$ se e solo se la funzione $v_0(z)$ definita dalla (3.1) è un polinomio di grado $m-1$ nelle due variabili reali x, y, per ogni $\varphi \in Y$ si può sempre determinare un vettore $c \in R^\sigma$ tale che la funzione $u(z)$ definita dalla (3.2) sia nulla. Ciò mostra che la rappresentazione (3.2) non è unica.

(VIII) *Nelle ipotesi del Teorema* (VII), *data comunque u soluzione di* (1.1), *esiste ed è unica una coppia* (ψ, d) *tale che* $\psi \in Y^\perp$ *e*

$$u(z) = \sum_{k=0}^{m-1} \int_\Sigma \psi_k(\zeta) \frac{\partial^{m-1}}{\partial \xi^{m-1-k} \partial \eta^k} P(z, \zeta)\, ds_\zeta + \sum_{i,j=0,\, i+j \leq m-1}^{m-1} d_{ij} x^i y^j .$$

Se sono verificate le ipotesi del Teorema (VII), esiste $(\varphi, c) \in H$ tale che u si rappresenta mediante la (3.2). Poiché $(L^2(\Sigma))^m = Y \oplus Y^\perp$, si può scrivere, in modo unico, $\varphi = \bar{\psi} + \psi$ con $\bar{\psi} \in Y$ e $\psi \in Y^\perp$. Si ha

$$u(z) = \sum_{k=0}^{m-1} \int_\Sigma \psi_k(\zeta) \frac{\partial^{m-1}}{\partial \xi^{m-1-k} \partial \eta^k} P(z, \zeta)\, ds_\zeta + \sum_{i,j=0,\, i+j \leq m-1}^{m-1} d_{ij} x^i y^j .$$

Supponiamo per assurdo che esista $(\psi, d) \neq (0, 0)$, $\psi \in Y^\perp$ tale che $u(z) = 0$ per ogni $z \in R^2$. In tal caso $v_0(z)$ è un polinomio di grado $m-1$ e ciò è possibile se e solo se $\psi \in Y$; ma $\psi \in Y^\perp$ dunque $\psi = 0$. In questo caso si ha $\sum_{i,j=0,\, i+j \leq m-1}^{m-1} d_{ij} x^i y^j = 0$ per ogni $(x, y) \in R^2$, cioè $d = 0$ e ciò è assurdo.

4. - Studio della maggiorazione (1.3)

(IX) *Rappresentando la soluzione di* (1.1) *tramite la* (3.2) *si ottiene*

$$\|u\|^2_{H^m(\Omega)} = [(\varphi, c), T(\varphi, c)]$$

essendo T un operatore compatto ed autoaggiunto di H in sé.

Identifichiamo l'elemento di posto ij nella matrice dei coefficienti di un polinomio di grado $m-1$ nelle due variabili reali x e y con l'elemento di posto s $(s = 0, \ldots, \sigma - 1)$ del vettore di R^σ essendo $s = i\left(m - \frac{i-1}{2}\right) + j$. In modo analogo identifichiamo l'ele-

mento $w_{ij} = x^i y^j$ con l'elemento

$$w_j = \begin{cases} y^j & j = 0, \dots, m-1, \\ xy^{j-m} & j = m, \dots, 2m-2 \\ \vdots & \\ x^{m-2}y^{j-(\sigma-3)} & j = \sigma-3, \sigma-2, \\ x^{m-1} & j = \sigma-1. \end{cases}$$

In questo modo il polinomio $\sum_{i,j=0, i+j \le m-1}^{m-1} c_{ij} x^i y^j$ può essere così scritto $\sum_{j=0}^{\sigma-1} c_j w_j$. Con alcuni calcoli si ottiene:

$$(4.1) \qquad \|u\|^2_{H^m(\Omega)} = \sum_{s=0}^{m-1} \sum_{k=0}^{m-1} \int_\Sigma \varphi_k(\zeta)\, ds_\zeta \int_\Sigma \varphi_s(w)\, G_{ks}(\zeta, w)\, ds_w + \sum_{s=0}^{\sigma-1} \sum_{k=0}^{\sigma-1} c_s c_k R_{sk} +$$

$$+ 2 \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{s=0}^{\sigma-1} c_s \int_\Sigma \varphi_k(\zeta)\, Q_{sk}(\zeta)\, ds_\zeta$$

essendo

$$G_{ks}(\zeta, w) = \sum_{h=0}^{m} \sum_{l=0}^{h} \int_\Omega \frac{\partial^{m-1+h}}{\partial x^{m-1-k+h-l} \partial y^{k+l}} P(z, \zeta) \frac{\partial^{m-1+h}}{\partial x^{m-1-s+h-l} \partial y^{s+l}} P(z, w)\, dx\, dy,$$

