ALBERTO BENEDETTI - FRANCO DI CATALDO - GIANNI MICHELON (*)

Aspetti storici rilevanti della teoria cinetica dei gas: un approccio ipertestuale (**)

Summary - This paper points out a set of MS-DOS simulation softwares about the kinetic theory of gases. The paper presents many references of the historical approach to the matter (Ballot, Clausius, Boltzmann, Maxwell and Loschmidt). The historical references and the consequent simulation softwares are organized in hypertextual form, i.e. the various parts are connected by means of "links". The goal of the work is to design a new teaching tool, i.e., the student can select a personal learning track.

Ipertesti, simulazioni e didattica

L'esigenza dalla quale siamo partiti è scaturita dall'intento di elaborare uno strumento d'integrazione tra i diversi ambienti attraverso i quali passa il percorso didattico che stiamo delineando. L'utilizzo dello strumento ipertestuale ci è sembrato particolarmente adatto, anche se in questa fase può apparire sovradimensionato, in rapporto alla limitata quantità di documentazione da gestire. Il software di cui ci siamo serviti, Hyperideal,[1] si è mostrato adeguato alle esigenze che in questa fase avevamo, in considerazione anche della strumentazione limitata di cui disponevamo. Lo stesso modulo sperimentale elaborato è facilmente utilizzabile sulla maggior parte dei computer in dotazione delle scuole.[2]

Il carattere sperimentale del modulo costruito ha consentito di evidenziare le potenzialità di utilizzazione dello strumento ipermediale. Ne è emersa la prospettiva di realizzazione di un lavoro molto più ampio, in cui si possano far «espandere», mediante l'ulteriore elaborazione di particolari insiemi di nodi tematici, aspetti concettuali che qui vengono affrontati a livello molto alto (si veda il caso del

(*) GDS - Gruppo di Didattica delle Scienze, Università di Venezia.

(**) Relazione presentata al IV Convegno Nazionale di «Storia e Fondamenti della Chimica» (Venezia, 7-9 novembre 1991).

[1] *Hyperideal, Ambiente integrato per lo sviluppo di applicazioni ipertestuali.* Versione 1.0 per personal MS-DOS, di Corrado Ermacora, ed. McGraw-Hill Libri Italia, Milano, 1990.

[2] La dotazione minima richiesta è un computer PC-IBM e compatibili, sistema operativo MS-DOS, monitor a colori, scheda grafica CGA.

concetto di entropia, irreversibilità, ecc.), e la cui comprensione dà per scontata una vasta gamma di conoscenze prerequisite.

In sostanza è la filosofia ipertestuale che ci è sembrata particolarmente adatta allo sviluppo di uno strumento d'integrazione capace di articolare i contenuti attraverso reti di relazioni percorribili in modo relativamente autonomo.[5] Nel nostro caso non si tratta solo del superamento dell'unilinearità testuale, che dovrebbe riguardare l'esposizione storica e teorica, ma della creazione di un unico ambiente ipermediale nel quale interagiscono, attraverso possibili percorsi associativi, testi e attività «laboratoriali».

La simulazione, che nell'insegnamento della teoria cinetica dei gas fornisce didatticamente l'unico «laboratorio» ipotizzabile per la realizzazione di esperienze di carattere anche quantitativo, diviene in questo contesto il generatore di elementi matemagenici (generatori di apprendimento) con la possibilità di verificare, confutare, approfondire singole elaborazioni teoriche. In sostanza si tratta di cercare di fornire ulteriori strumenti per contribuire a dar concretezza a idee astratte, che nella trattazione iconica, dinamica e operativa superano la comunicazione esclusivamente verbale, sia che questa avvenga nel linguaggio comune o in quello formale della matematica. Al tempo stesso lo spirito laboratoriale di ricerca viene riprodotto anche in questo ambito di simulazione, nel quale è possibile formulare ipotesi, analizzare situazioni limite, valutare esiti di diversi «esperimenti», senza tuttavia dimenticare i limiti dell'ambiente di elaborazione dei dati riguardanti l'hardware di supporto ed il software stesso costruito.

Non si tratta solo di un abbinamento tra immagine ed idea, che può risultare particolarmente efficace nel caso del browser (cfr. fig. 1) per fissare la griglia d'insieme (bussola di orientamento per la navigazione) che tiene legati i singoli aspetti concettuali, ma tra dinamicità del «verificarsi di eventi» e del modificarsi dei parametri significativi che intervengono nell'interpretazione molecolare dei fenomeni termici.

Dal punto di vista della psicologia cognitiva si pone, nell'attività didattica, il problema di un'adeguata metodologia che recuperi il pieno significato della navigazione ipertestuale, evitando che l'allievo si disperda nella molteplicità dei percorsi possibili. Si tratta pertanto dell'esigenza di un effettivo superamento di un uso dell'ipertesto in forma di browsing, per sviluppare un atteggiamento riflessivo, pur nella soggettività delle piste di lavoro percorse. L'acquisizione stabile di alcuni concetti presuppone un contestuale intervento del docente che, nella regolazione esterna sappia utilizzare lo strumento ipertestuale per costruire un ambiente di potenziamento delle capacità di autoregolazione del discente.

