Rendiconti
Accademia Nazionale delle Scienze detta dei XL.
Memorie di Matematica
110° (1992), Vol. XVI, fasc. 9, pagg. 179-184

ALBERTO SCALARI - GIUSEPPE ZAMPIERI (*)

Il teorema dell'«Edge of the wedge» nella microlocalizzazione al bordo (**)

SUNTO. — Per una famiglia di chiusi $\{\lambda_i\}$ stabile per intersezione finita si prova che l'annullamento di coomologia a supporto sui singoli λ_i per un complesso di fasci, implica quello sulle loro unioni finite. Si applica questo risultato al caso del complesso di Schapira [S] delle microfunzioni al bordo di un aperto convesso $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Se ne deduce un criterio di decomposizione del microsupporto al bordo SS_Ω che raffina i precedenti risultati di [L] e [Z].

The «Edge of the Wedge» Theorem in the Microlocalization at the Boundary

ABSTRACT. — For a family of closed sets $\{\lambda_i\}$ stable under finite intersection, we prove that vanishing of cohomology groups with support over each λ_i for a complex of sheaves, implies vanishing over finite unions. By means of this we get, for an open convex set $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, a criterion of decomposition of the microsupport at the boundary SS_Ω in the sense of Schapira [S] which refines former results by [L] and [Z].

1. - «EDGE OF THE WEDGE» ASTRATTO

Sia X uno spazio vettoriale, sia $\Lambda = \{\lambda_i\}$ una famiglia di chiusi di X stabile per intersezione finita; sia $F \in D^+(X)$ un elemento della categoria derivata della categoria dei complessi di fasci a coomologia limitata superiormente.

PROPOSIZIONE 1.1: *Supponiamo*

$$H^j_\lambda(X, F) = 0 \quad \forall j \neq 0, \tag{1.1}$$

$$H^0_\lambda(X, F) \hookrightarrow H^0_\tau(X, F) \quad \textit{iniettiva se } \lambda \subset \tau \ (\lambda, \tau \in \Lambda), \tag{1.2}$$

$$H^0_\lambda(X, F) \cap H^0_{\bigcup_{i=1} \lambda_i}(X, F) \hookrightarrow H^0_{\bigcup_{i=1} (\lambda_i \cap \tau)}(X, F) \quad \textit{iniettiva } \forall \tau. \tag{1.3}$$

(*) Indirizzo degli Autori: Dipartimento di Matematica Pura ed Applicata dell'Università di Padova, Via Belzoni 7, I-35131 Padova.
(**) Nota presentata il 5 maggio 1992 da Giuseppe Scorza Dragoni, uno dei XL.

ISSN 0392-4106

Segue:

$$H^j_{\bigcup_{i=1}^{s}\lambda_i}(X,F)=0 \quad \forall j\neq 0, \tag{1.4}$$

$$H^0_{\bigcup_{i=1}^{s}\lambda_i}(X,F)\hookrightarrow H^0_\eta(X,F) \quad \textit{iniettiva se } \eta\supset\bigcup\lambda_i, \tag{1.5}$$

$$H^0_{\bigcup_{i=1}^{s}\lambda_i}(X,F)\leftarrow\frac{\bigoplus_{i=1}^{s}H^0_{\lambda_i}(X,F)}{\bigoplus_{i,j=1}^{s-1}H^0_{\lambda_i\cap\lambda_j}(X,F)} \quad \textit{isomorfismo}. \tag{1.6}$$

Dim: *a*) Si consideri la sequenza esatta lunga

$$H^j_{\bigcup_{i=1}^{s-1}\lambda_i\cap\lambda_s}(X,F)\to H^j_{\bigcup_{i=1}^{s-1}\lambda_i}(X,F)\oplus H^j_{\lambda_s}(X,F)\to H^j_{\bigcup_{i=1}^{s}\lambda_i}(X,F)\xrightarrow{+1}. \tag{1.7}$$

Allora si dimostra che (1.4) vale $\forall j>0$ e $\forall j<-1$. In particolare:

(i) $$H^0_{\bigcup_{i=1}^{s-1}\lambda_i}(X,F)\oplus H^0_{\lambda_s}\to H^0_{\bigcup_{i=1}^{s}\lambda_i}(X,F) \quad \text{è suriettiva.}$$

b) Proviamo ora (1.5) e (1.6) per induzione su s. Se (1.5) e (1.6) valgono $\forall r<s$, allora la mappa:

(ii) $$H^0_{\bigcup_{i=1}^{s-1}\lambda_i\cap\lambda_s}(X,F)\to H^0_{\lambda_s}(X,F) \quad \text{è iniettiva}$$

e si ha un isomorfismo:

(iii) $$H^0_{\bigcup_{i=1}^{s-1}\lambda_i}(X,F)\cong\frac{\bigoplus_{i=1}^{s-1}H^0_{\lambda_i}(X,F)}{\bigoplus_{i,j=1}^{s-1}H^0_{\lambda_i\cap\lambda_j}(X,F)}.$$

Da (i), (ii), (iii) segue (1.6) per s.

Sia ora $f\in H^0_{\bigcup_{i=1}^{s}\lambda_i}(X,F)$, $f=0$ in $H^0_\eta(X,F)$. Per (1.6) si può scrivere:

$$f=\sum_{i=1}^{s}(-1)^i f_i, \quad f_i\in H^0_{\lambda_i}(X,F).$$

Ma allora

$$(-1)^s f_s=-\sum_{i=1}^{s-1}(-1)^i f_i \quad \text{in } H^0_\eta(X,F)$$

e quindi per (1.3) e per (1.6)

$$(-1)^s f_s=-\sum_{i=1}^{s-1}(-1)^i g_i \quad \text{con } g_i\in H^0_{\lambda_i\cap\lambda_s}(X,F).$$

D'altra parte $\sum_{i=1}^{s-1}(-1)^i(f_i-g_i)=0$ e quindi per induzione

$$(-1)^i(f_i-g_i)=\sum_{j=1}^{s-1}(-1)^j(h_{ij}-h_{ji})/2 \quad \text{con } h_{ij}\in H_{\lambda_i\cap\lambda_j}(X,F).$$

In conclusione $f_i=g_i+\sum_j(-1)^{s+j}(h_{ij}-h_{ji})/2$ il che prova (1.5).

c) Infine usando (1.7) per $j=-1$ e usando (1.5) si ha (1.4) anche per $j=-1$. ■

Supponiamo

$$(1.3') \qquad H^0_\eta(X,F) \cap \bigoplus_{i=1}^{s} H^0_{\lambda_i}(X,F) \leftarrow \bigoplus_{i=1}^{s} H^0_{\lambda_i \cap \eta}(X,F) \quad \text{suriettiva } \forall s.$$

Lemma 1.2: *Le condizioni* (1.1), (1.2), (1.3) *sono equivalenti alle* (1.1), (1.2), (1.3').

Dim: Se valgono (1.1), (1.2), (1.3) allora vale (1.6). In tale situazione (1.3) equivale a (1.3'). Sia (1.3) vera $\forall r \leq s-1$. Allora valgono (1.5), (1.6) $\forall r \leq s$ e ancora quindi (1.3) equivale a (1.3') per $r = s$. ■

Siano ora η, λ_i, $\bar{\eta}$, $\bar{\lambda}_i$ chiusi di A con le proprietà:

(i) $\bar{\eta} \subset \eta$, $\bar{\lambda}_i \subset \lambda_i$,

(ii) $(\lambda_i \setminus \bar{\lambda}_i) \cap (\eta \setminus \bar{\eta}) = (\lambda_i \cap \eta) \setminus (\bar{\lambda}_i \cap \bar{\eta})$.