$G_{ks}(\zeta, w) = G_{sk}(w, \zeta)$, $G_{sk}(\zeta, w) = O(c + \log |w - \zeta|)$, $(s, k = 0, \dots, m-1)$,

$$R_{sk} = \sum_{h=0}^{m} \sum_{l=0}^{h} \int_\Omega \frac{\partial^h}{\partial x^{h-l} \partial y^l} w_s \frac{\partial^h}{\partial x^{h-l} \partial y^l} w_k\, dx\, dy,$$

$R_{sk} = R_{ks}$, $R_{sk} \in R$, $(s, k = 0, \dots, \sigma-1)$,

$$Q_{sk}(\zeta) = \sum_{h=0}^{m} \sum_{l=0}^{h} \int_\Omega \frac{\partial^{m-1+h}}{\partial x^{m-1-k+h-l} \partial y^{k+l}} P(z, \zeta) \frac{\partial^h}{\partial x^{h-l} \partial y^l} w_s\, dx\, dy,$$

$Q_{sk}(\zeta) \in L^2(\Sigma)$ $(k = 0, \dots, m-1, s = 0, \dots, \sigma-1)$.

Consideriamo i seguenti operatori:

$$(T_1 \varphi)_s = \sum_{l=0}^{m-1} \int_\Sigma \varphi_l(w)\, G_{sl}(\zeta, w)\, ds_w, \qquad s = 0, \dots, m-1;$$

T_1 è un operatore compatto ed autoaggiunto di $(L^2(\Sigma))^m$ in sè.

$$(T_2 c)_s = \sum_{l=0}^{\sigma-1} c_l R_{sl}, \qquad s = 0, \dots, \sigma-1;$$

T_2 è un operatore compatto ed autoaggiunto di $\boldsymbol{R}^\sigma$ in sé.

$$(T_3\varphi)_s = \sum_{j=0}^{m-1} \int_\Sigma \varphi_j(\zeta) Q_{sj}(\zeta)\, ds_\zeta\,, \qquad s = 0, \dots, \sigma - 1\,;$$

T_3 è un operatore compatto di $(L^2(\Sigma))^m$ in $\boldsymbol{R}^\sigma$; indichiamo con T_3^* l'operatore aggiunto così definito

$$(T_3^* c)_j = \sum_{l=0}^{\sigma-1} c_l Q_{lj}(\zeta)\,, \qquad s = 0, \dots, m-1\,.$$

Poniamo infine

$$T(\varphi, c) = (T_1\varphi + T_3^* c, T_2 c + T_3\varphi)\,;$$

T è un operatore compatto ed autoaggiunto di H in sé.

Con tali notazioni la (4.1) diventa

$$\|u\|^2_{H^m(\Omega)} = [(\varphi, c), T(\varphi, c)]\,.$$

Osserviamo che indicato con $A(F)$ l'autoinsieme dell'operatore F definito dalla (3.18), si ha

$$\inf_{u_0 \in U_0} \|u + u_0\|^2_{H^m(\Omega)} = \inf_{(\varphi_0, c_0) \in A(F)} [(\varphi + \varphi_0, c + c_0), T(\varphi + \varphi_0, c + c_0)]\,.$$

(X) *Rappresentando la soluzione di* (1,1) *tramite la* (3.2), *è possibile costruire esplicitamente un operatore continuo* F *di* H *in* $(L^2(\Sigma))^m$ *tale che*

$$\sum_{j=0}^{m-1} \|B_j u\|^2 = 4\pi^2 \|F(\varphi, c)\|^2_{(L^2(\Sigma))^m}\,.$$

Considerando la funzione $v_0(z)$ definita dalla (3.1) ed imponendo ad essa le condizioni al contorno si ottiene il seguente sistema di equazioni integrali singolari

$$(4.2) \qquad (-1)^{m-1} 2\pi B_j v_0(z) =$$

$$= \sum_{k=0}^{m-1} \left[A_{jk}(z)\varphi_k(z) + \frac{1}{\pi i} B_{jk}(z) \int_{+\Sigma} \frac{\varphi_k(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta + \int_{+\Sigma} \varphi_k(\zeta) M_{jk}(z, \zeta)\, d\zeta \right]$$

$(j = 0, \dots, m-1)$, dove

$$A_{jk}(z) = -\Im \int_{+\Gamma} \frac{L_j(w, z)\, w^{m-1-k}}{L(w)(\dot{x}w + \dot{y})}\, dw\,,$$

$$B_{jk}(z) = i\Re \int_{+\Gamma} \frac{L_j(w, z) w^{m-1-k}}{L(w)(\dot{x}w + \dot{y})} dw$$

$(j, k = 0, \dots, m-1)$ e $M_{jk}(z, \zeta) = O(|z - \zeta|^{k-1})$ (per i calcoli cfr [11]).

