Rendiconti
Accademia Nazionale delle Scienze detta dei XL
Memorie di Matematica
110° (1992), Vol. XVI, fasc. 4, pagg. 43-47

ENRICO JABARA (*)

Sui gruppi in cui la commutatività è una relazione di equivalenza (**)

RIASSUNTO. — Un gruppo G si dice un &-gruppo se in $G \setminus \{1\}$ la commutatività è una relazione di equivalenza. In questa nota caratterizziamo gli &-gruppi finiti dimostrando in particolare che se G non è risolubile allora G è semplice ed isomorfo a $PSL(2, 2^n)$ per qualche $n \geq 2$.

On Groups where the Commutativity is an Equivalence Relation

SUMMARY. — A group G is called an &-group if in $G \setminus \{1\}$ commutativity is an equivalence relation. In this note we characterize finite &-group showing in particular that if G is not solvable then G is simple and isomorphic to $PSL(2, 2^n)$ for some $n \geq 2$.

Se G è un gruppo si verifica immediatamente che la relazione di permutabilità tra gli elementi non identici di G (cioè $[x, y] = 1$ con $x, y \in G^* = G \setminus \{1\}$) gode della proprietà riflessiva e simmetrica. Se tale relazione gode anche della proprietà transitiva (e quindi diviene una relazione di equivalenza) scriveremo brevemente $G \in \&$.

Nel seguito caratterizzeremo i gruppi finiti appartenenti ad & dimostrando che, se $G \in \&$ è risolubile, esso risulta abeliano oppure di Frobenius (con nucleo e complemento abeliani) mentre, se $G \in \&$ non è risolubile, allora G è necessariamente semplice ed isomorfo a $PSL(2, 2^n)$ per qualche $n \geq 2$.

Tutti i gruppi considerati sono finiti; la notazione usata è quella di [1], in particolare $F(G)$ denota il sottogruppo di Fitting del gruppo G.

Per la struttura dei gruppi di Frobenius rimandiamo al Teorema 10.3.1 di [1] che spesso nel seguito verrà usato senza un richiamo specifico.

LEMMA 1: *Sia $G \in \&$. Valgono allora le seguenti proprietà:*

1) *Se $H \leq G$ allora $H \in \&$.*

2) *Se $Z(G) \neq 1$ allora G è abeliano.*

3) *Tutti i sottogruppi di Sylow di G sono abeliani.*

(*) Indirizzo dell'A.: Dorsoduro, 3647; I-30125 Venezia.
(**) Memoria presentata il 18 dicembre 1991 da Giuseppe Scorza Dragoni, uno dei XL.

ISSN-0392-4106

4) *Se G è un prodotto diretto di due (o più) sottogruppi non banali allora G è abeliano.*

5) *Se $H \neq 1$ è un sottogruppo abeliano di G allora $C_G(H)$ è un sottogruppo di Hall di G abeliano massimale.*

6) *I centralizzanti di cui al punto precedente hanno, se sono distinti, intersezione identica.*

7) *Se G è un gruppo di Frobenius allora G risulta metabeliano con complemento ciclico.*

Dimostrazione: I punti 1)-4) sono facilmente verificabili.

Per dimostrare il punto 5) consideriamo $C = C_G(H)$ che è abeliano per 2) e risulta essere ovviamente abeliano massimale per la definizione di &.

Sia poi P un sottogruppo di Sylow di G con $P \cap C \neq 1$ e sia, per assurdo, $x \in P$ e $x \notin C$ con $x \neq 1$; poichè P e C sono abeliani si ha che $[x, P \cap C] = 1 = [P \cap C, C]$ da cui $[x, C] = 1$ contraddicendo la massimalità di C.

6) Sia $C_1 = C_G(H_1)$ e $C_2 = C_G(H_2)$ con H_1 e H_2 sottogruppi abeliani di G e supponiamo $C_1 \neq C_2$. Se, per assurdo, esistesse $x \in C_1 \cap C_2$ con $x \neq 1$ allora C_1 e C_2 commuterebbero elemento per elemento e $\langle C_1, C_2 \rangle$ sarebbe un sottogruppo abeliano di G contraddicendo la massimalità di C_1 e C_2.

7) Sia N il nucleo e K un complemento (di Frobenius) di G.

Poichè N è nilpotente esso risulta essere, per 2), abeliano.

Tutti i sottogruppi di Sylow di K sono abeliani (3) e quindi ciclici, in particolare K è risolubile (Teorema 7.6.2 di [1]).

Siano P e Q due sottogruppi di Sylow di G di ordine p^a e q^b rispettivamente (con p e q primi distinti) appartenenti ad un sistema di Sylow (nel senso precisato dal Teorema 6.4.3 di [1]) di K. Poichè ogni sottogruppo di K di ordine pq è abeliano, per la transitività discende che anche PQ (ammettendo un sottogruppo di ordine pq) è abeliano.