Proposizione 1.3: *Assumiamo*:

$$(1.8) \qquad H^j_\eta(X,F) = 0 \quad \forall j \geq 1,$$

$$(1.9) \qquad H^0_{\bar{\eta}}(X,F) \cap \bigoplus_{i=1}^{s} H^0_{\bar{\lambda}_i}(X,F) \leftarrow \bigoplus_{i=1}^{s} H^0_{\lambda_i \cap \bar{\eta}}(X,F) \quad \textit{suriettiva},$$

$$(1.10) \qquad H^0_{\eta \setminus \bar{\eta}}(X,F) \cap \bigoplus_{i=1}^{s} H^0_{\lambda_i \setminus \bar{\lambda}_i}(X,F) \leftarrow \bigoplus_{i=1}^{s} H^0_{(\lambda_i \setminus \bar{\lambda}_i) \cap (\eta \setminus \bar{\eta})}(X,F) \quad \textit{suriettiva}.$$

Segue:

$$(1.11) \qquad H^0_\eta(X,F) \cap \bigoplus_{i=1}^{s} H^0_{\lambda_i}(X,F) \leftarrow \bigoplus_{i=1}^{s} H^0_{\lambda_i \cap \eta}(X,F) \quad \textit{suriettiva}.$$

Dim: Consideriamo il seguente diagramma:

$$\begin{array}{ccccc}
H^0_{\bar{\eta}}(\cdot) \cap \bigoplus_{i=1}^{s} H^0_{\bar{\lambda}_i}(\cdot) & \xrightarrow{\alpha} & H^0_\eta(\cdot) \cap \bigoplus_{i=1}^{s} H^0_{\lambda_i}(\cdot) & \xrightarrow{\beta} & H^0_{\eta \setminus \bar{\eta}}(\cdot) \cap \bigoplus_{i=1}^{s} H^0_{\lambda_i \setminus \bar{\lambda}_i}(\cdot) \\
\uparrow \theta & & \uparrow \chi & & \uparrow \varphi \\
\bigoplus_{i=1}^{s} H^0_{\lambda_i \cap \bar{\eta}}(\cdot) & \xrightarrow{\tau} & \bigoplus_{i=1}^{s} H^0_{\lambda_i \cap \eta}(\cdot) & \xrightarrow{\theta} & \bigoplus_{i=1}^{s} H^0_{(\lambda_i \setminus \bar{\lambda}_i) \cap (\eta \setminus \bar{\eta})}(\cdot)
\end{array}$$

(ove $(\cdot)$ sta per (X,F)). Ricordiamo che $(\lambda_i \setminus \bar{\lambda}_i) \cap (\eta \setminus \bar{\eta}) = (\lambda_i \cap \eta) \setminus (\bar{\lambda}_i \cap \bar{\eta})$, e che φ, ψ sono suriettive per ipotesi. Sia $f \in H^0_\eta(X,F) \cap \bigoplus_{i=1}^{s} H^0_{\lambda_i}(X,F)$. Allora esiste $g \in \bigoplus_{i=1}^{s} H^0_{(\lambda_i \setminus \bar{\lambda}_i) \cap (\eta \setminus \bar{\eta})}(X,F) : \beta(f) = \varphi(g)$. Ma θ è suriettiva per (1.8) con $j = 1$. Perciò esiste $b \in \bigoplus_{i=1}^{s} H^0_{\lambda_i \cap \eta}(X,F) : g = \theta(b)$. Infine $\beta(f - \chi(b)) = \beta(f) - \varphi\theta(b) = 0$. Segue che esiste v: $f - \chi(b) = \alpha(v)$ e quindi anche esiste u: $f - \chi(b) = \alpha\psi(u) = \chi\tau(u)$. In conclusione: $f = \chi(b - \tau(u))$. ■

COROLLARIO 1.4: *Supponiamo che valgono* (1.1), (1.2) *e inoltre, in luogo di* (1.3), *valgono* (1.9) *e* (1.10). *Allora valgono* (1.4), (1.5), (1.6).