D'altra parte rappresentando la soluzione di (1.1) tramite la (3.2) si deve tener conto anche del polinomio; imponendo ad esso le condizioni al contorno si ottiene:

$$(4.3) \qquad \sum_{s=0}^{m-1} \sum_{t=0}^{m-1-s} B'_{t,m-1-s}(z) \frac{\partial^{m-1-s}}{\partial x^{m-1-s-t} \partial y^t} \left(\sum_{h,k=0, h+k \leq m-1}^{m-1} c_{hk} x^h y^k \right) = (Lc)_j ,$$

$$j = 0, \dots, m-1 ;$$

L è un operatore continuo di R^s in $(L^2(\Sigma))^m$.

Considerando le matrici $A(z) = ((A_{jk}(z)))$, $B(z) = ((B_{jk}(z)))$ e i vettori

$$K_0 \varphi = \left(\int_{+\Sigma} \frac{\varphi_0(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \dots, \int_{+\Sigma} \frac{\varphi_{m-1}(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \right),$$

$$M\varphi = \left(\sum_{k=0}^{m-1} \int_{+\Sigma} \varphi_k(\zeta) M_{0k}(z, \zeta) d\zeta, \dots, \sum_{k=0}^{m-1} \int_{+\Sigma} \varphi_k(\zeta) M_{m-1,k}(z, \zeta) d\zeta \right),$$

$Lc = (-1)^{m-1} 2\pi((Lc)_0, \dots, (Lc)_{m-1})$, la (4.2) e la (4.3) possono scriversi in forma vettoriale:

$$(4.4) \qquad (-1)^{m-1} 2\pi g = A\varphi + \frac{B}{\pi i} K_0 \varphi + M\varphi + Lc .$$

Ponendo

$$(4.5) \qquad F(\varphi, c) = A\varphi + \frac{B}{\pi i} K_0 \varphi + M\varphi + Lc$$

si ottiene la tesi.

Il seguente teorema fornisce una stima per la costante di maggiorazione C.

(XI) *Considerati gli operatori T ed F introdotti nei Teoremi* (IX) (X) *e posto*

$$(4.6) \qquad C_1^2 = \sup_{(\varphi, c) \in H - \{(0,0)\}} \frac{[(\varphi, c), T(\varphi, c)]}{\|(\varphi, c)\|^2} ,$$

$$(4.7) \qquad C_2^2 = \inf_{(\varphi, c) \in A(F)^\perp - \{(0,0)\}} \frac{\|F(\varphi, c)\|^2_{(L^2(\Sigma))^m}}{\|(\varphi, c)\|^2} ,$$

risulta

$$(4.8) \qquad C_2 \neq 0$$

e si ha

$$C^2 \leq \frac{1}{4\pi^2} C_1^2 C_2^{-2} . \tag{4.9}$$

Dimostriamo la (4.8). Supponiamo per assurdo $C_2 = 0$; in tal caso esiste una successione $\{(\varphi_n, c_n)\} \in A(F)^\perp$ tale che

$$\|(\varphi_n, c_n)\| = 1 , \quad \lim_{n \to \infty} \|F(\varphi_n, c_n)\|_{L^2(\Sigma)^m} = 0 . \tag{4.10}$$

Dalla prima delle (4.10) si deduce che esiste una sottosuccessione, che continueremo ad indicare con $\{(\varphi_n, c_n)\}$, convergente debolmente ad un elemento $(\varphi, c) \in A(F)^\perp$. La successione $\{F(\varphi_n, c_n)\}$ converge allora debolmente a $F(\varphi, c)$; dalla seconda delle (4.10) e dall'unicità del limite debole, si deduce che $F(\varphi, c) = 0$. Si ha quindi $(\varphi, c) \in$ $\in A(F)$ e cioè, essendo anche $(\varphi, c) \in A(F)^\perp$, $(\varphi, c) = (0, 0)$.

Indichiamo con F' un operatore riducente F (cfr. Teorema (VII)); si ottiene $F' F(\varphi_n, c_n) = (\varphi_n, c_n) + Q(\varphi_n, c_n)$ essendo Q un operatore compatto di H in sé. Dal fatto che $\{(\varphi_n, c_n)\}$ converge debolmente a (0,0) e dalla seconda delle (4.10) si ottiene $\lim_{n \to \infty} \|(\varphi_n, c_n)\| = 0$; ciò è assurdo.