Allora K stesso è abeliano e quindi, per il citato Teorema 10.3.1 di [1], ciclico.

Poichè $G = NK$ si è anche dimostrato che G è metabeliano. ■

Le seguenti due proposizioni forniscono semplici caratterizzazioni dei gruppi appartenenti ad &.

Proposizione 1: *$G \in$ & se e solo se per ogni $x \in G^*$, $C_G(x)$ risulta essere abeliano (massimale).*

Dimostrazione: Se $G \in$ & dal punto 5) del lemma precedente discende che per ogni $x \in G^*$, $C_G(x)$ è abeliano (massimale).

Viceversa siano $x, y, z \in G^*$; se $[x, y] = 1 = [y, z]$ allora $x, z \in C_G(y)$ che è abeliano e dunque $[x, z] = 1$. ■

Ricordiamo che si dice partizione di un gruppo G un insieme Σ di sottogruppi di G tale che ogni elemento $x \neq 1$ di G sia contenuto in uno ed un solo sottogruppo H appartenente a Σ. La partizione si dice banale se $\Sigma = \{G\}$.

Per ulteriori notizie sulle partizioni nei gruppi si rimanda a [2] ed all'ampia bibliografia ivi citata; osserviamo soltanto che un gruppo abeliano il cui ordine sia divisibile per almeno due primi non ammette partizioni non banali (la dimostrazione è elementare).

PROPOSIZIONE 2: *$G \in \mathcal{E}$ se e solo se G ammette una partizione (eventualmente banale) costituita da sottogruppi di Hall abeliani.*

DIMOSTRAZIONE: Se $G \in \mathcal{E}$ l'asserto discende dai punti 5) e 6) del Lemma 1.

Viceversa sia Σ una partizione del gruppo G costituita da sottogruppi di Hall abeliani e dimostriamo che $G \in \mathcal{E}$.

Fissato $x \in G^*$ sia H l'elemento di Σ che lo contiene.

Posto $C = C_G(x)$ è ovvio che H è contenuto in C; se mostriamo che $C = H$ possiamo (per l'arbitrarietà di x) concludere in base alla Proposizione 1.

Supponiamo per assurdo che $C \neq H$, poichè H è di Hall esiste un elemento $y \in C$ di ordine coprimo con quello di H. Allora $\langle x, y \rangle$ sarebbe un gruppo abeliano il cui ordine è divisibile per almeno due numeri primi e che ammette la partizione non banale indotta da Σ: contraddizione. ■

Dal Lemma 1 discende che la partizione di cui alla Proposizione 2 è costituita da (tutti i) sottogruppi abeliani massimali di G.

Inoltre, osservando che una partizione di Hall di G induce una partizione (eventualmente banale) su ogni quoziente di G, si può dimostrare che se $G \in \mathcal{E}$ allora ogni quoziente di G appartiene a $\mathcal{E}$.

Osserviamo infine che, utilizzando la classificazione dei gruppi che ammettono una partizione (si veda [2]), è possibile pervenire ai risultati enunciati all'inizio; preferiamo invece fornire una dimostrazione diretta delle nostre tesi.

LEMMA 2: *Sia $G \in \mathcal{E}$ risolubile. Allora o G è abeliano o G è di Frobenius.*

DIMOSTRAZIONE: Il sottogruppo di Fitting $F(G) = N$ è abeliano e, poichè G è risolubile, $N \neq 1$.

Se $N = G$ allora G è abeliano; altrimenti sia x un elemento di G non appartenente a N. Se $C_N(x) \neq 1$ allora $[N, x] = 1$ e $x \in C_G(N)$ ma, per il Teorema 6.1.3 di [1], $C_G(N) \leq N$: assurdo. Quindi tutti gli elementi di G che non appartengono a N agiscono per coniugio su N senza punti fissi: ne discende che G è di Frobenius (con nucleo N). ■

La dimostrazione del lemma precedente suggerisce il:

COROLLARIO: *Se $G \in \mathcal{E}$ possiede un sottogruppo normale risolubile non identico allora G stesso è risolubile.*

Dimostrazione: Sia $H \neq 1$ un sottogruppo normale e risolubile di G; allora $F(H) \neq 1$ e $C_G(F(H)) = N$ è un sottogruppo abeliano massimale normale in G.

Ripetendo, con questa nuova definizione di N, la dimostrazione del lemma precedente, si deduce che G è di Frobenius.

Il punto 7) del Lemma 1 porge allora la conclusione. ■

Per i nostri scopi è essenziale il seguente

Lemma 3: *Sia $G \in \mathcal{E}$ non risolubile. Allora G è semplice.*

Dimostrazione: Sia G un controesempio di ordine minimo e sia N un suo sottogruppo normale minimale. Per il corollario precedente N non può essere risolubile: si tratta di un gruppo non abeliano caratteristicamente semplice (Teorema 2.1.5 di [1]) e quindi, per 4) del Lemma 1, semplice.