2. - EDGE OF THE WEDGE PER MICROFUNZIONI AL BORDO E DECOMPOSIZIONE DI SS_Ω

Sia $M \cong \mathbb{R}^n$, $X \cong \mathbb{C}^n$, $\Omega \subset M$ un aperto C^∞-diffeomorfo ad un convesso, $\mathcal{O}_X$ il fascio delle funzioni olomorfe, $or_{M/X}$ il fascio di orientazione relativa di M in X. Considereremo il complesso di Schapira (cf. [S]):

$$\mathcal{C}_{\Omega|X} = \mu\,\mathrm{hom}\,(Z_\Omega, \mathcal{O}_X) \otimes or_{M/X}[n]. \tag{2.1}$$

Ricordiamo che:

$$\pi_*(\mathcal{C}_{\Omega|X}) = \pi_*((\mathcal{C}_{\Omega|X})_{T_\Omega^* X}) = \Gamma_\Omega(\mathcal{B}_M), \tag{2.2}$$

ove $\mathcal{B}_M$ denota il fascio delle iperfunzioni di Sato in M. Sia $x_0 \in \partial\Omega$ e sia Λ la famiglia dei coni convessi chiusi propri $\lambda \subset T_M^* X$ tali che $\pi(\lambda)$ sia un intorno di x_0 in $\overline{\Omega}$. Ricordiamo da [Z] ce si ha:

$$\mathcal{H}_\lambda^j((\mathcal{C}_{\Omega|X})_{T_\Omega^* X})_{x_0} = \begin{cases} 0 & \text{per } j \neq 0, \\ \varinjlim\limits_{U} \mathcal{O}_X(U) & \text{per } j = 0, \end{cases} \tag{2.3}$$

ove U descrive la famiglia degli Ω-tuboidi (di Stein) di X a profilo $\gamma = \mathrm{int}\,\lambda^{\infty}$. Poniamo ora $\bar{\lambda} = \lambda \cap \pi^{-1}(\partial\Omega) \cup \overline{\Omega} \underset{X}{\times} T_X^* X$, (e analogamente definiamo $\bar{\eta}$). Osserviamo che (2.3) implica (1.1) e (1.2) per $F = (\mathcal{C}_{\Omega|X})_{T_\Omega^* X}$. In luogo di (1.3) proviamo ora (1.9), (1.10). Osserviamo che:

$$\lambda_i \setminus \bar{\lambda}_i = \lambda_i \cap \pi^{-1}(\Omega) \quad \text{e} \quad \eta_i \setminus \bar{\eta}_i = \eta_i \cap \pi^{-1}(\Omega).$$

Perciò (1.10) è una conseguenza dell«Edge of the wedge» classico (cioè per microfunzioni in $\mathcal{C}_{M|X}$). Proviamo ora

PROPOSIZIONE 2.1: *Risulta*

$$H_{\bar{\lambda}}^0(T_M^* X, (C_{\Omega|X})_{T_\Omega^* X}) \cap \bigoplus_{i=1}^{s} H_{\lambda_i}^0(T_M^* X, (C_{\Omega|X})_{T_\Omega^* X}) \leftarrow \bigoplus_{i=1}^{s} H_{\lambda_i \cap \bar{\eta}}^0(T_M^* X, (\mathcal{C}_{\Omega|X})_{T_\Omega^* X})$$

(*cf.* (1.9)).

DIM: Sia $s = 1$ e sia $f \in \mathcal{O}_X(U_i)$ $i = 1, 2$ con U_1 (rispettivamente U_2) Ω-tuboide a profilo $\mathrm{int}\,\bar{\eta}^{\infty}$ (rispettivamente $\mathrm{int}\,\bar{\lambda}^{\infty}$). Osserviamo che $\mathrm{int}\,\bar{\eta}^{\infty}$, $\mathrm{int}\,\bar{\lambda}^{\infty}$ contengono $\Omega \underset{M}{\times} T_M X$ in un intorno di x_0 e quindi in particolare $f \in \mathcal{A}(\Omega)_{x_0}$. Denotiamo con W (rispettivamente $\bar{W}$) gli Ω-tuboidi a profilo $\mathrm{int}\,\bar{\eta}^{\infty} \cup \mathrm{int}\,\bar{\lambda}^{\infty}$ (rispettivamente