Dimostriamo la (4.9). Dalla (4.6) si ottiene

$$[(\varphi, c), T(\varphi, c)] \leq C_1^2 \|(\varphi, c)\|^2 \qquad \forall (\varphi, c) \in H$$

e quindi

$$\inf_{(\varphi_0, c_0) \in A(F)} [(\varphi + \varphi_0, c + c_0), T(\varphi + \varphi_0, c + c_0)] \leq \tag{4.11}$$

$$\leq C_1^2 \inf_{(\varphi_0, c_0) \in A(F)} \|(\varphi + \varphi_0, c + c_0)\|^2 \qquad \forall (\varphi, c) \in H .$$

Dalla (4.7) si ottiene

$$\|(\varphi, c)\|^2 \leq C_2^{-2} \|F(\varphi, c)\|^2_{L^2(\Sigma)^m} \qquad \forall (\varphi, c) \in A(F)^\perp .$$

D'altra parte essendo $H = A(F) \oplus A(F)^\perp$, si ha $(\varphi, c) = (\varphi_0, c_0) + (\psi, d)$, $(\varphi_0, c_0) \in A(F)$, $(\psi, d) \in H$; da ciò segue che $\|(\varphi, c)\|^2 = \inf_{(\varphi_0, c_0) \in A(F)} \|(\varphi_0 + \psi, c_0 +$ $+ d)\|^2$. La (4.7) implica quindi

$$\inf_{(\varphi_0, c_0) \in A(F)} \|(\psi + \varphi_0, d + c_0)\|^2 \leq C_2^{-2} \|F(\psi, d)\|^2_{L^2(\Sigma)^m} \qquad \forall (\psi, d) \in H . \tag{4.12}$$

Dalle (4.11), (4.12) si deduce

$$\inf_{(\varphi_0, c_0) \in A(F)} [(\varphi + \varphi_0, c + c_0), T(\varphi + \varphi_0, c + c_0)] \leq C_1^2 C_2^{-2} \|F(\varphi, c)\|^2_{L^2(\Sigma)^m} \tag{4.13}$$

$$\forall (\varphi, c) \in H .$$

Essendo

$$\inf_{(\varphi_0, c_0) \in A(F)} [(\varphi + \varphi_0, c + c_0), T(\varphi + \varphi_0, c + c_0)] = \inf_{u_0 \in U_0} \|u + u_0\|^2_{H^m(\Omega)}$$

(cfr. Teorema (IX)) e

$$\|F(\varphi, c)\|^2_{(L^2(\Sigma))^m} = \frac{1}{4\pi^2} \sum_{j=0}^{m-1} \|B_j u\|^2$$

(cfr. Teorema (X)), dalla (4.13) si ottiene la (4.9).

5. - Calcolo esplicito della costante di maggiorazione

Vogliamo esporre un metodo per il calcolo delle costanti C_1 e C_2 definite nel Teorema (XI), nel caso in cui gli operatori al bordo siano del tipo (1.4).

Osserviamo che la (1.4) può anche scriversi:

$$B_j u = \sum_{k=0}^{m-1} b_k^j(z) \frac{\partial}{\partial s} \frac{\partial^{m-1}}{\partial x^{m-1-k} \partial y^k} u +$$

$$+ \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{l=0}^{m-1-i} d_{i,m-1-i}^j(z) \frac{\partial^{m-1-i}}{\partial x^{m-1-i-l} \partial y^l} u \quad j = 0, \dots, m-1 .$$

Affinché tali operatori verifichino la condizione di Lopatinskii, deve essere $\det b(z) \neq 0$ per ogni fissato $z \in \Sigma$ (abbiamo posto $b(z) = ((b_k^j(z)))$). Infatti, fissato $z \in \Sigma$, nessuna combinazione lineare a coefficienti complessi dei polinomi caratteristici delle condizioni al bordo:

$$\sum_{j=0}^{m-1} \alpha_j L_j(w, z) = (\dot{x}w + \dot{y}) \sum_{k=0}^{m-1} w^{m-1-k} \left(\sum_{j=0}^{m-1} \alpha_j b_k^j(z) \right) \quad \alpha_j \in \mathbb{C} ,$$

risulta divisibile per il polinomio di grado m avente per zeri tutti e soli gli zeri a parte immaginaria negativa di $L(w)$ e coefficiente direttivo unitario, se e solo se $\det b(z) \neq 0$. In questo caso, quindi, il problema (1.1) può ricondursi ad un problema in cui vengono assegnate condizioni al bordo di tipo Dirichlet perturbate da un termine in cui compaiono derivate di ordine minore di m della funzione incognita u.