Sia x un p-elemento di $G \setminus N$ con $x^p \in N$ (p primo); per la minimalità di G non è restrittivo supporre $G = N\langle x \rangle$. Sia $C = C_G(x)$, P un sottogruppo di Sylow di C — e quindi di G per il punto 5) del Lemma 1 — e $K = N_G(P)$; poichè C è abeliano è evidente che $x \in P$, inoltre si ha che $K \geq C \geq P$.

Poichè K possiede un sottogruppo normale risolubile esso stesso è, per il corollario precedente, risolubile: per il Lemma 2 si possono allora distinguere due casi.

I) K è abeliano. In tal caso G ammette un p-complemento normale (Teorema 7.4.3. di [1]) e dunque $x^p = 1$ e $P = \langle x \rangle$. Sia Q un q-sottogruppo di Sylow di C (e di G) con $q \neq p$; $N_G(Q)$ non può essere abeliano perchè altrimenti G ed N ammetterebbero un q-complemento normale. Ne discende che $N_G(Q)$ è di Frobenius e poichè $x \in C_G(Q)$, il sottogruppo P è contenuto nel nucleo di Frobenius di $N_G(Q)$. Sia allora $y \in G$ un elemento del complemento di Frobenius di $N_G(Q)$; si ha che y normalizza P e quindi $[P, y] \leq N \cap P = 1$ il che è assurdo. Ma allora $N \cap C = 1$ e x agisce per coniugio su N senza punti fissi. Per il Teorema 10.2.1 di [1] N sarebbe nilpotente, contraddicendo le ipotesi.

II) K è di Frobenius con nucleo C. Se $y \in N$ è un elemento di un complemento di Frobenius di K allora, come nel punto precedente, ciò porgerebbe l'assurdo $[P, y] \leq N \cap P = 1$.

Se ne conclude che non esiste nessun $x \in G$ non appartenente ad N e quindi $G = N$ è un gruppo semplice. ■

Teorema: *$G \in \mathcal{E}$ se e solo se G appartiene ad una delle seguenti tre classi:*

1a) G è abeliano;

2a) G è di Frobenius come nel punto 7) del Lemma 1;

3a) G è isomorfo a $PSL(2, 2^n)$ con $n \geq 2$.

Il numero delle classi di equivalenza in cui si ripartisce G essendo rispettivamente:

1b) una;

2b) $|F(G)| + 1$;

3b) $2^{2n} + 2^n + 1$.

Dimostrazione: Se G è risolubile allora esso è abeliano oppure di Frobenius ed in questo caso la sua struttura è quella descritta dal punto 7) del Lemma 1.

Se G non è risolubile esso risulta, per il Lemma 4, semplice. Si tratta dunque di un CN-gruppo semplice i cui sottogruppi di Sylow sono abeliani, ma allora per il Teorema 14.4.1 di [1] esso risulta essere isomorfo a $PSL(2, 2^n)$ per qualche $n \geq 2$.

Veniamo alla dimostrazione della seconda parte dell'asserto.

Il punto 1*b*) risulta evidente.

Per quanto riguarda il punto 2*b*) se $G = NC$ è di Frobenius con nucleo N e complemento C si ha $N = F(G)$ e, poichè $N_G(C) = C$, il numero dei coniugati di C in G risulta essere pari a $|F(G)|$. Poichè in un gruppo di Frobenius il nucleo ed i coniugati del complemento formano un partizione (che, nel nostro caso, è costituita da sottogruppi di Hall abeliani massimali), ne risulta che essa è composta da $|F(G)| + 1$ sottogruppi.

Consideriamo ora il terzo caso: $G = PSL(2, 2^n)$ con $n \geq 2$.

Se S è un 2-sottogruppo di Sylow di G allora S è abeliano elementare e $|S| = 2^n$ (Lemma 15.1.1 di [1]) inoltre G contiene due sottogruppi ciclici A e B con $|A| = 2^n - 1$ e $|B| = 2^n + 1$ (Teorema 2.8.3 di [1]), $|N_G(S)| = 2^n(2^n - 1)$, $|N_G(A)| = 2(2^n - 1)$ e $|N_G(B)| = 2(2^n + 1)$.

Ricordando che l'ordine di G è $(2^n - 1)2^n(2^n + 1)$ risulta che si hanno $2^n + 1$ coniugati di S, $(2^n + 1)2^{n-1}$ coniugati di A e $(2^n - 1)2^{n-1}$ coniugati di B che concorrono a formare una partizione di G (costituita da sottogruppi di Hall abeliani massimali) composta da $2^{2n} + 2^n + 1$ sottogruppi. ■

BIBLIOGRAFIA

[1] D. Gorenstein, *Finite Groups*, Harper-Row, New York (1968).
[2] G. Zappa, *Fondamenti di teoria dei gruppi II*, Cremonese, Roma (1970).