Il saper mettere in relazione le diverse conoscenze acquisite lungo un percorso di apprendimento, il saper riconoscere la significatività dei risultati conseguiti, il saper organizzare in modo sistematico le diverse informazioni in forma comprensiva e integrata, il saper trovare stimoli motivazionali che contribuiscano ad alimentare la volontà di sviluppo e approfondimento di nuove conoscenze, sono i campi

[5] Si vedano sul tema: U. MARGIOTTA, *Ipertesti e scienze cognitive: modelli di competenza comunicativa*, di imminente pubblicazione sulla Rivista «Informatica, telematica e scuola», 1991 e G. ALESSANDRINI, *Il paradigma ipertestuale nella didattica*, in «Informatica oggi» n° 75, 1991.

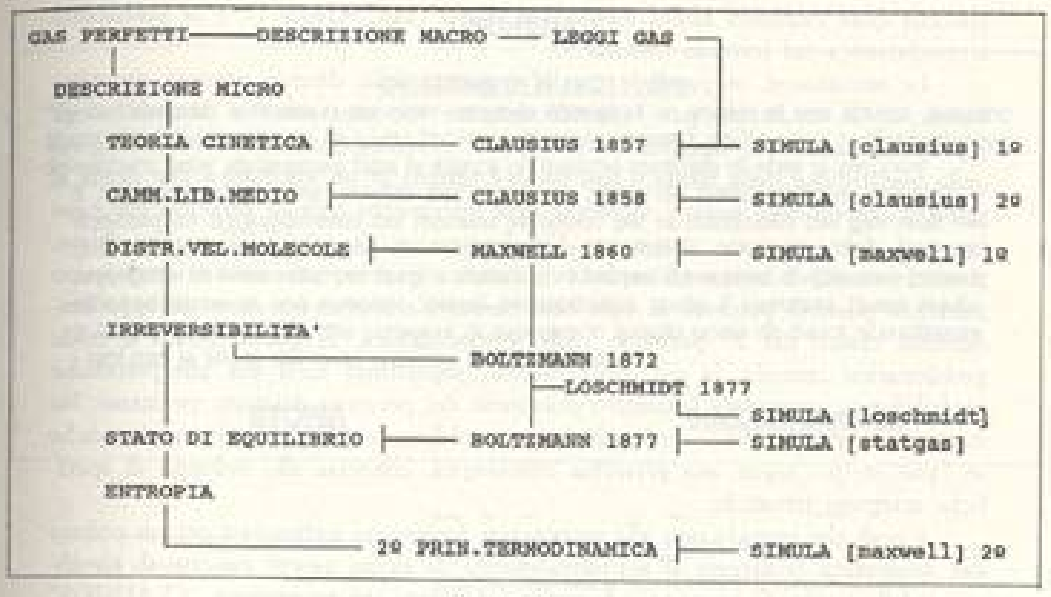


Fig. 1 - Browser.

concettuali più significativi in cui gestire gli ambiti cognitivi, affettivi e metacognitivi.[4]

Un sottile intreccio, dunque, tra intervento esterno e relativa autonomia dello studente nella graduale attivazione e regolazione dei processi interni di apprendimento, nella quale l'ipertesto fornisce un campo di sviluppo di aree operative personalizzate tra le molteplici possibili.

Percorso storico e ambienti «laboratoriali»

Scopo del lavoro è stato quindi l'elaborazione di uno strumento d'interfaccia di comunicazione con i programmi di simulazione sulla teoria cinetica dei gas, che fosse in grado di esplicitare in modo organico l'apparato storico-critico che è stato il supporto epistemologico di base nella produzione del software didattico. Possiamo affermare quindi che l'asse lungo il quale si articola la proposta didattica è di carattere storico (cfr. Browser, fig. 1) ed assume come riferimento le memorie sulla teoria cinetica di Clausius, Maxwell e Boltzmann. La non linearità dello sviluppo storico è evidenziata dalla presenza di confutazioni che rilevano la discordanza tra i risultati teorici e le situazioni sperimentali (obiezione di Ballot, 1858) o modellizzate (paradosso di Loschmidt, 1877). Da entrambe scaturiscono approfondimenti e aggiustamenti della teoria che danno luogo alla formulazione di nuovi

[4] M. Pellerey, *Ipertesti, psicologia cognitiva e didattica*, relazione al Convegno *Didamatica 1990*, Catania 2-3 maggio 1990.

concetti quali cammino libero medio, nel primo caso (Scheda 1), e di probabilità termodinamica nel secondo (Scheda 4).