(XII) *Indichiamo con* $\{(w_k, e_k)\}$ *un sistema ortonormale e completo di vettori nello spazio* H *e con* P_ν *la proiezione di* H *sul sottospazio* $W_\nu = [(w_1, e_1) \dots (w_\nu, e_\nu)]$. *Considerate le successioni* $\{\lambda_1^{(\nu)}\}$ *e* $\{\gamma_\nu\}$ *così definite:*

$\lambda_1^{(\nu)}$ *radice dell'equazione*

$$\det \{[T(w_k, e_k), (w_j, e_j)] - \lambda[(w_k, e_k), (w_j, e_j)]\} = 0 \quad j, k = 1, \dots, \nu$$

(le radici sono così ordinate $\lambda_1^{(\nu)} \geq \lambda_2^{(\nu)} \geq \ldots \geq \lambda_\nu^{(\nu)}$)

$$\gamma_\nu = [\mathfrak{z}(T^2) - \mathfrak{z}((P_\nu T P_\nu)^2) + (\lambda_1^{(\nu)})^2]^{1/2},$$

si ha

$$\lambda_1^{(\nu)} \leq \lambda_1^{(\nu+1)} \leq C_1^2 \leq \gamma_{\nu+1} \leq \gamma_\nu, \qquad \lim_{\nu\to\infty} \lambda_1^{(\nu)} = \lim_{\nu\to\infty} \gamma_\nu = C_1^2. \tag{5.1}$$

Per dimostrare le (5.1) basta verificare che il P.C.O. T^2 appartiene alla classe $\mathcal{T}$ (cfr. §2).

Consideriamo l'insieme D dato dal prodotto cartesiano di Σ per la retta reale. Indichiamo con ds la misura di Lebesgue definita su Σ e con δ_i la misura di Dirac diversa da zero solo nei punti $i = 0, \ldots, \sigma + m - 1$ e poniamo $\mu = ds \times \delta_i + (1/|\Sigma|)ds \times \delta_j$, $i = 0, \ldots, m-1$, $j = m, \ldots, \sigma + m - 1$. Indichiamo con $\phi_i(z)$ il valore della funzione $\phi(z, t)$ $(z \in \Sigma, t \in R)$, appartenente a $L^2(D, \mu)$, quando $t = i$ ed inoltre $i = 0, \ldots, (\sigma + m - 1)$. Osserviamo che $\phi_i(z) = \varphi_i(z)$ se $i = 0, \ldots, m-1$, e $\phi_i(z) = c_{i-m}$ se $i = m, \ldots, m + \sigma - 1$. Lo spazio H è congruente allo spazio $L^2(D, \mu)$.

Poniamo

$$V_\psi(z, \zeta) = \begin{cases} G_\psi(z, \zeta) & 0 \leq i, j \leq m-1, \\ Q_{j-m,i}(z) & 0 \leq i \leq m-1, \quad m \leq j \leq \sigma - 1 + m, \\ Q_{i-m,j}(\zeta) & m \leq i \leq \sigma + m - 1, \quad 0 \leq j \leq m, \\ R_{i-m,j-m} & m \leq i, j \leq m + \sigma - 1. \end{cases}$$

L'operatore T è unitariamente equivalente all'operatore

$$(T\phi)_i = \int_D \phi_j(\zeta) V_\psi(z, \zeta)\, d\mu_{(j,\zeta)}, \qquad i = 0, \ldots, (\sigma + m - 1).$$

Poiché $G_\psi(z, \zeta) = O(c + \log|z - \zeta|)$, si ha $V_\psi(z, \zeta) \in L^2(D \times D, \mu \times \mu)$; $V_\psi(z, \zeta)$ è inoltre un nucleo simmetrico. Queste sono le condizioni affinché $T^2 \in \mathcal{T}$ (cfr. Teorema (III)).

Osserviamo che nella costruzione della successione $\{\gamma_\nu\}$ interviene il primo invariante ortogonale di T^2; a tale invariante si può dare una espressione esplicita (cfr. (2.2)):

$$\mathfrak{z}(T^2) = \int_D d\mu_{(i,z)} \int_D |V_\psi(z, \zeta)|^2 d\mu_{(j,\zeta)} =$$

$$= \sum_{i,j=0}^{m-1} \int_\Sigma ds_z \int_\Sigma |G_\psi(z, \zeta)|^2 ds_\zeta + 2 \sum_{i=0}^{\sigma-1} \sum_{j=0}^{m-1} \int_\Sigma |Q_\psi(z)|^2 ds_z + \sum_{\psi=0}^{\sigma-1} R_\psi^2.$$

Vogliamo ora costruire una successione approssimante C_2^2 per difetto.