$\widehat{\operatorname{int}\overline{\gamma}_i^{\mathrm{int}} \cup \operatorname{int}\overline{\lambda}^{\mathrm{int}}}$) in un intorno di x_0 (ove «$\widehat{\ }$» indica l'inviluppo convesso). La mappa

$$\lim_{\overrightarrow{W}} \mathcal{O}_X(\widehat{W}) \xrightarrow{\sim} \lim_{\overrightarrow{W}} \mathcal{O}_X(W), \tag{2.4}$$

è un isomorfismo. Infatti sia $f \in \mathcal{O}_X(W)$; allora $\forall \Gamma_1 \subset\subset \operatorname{int}\overline{\gamma}_i^{\mathrm{int}}$, $\Gamma_2 \subset\subset \operatorname{int}\overline{\lambda}^{\mathrm{int}}$, esiste ε:

$$f \in \mathcal{O}_X(\{x + iy : x \in \Omega,\ y \in \Gamma_1 \cup \Gamma_2,\ |y| < \varepsilon \operatorname{dist}(x, \partial\Omega)\}) \cap \mathcal{A}(\Omega).$$

Ma allora $\forall t \ll 1$

$$f \in \mathcal{O}_X(\{x + iy : x \in \Omega,\ \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) < t,\ y \in \Gamma_1 \cup \Gamma_2,\ |y| < \varepsilon t\})$$

e quindi per [K]

$$f \in \mathcal{O}_X(\{x + iy : x \in \Omega,\ \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) < t(1 + 3\varepsilon),\ y \in \overline{\Gamma_1 \cup \Gamma_2},\ |y| < c(4/5)\varepsilon t\}),$$

con $c = \sqrt{1 - (\inf(v_1, v_2))^2}$ per v_1, v_2 in Γ_1, Γ_2 rispettivamente.

Osserviamo che

$$\bigcup_t \left(\left\{x + iy : x \in \Omega \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) > t(1 + 3\varepsilon),\ y \in \overline{\Gamma_1 \cup \Gamma_2},\ |y| < c\frac{4}{5}\varepsilon t\right\}\right) \supset$$

$$\supset \left\{x + iy : x \in \Omega,\ y \in \overline{\Gamma_1 \cup \Gamma_2},\ |y| < c\frac{4\varepsilon}{5(1 + 3\varepsilon)} \operatorname{dist}(x, \partial\Omega)\right\}.$$

Segue $f \in \mathcal{O}_X(\widehat{W}) \subset H^0_{S \cap \Gamma}(T^*_M X, (\mathcal{C}_{\Omega|X})_{T^*_\Omega X})$. Sia ora $s > 1$. La dimostrazione è analoga pur di usare oltre alla (2.4):

$$\lim_{\overrightarrow{\varepsilon}} H^j_{\Omega + \varepsilon\Gamma}(W_\varepsilon, \mathcal{O}_X) = 0 \qquad \forall j \neq n$$

per ogni cono chiuso convesso Γ e per W_ε variante nella famiglia degli intorni complessi conici di Ω in X $(W_\varepsilon = \{x + iy : x \in \Omega,\ |y| < \varepsilon \operatorname{dist}(x, \partial\Omega)\})$ (cf. [L], [M]). ■

In base alla Proposizione 2.1, il complesso $F = (\mathcal{C}_{\Omega|X})_{T^*_\Omega X}$ soddisfa pertanto la (1.3') (mentre le (1.1) e (1.2) seguono immediatamente dalla (2.3)). Valgono quindi le conclusioni della Proposizione 1.1. In particolare:

$$H^0_{\bigcup_{i=1}^s S_i}(T^*_M X, (\mathcal{C}_{\Omega|X})_{T^*_\Omega X}) = \frac{\bigoplus_{i=1}^s H^0_{S_i}(T^*_M X, (\mathcal{C}_{\Omega|X})_{T^*_\Omega X})}{\bigoplus_{i,j=1}^s H^0_{S_i \cap S_j}(T^*_M X, (\mathcal{C}_{\Omega|X})_{T^*_\Omega X})}. \tag{2.5}$$