(XIII) *È possibile costruire esplicitamente un operatore compatto ed autoaggiunto N*

di H in sé, tale che posto

$$C_3 = \inf_{(\varphi, c) \in \mathcal{N}(F)^\perp - \{(0,0)\}} \frac{[(\varphi, c), N(\varphi, c)]}{\|(\varphi, c)\|^2},$$

si ha

$$1 + C_3 > 0, \tag{5.2}$$

$$C_2^2 \geq \|B^{-1}\|_*^{-2}(1 + C_3), \tag{5.3}$$

essendo B la matrice definita nel teorema (X) *e*

$$\|B^{-1}\|_*^2 = \sup_{\varphi \in (L^2(\Sigma))^m, \|\varphi\|_{(L^2(\Sigma))^m} = 1} \|B^{-1}\varphi\|^2_{(L^2(\Sigma))^m}.$$

Consideriamo l'operatore F definito dalla (4.5). In [11], Teorema (III), viene dimostrato che gli operatori al bordo sono del tipo (1.4) se e solo se $A_{jk}(z) = 0$, $j, k = 0, \ldots, m-1$, $\forall z \in \Sigma$. Si verifica inoltre (cfr. [11], pag. 9) che il sistema (4.2) può scriversi nella forma seguente:

$$(-1)^{m-1} 2\pi B_j v_0(z) = \sum_{k=0}^{m-1} \left[\frac{\widetilde{B}_{jk}(z)}{\pi} \int_\Sigma \varphi_k(\zeta) \frac{\partial}{\partial s_\zeta} \log|z - \zeta| \, ds_\zeta + \int_\Sigma \varphi_k(\zeta) \widetilde{M}_{jk}(z, \zeta) \, ds_\zeta \right]$$

essendo $\widetilde{B}_{jk}(z) = -iB_{jk}(z)$, $j, k = 0, \ldots, m-1$ e $\widetilde{M}_{jk}(z, \zeta) = O(|z - \zeta|^{b-1})$.

Considerando la matrice $\widetilde{B}(z) = ((\widetilde{B}_{jk}(z)))$ e i vettori

$$S_0\varphi = \frac{1}{\pi}\left(\int_\Sigma \varphi_0(\zeta) \frac{\partial}{\partial s_\zeta} \log|z - \zeta| \, ds_\zeta, \ldots, \int_\Sigma \varphi_{m-1}(\zeta) \frac{\partial}{\partial s_\zeta} \log|z - \zeta| \, ds_\zeta \right),$$

$$\widetilde{M}\varphi = \left(\sum_{k=0}^{m-1} \int_\Sigma \varphi_k(\zeta) \widetilde{M}_{0k}(z, \zeta) \, ds_\zeta, \ldots, \sum_{k=0}^{m-1} \int_\Sigma \varphi_k(\zeta) \widetilde{M}_{m-1,k}(z, \zeta) \, ds_\zeta \right),$$

la (4.5) può anche scriversi al modo seguente:

$$F(\varphi, c) = \widetilde{B} S_0 \varphi + \widetilde{M}\varphi + Lc. \tag{5.4}$$

Il sistema (4.2) è regolare (cfr [11]); la matrice $B(z)$, e di conseguenza la matrice $\widetilde{B}(z)$, sono dunque non degeneri.

Consideriamo ora la costante

$$C_4^2 = \inf_{(\varphi, c) \in A(F)^\perp - \{(0,0)\}} \frac{\|\tilde{B}^{-1} F(\varphi, c)\|^2_{L^2(\Sigma)^m}}{\|(\varphi, c)\|^2} ;$$

si ha

$$C_2^2 \geq \|\tilde{B}^{-1}\|_*^{-2} C_4^2 . \tag{5.5}$$

In modo analogo a quanto fatto nel Teorema (XI), si dimostra che

$$C_4 \neq 0 . \tag{5.6}$$

D'altra parte si ha

$$\|\tilde{B}^{-1} F(\varphi, c)\|^2_{L^2(\Sigma)^m} = \|(\varphi, c)\|^2 + [(\varphi, c), N(\varphi, c)]$$

essendo

$$N(\varphi, c) = (N_1 \varphi + N_2^* c, N_2 \varphi + N_3 c) \tag{5.7}$$

ed

$$\begin{cases} N_1 = N_4 + \tilde{M}^* \tilde{M} + S_0^* \tilde{M} + \tilde{M}^* S_0 , \quad N_2 = L^* S_0 + L^* \tilde{M} , \quad N_3 = L^* L - I , \\ N_4 \varphi = \dfrac{1}{\pi^2} \displaystyle\int_\Sigma \varphi(\zeta)\, ds_\zeta \int_\Sigma \frac{\partial}{\partial s_\zeta} \log |z - \zeta| \frac{\partial}{\partial s_w} \log |z - w|\, ds_\zeta . \end{cases} \tag{5.8}$$

N_1 è un operatore compatto ed autoaggiunto di $(L^2(\Sigma))^m$ in sé; N_2 è un operatore compatto di $(L^2(\Sigma))^m$ in $\boldsymbol{R}^\sigma$; N_3 è un operatore compatto ed autoaggiunto di $\boldsymbol{R}^\sigma$ in sé. Da ciò segue che N è un operatore compatto ed autoaggiunto di H in sé.

Essendo $C_4^2 = 1 + C_3$, dalle (5.5) e (5.6) si ottengono le (5.2) e (5.3).

Vogliamo ora costruire due successioni che approssimino per difetto e per eccesso la costante C_3.

N è un operatore compatto; deve quindi essere $C_3 \leq 0$. Osserviamo che, poiché l'indice di (3.22) è nullo e poiché il sistema (3.6) ha σ autosoluzioni linearmente indipendenti, si ha $\dim Y = \sigma$ (Y è l'insieme introdotto nel Teorema (VII)); ponendo $\dim U_0 = q_0$, segue $\dim A(F) = \sigma + q_0$. Ordinando gli autovalori non positivi di N in ordine non decrescente, si ottiene che, se $C_3 < 0$, C_3 viene ad essere il $(\sigma + q_0 + 1)$-esimo autovalore di N (porremo d'ora in poi $q = \sigma + q_0 + 1$). Si può quindi porre $C_3 = \mu_q$ (per la definizione di μ_q cfr. Teoremi (IV) e (V)).

(XIV) *Utilizzando le stesse notazioni del Teorema* (XII), *consideriamo le successioni* $\{\lambda_{q,\nu}\}$, $\{\bar{\gamma}_\nu\}$ *così definite*:

$\lambda_{q,\nu}$ *radice dell'equazione*

$$\det\{[N(w_k, e_k), (w_j, e_j)] - \lambda[(w_k, e_k), (w_j, e_j)]\} = 0\,, \qquad k, j = 1, \dots, \nu$$

(le radici sono così ordinate $\lambda_{1,\nu} \leq \lambda_{2,\nu} \leq \dots \leq \lambda_{\nu,\nu}$*),*

$$\bar{\gamma}_\nu = -[\mathfrak{I}((N)^2) - \mathfrak{I}((P_\nu N P_\nu)^2) + (\lambda_{q,\nu})^2]^{1/2}\,.$$

Si ha

$$\bar{\gamma}_\nu \leq \bar{\gamma}_{\nu+1} \leq C_3 \leq \lambda_{q,\nu+1} \leq \lambda_{q,\nu}$$

$$\lim_{\nu\to\infty} \bar{\gamma}_\nu = \lim_{\nu\to\infty} \lambda_{q,\nu} = C_3\,.$$

I Teoremi (IV) e (V) forniscono due successioni approssimanti C_3 per difetto e per eccesso se il P.C.O. $N^2 \in \mathfrak{T}$.

Dalla (5.8) si deduce:

$$(N_1\varphi)_i = \sum_{j=0}^{m-1} \int_\Sigma \varphi_j(\zeta) J_{ij}(z, \zeta)\, ds_\zeta\,, \qquad i = 0, \dots, m-1\,,$$

$$(N_2\varphi)_i = \sum_{j=0}^{m-1} \int_\Sigma \varphi_j(\zeta) X_{ij}(\zeta)\, ds\,, \qquad i = 0, \dots, \sigma-1\,,$$

$$(N_3 c)_i = \sum_{j=0}^{\sigma-1} c_j W_{ij}\,, \qquad i = 0, \dots, \sigma-1\,.$$