Definiamo ora $SS_\Omega(f)$, per $f \in \Gamma_\Omega(\beta_M)$, come segue: un punto $(x_0, i\eta_0)$ di $\overline{\Omega} \underset{M}{\times} T^*_M X$ non appartiene a $SS_\Omega(f)$ se e solo se $f = \sum_{j=1}^n b(F_j)$ con $F_j \in \mathcal{O}_X(U_j)$ ove gli U_j sono Ω-tuboidi a profilo $\gamma_j = \overline{\Omega} \times \Gamma_j$ con $\eta_0 \notin \Gamma_j^{\mathrm{int}}$.

Assumeremo d'ora in poi:

(2.6) $\qquad (\mathcal{C}_{\Omega|X})_{T^*_\Omega X}$ concentrato in grado 0.

Teorema 2.2: *Sia $f \in \Gamma_\Omega(\beta_M)_{x_0}$, e sia $\bigcup_i \lambda_i$ un ricoprimento di $SS_\Omega(f)$ mediante coni convessi chiusi propri tali che $\pi(\lambda_i)$ sono intorni di $\overline{\Omega}$ $\forall i$. Allora si possono trovare $f_i \in \Gamma_\Omega(\beta_M)_{x_0}$:*

$$f = \sum_{i=1}^{n} f_i, \qquad SS_\Omega(f) \subset \lambda_i.$$

Inoltre la decomposizione è unica modulo la relazione: «$\sum_{i=1}^{n} f_i \sim \sum_{i=1}^{n} g_i$» se e solo se $f_i - g_i = \sum b_{ij}$, con $SS_\Omega(b_{ij}) \subset \lambda_i \cap \lambda_j$.

Dim: Per (2.6) si ha $f \in H^0_{\bigcup_{i=1}^{n}\lambda_i}(T^*_M X, (\mathcal{C}_{\Omega|X})_{T^*_\Omega X})$. La conclusione segue allora da (2.5). ■

Osserviamo ora che abbiamo una mappa canonica

(2.7) $\qquad \varkappa: \pi^{-1}\Gamma_\Omega(\beta_M) \to (\mathcal{C}_{\Omega|X})_{T^*_\Omega X}.$

Usando (2.6) e il Teorema 2.2 otteniamo quindi

Corollario 2.3: (i) *Vale*

$$SS_\Omega(f) = \operatorname{supp} \varkappa(f)) \qquad \forall f \in \Gamma_\Omega(\beta_M)_{x_0}.$$

(ii) *In particolare $SS_\Omega(f) \subset \lambda$ se e solo se $f \in \varinjlim \mathcal{O}_X(U)$ ove U descrive la famiglia degli Ω-tuboidi a profilo $\gamma = \operatorname{int} \lambda^\infty$.*

BIBLIOGRAFIA

[B-I] J. Bros - D. Iagolnitzer, *Tuboids dans C^n et generalisation d'un théorème de Cartan et Grauert*, Ann. Inst. Fourier Grenoble, 26 (1976).

[K] H. Komatsu, *A local version of Bochner's tube theorem*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect. 1A, 19 (1972).

[L] J. M. Lieutenant, *Microlocalization at the boundary of convex sets*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect. IA, Math., 33 (1986).

[M] A. Martineau, *Le «Edge of the wedge» théorème en théorie des hyperfonctions de Sato*, Proceedings of the International Conference on Functional Analysis and Related Topics, Tokyo (Aprile 1969).

[S] P. Schapira, *Front d'onde analytique au bord II*, Sém. E.D.P. Ecole Polyt. Exp., XIII (1986).

[Z] G. Zampieri, *Tuboids of C^n with cone property and domains of holomorphy*, Proc. Japan, Acad., 67 A(6) (1991).

Direttore responsabile: Prof. A. Ballio - Autorizz. Trib. di Roma n. 7269 dell'8-12-1959
«Monograf» - Via Collamarini, 5 - Bologna