Si ha inoltre

$$J_{ij}(z, \zeta) = J_{ji}(\zeta, z)\,, \qquad J_{ij}(z, \zeta) = O(|z-\zeta|^{k-1})\,,$$

$$X_{ij}(z) \in L^2(\Sigma)\,,$$

$$W_{ij} = W_{ji} \qquad W_{ij} \in R\,.$$

Consideriamo come nel Teorema (XII) lo spazio $L^2(D, \mu)$ congruente allo spazio H. L'operatore N è unitariamente equivalente all'operatore

$$(N\phi)_i = \int_D \phi_j(\zeta) K_{ij}(z, \zeta)\, d\mu_{(j,\zeta)} \qquad i = 0, \dots, (\sigma+m-1)$$

avendo posto

$$K_{ij}(z,\zeta)=\begin{cases} J_{ij}(z,\zeta) & 0\leq i,j\leq m-1\,,\\ X_{j-m,i}(z) & 0\leq i\leq m-1,\, m\leq j\leq \sigma+m-1\,,\\ X_{i-m,j}(\zeta) & m\leq i\leq \sigma+m-1,\, 0\leq j\leq m-1\,,\\ W_{i-m,j-m} & m\leq i,j\leq \sigma+m-1\,. \end{cases}$$

Si ha

$$K_{ij}(z,\zeta)=K_{ji}(\zeta,z)\,,\qquad K_{ij}(z,\zeta)=O(|z-\zeta|^{b-1})\,.$$

Poiché abbiamo supposto $b>1/2$, si ha che $K_{ij}(z,\zeta)\in L^2(D\times D,\mu\times\mu)$; il P.C.O. N^2 appartiene allora alla classe $\mathcal{T}$.

In particolare si ha

$$\mathfrak{N}((N)^2)=\int_D\int_D |K_{ij}(z,\zeta)|^2\,d\mu_{(j,z)}\,d\mu_{(i,\zeta)}=$$

$$=\sum_{i,j=0}^{m-1}\int_\Sigma ds_z\int_\Sigma |J_{ij}(z,\zeta)|^2\,ds_\zeta+2\sum_{i=0}^{\sigma-1}\sum_{j=0}^{m-1}\int_\Sigma |X_{ij}(\zeta)|^2\,ds+\sum_{i,j=0}^{\sigma-1}|W_{ij}|^2\,.$$

Dalle (4.9), (5.3) e dai Teoremi (XII) e (XIV), si può concludere che:

$$C^2\leq\frac{1}{4\pi^2}\,\gamma_*\,\|B^{-1}\|_*^2\,\frac{1}{1+\bar\gamma_*}\,, \tag{5.9}$$

la disuguaglianza essendo valida non appena è $1+\bar\gamma_*>0$.

Tutte le costanti a secondo membro della (5.9) sono esplicitamente calcolabili.

BIBLIOGRAFIA

[1] S. Agmon, *Multiple layer potential and the Dirichlet problem for Higher order elliptic equations in the plane - I*, Comm. Pure Appl. Math. (10) (1957).

[2] R. Casola, *Sulla maggiorazione esplicita delle derivate seconde per mezzo dei dati nel problema biarmonico*, Riv. Mat. Univ. Parma (5), 1 (1992), 197-227.

[3] A. Cialdea, *Teoremi di completezza connessi con equazioni ellittiche di ordine superiore in due variabili in un campo con contorno angoloso*, Rend. Circ. Mat. di Palermo (2),34, (1985), 32-49.

[4] A. Cialdea, *Maggiorazione L^2 esplicita per le soluzioni del sistema dell'elasticità*, Rend. Mat. (7), 8 (1988), 1-23.

[5] A. Cialdea, *A multiple layer potential theory alternative to Agmon's*, Arch. Rational Mech. Anal., 120 (1992), 345-362.

[6] G. Fichera, *Linear elliptic equations of higher order in two indipendent variables and singular integral equations, with applications to anisotropic inhomogeneous elasticity*, in *International Conference on Partial Differential Equations and Continuum Mechanics, Langer* (1960), 55-80.

[7] G. Fichera, *Operatori di Riesz-Fredholm. Operatori riducibili. Equazioni integrali singolari. Applicazioni*, Pubbl. dell'Ist. Matem. dell'Univ. di Roma (1964).

[8] G. Fichera, *Linear Elliptic Differential Systems and Eigenvalue Problems*, Springer-Verlag (1965).

[9] G. Fichera, *Abstract and Numerical Aspects of Eigenvalue Theory*, University of Alberta, Edmonton, July (1973).

[10] N. I. Muskhelishvili, *Singular Integral Equation*, P. Noordhoff N.V., Groningen, Holland (1952).

[11] P. E. Ricci, *Sui potenziali di semplice strato per le equazioni ellittiche di ordine superiore in due variabili*, Rend. Matem. (6), 7 (1974), 1-39.

[12] N. P. Vekua, *Systems of Singular Integral Equations*, D. Noordhoff, Groningen (1967).