Le simulazioni, in parallelo con la sequenza delle diverse citazioni riportate, forniscono lo strumento per l'approfondimento «sperimentale» e dinamico degli aspetti concettuali più significativi che via via, cronologicamente, e non, emergono dalla maturazione della teoria. Ogni nodo è fornito di un «bottone» che rinvia al possibile riferimento storico; viceversa ogni riferimento teorico presente nei passi riportati dalle memorie, attraverso l'evidenziazione di specifiche parole chiave, possiede corrispondenti nodi esplicativi. Tuttavia i riferimenti incrociati sviluppano numerosi possibili percorsi, in ogni caso tendenti a convergere verso un approfondimento critico del 2° principio della termodinamica. È questo infatti il nodo problematico centrale, la cui comprensione, soprattutto nella sua interpretazione probabilistica, costituisce l'obiettivo prioritario del percorso didattico ipotizzato. Ne consegue, pertanto, che i «links» hanno essenzialmente carattere referenziale, anche se l'asse storico segue una gerarchia cronologica, connessa allo sviluppo di specifiche questioni tematiche.

I nodi che introducono alla simulazione forniscono indicazioni per un utilizzo dei programmi finalizzato all'approfondimento di alcuni aspetti concettuali significativi della teoria. Si propone, ad esempio, l'utilizzo del programma "CLAUSIUS" per un primo approccio alla interpretazione microscopica di variabili macroscopiche, quali pressione e temperatura. Il riferimento storico in questo caso è costituito dalle memorie di Clausius del 1857, nelle quali si pongono le premesse epistemologiche della teoria cinetica. Un altro nodo, legato allo sviluppo storico e all'obiezione di Ballot del 1858, ripropone lo stesso programma per approfondire il significato del cammino libero medio molecolare e verificare «sperimentalmente», in termini statistici, i valori teorici calcolati. (Scheda 1)

Analogamente alla simulazione precedente, l'accesso al programma "MAXWELL" si può attuare mediante due nodi di collegamento, corrispondenti a due proposte di utilizzo della simulazione. Una consente di verificare lo sviluppo della distribuzione delle velocità molecolari, per effetto degli urti casuali molecolari, verso l'equilibrio, fornendo una sorta di «verifica» del significato del teorema-H. L'altra indica, operando con due gruppi di particelle con diversa assegnazione iniziale di energia cinetica, una possibile verifica del 2° principio della termodinamica osservando il progressivo livellamento dei corrispondenti valori di energia, con il graduale «riscaldamento» («raffreddamento») del gas più «freddo» («caldo»), per effetto degli urti casuali molecolari (cfr. Scheda 2). I riferimenti storici sono costituiti da citazioni significative sui temi affrontati, tratte dalle memorie di Maxwell (1860) e di Boltzmann (1872).

Ovviamente le proposte hanno un carattere puramente orientativo, rispetto agli aspetti concettuali sui quali si intende sviluppare la riflessione. Gli ambienti di simulazione sono comunque aperti anche ad altre possibili analisi dei fenomeni in rapporto alle esigenze che possono scaturire nel corso dello studio della teoria cinetica.[3]

[3] Per ulteriori dettagli sulle simulazioni e su aspetti storici epistemologici si vedano: A. Benedetti, F. Di Cataldo, *Teoria cinetica dei gas e teoria molecolare: considerazioni storico critiche e ricerca di nuovi strumenti didattici*, in «La formazione scientifica nella scuola secondaria superiore:

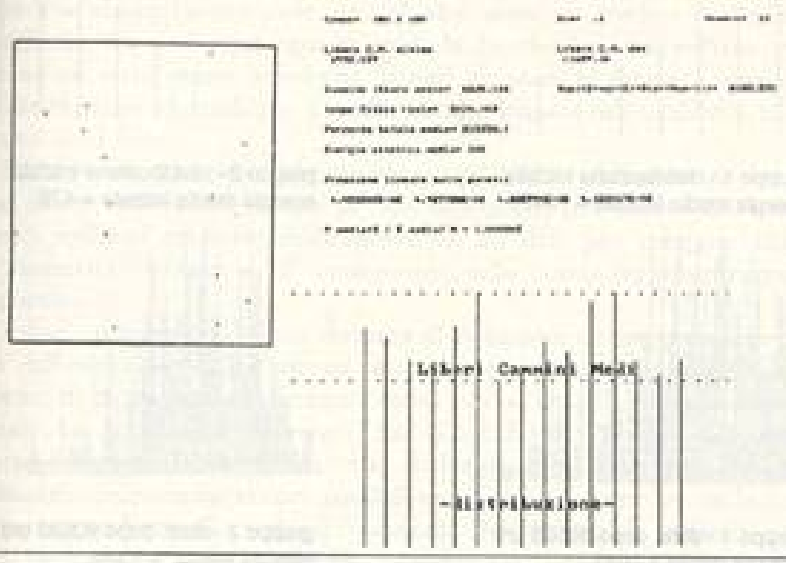
SCHEDA 1

OBIEZIONE DI BALLOT (1858)

"Se dell'idrogeno solforato o del cloro vengono liberati in un angolo di una stanza, passano alcuni minuti prima che se ne senta l'odore nell'angolo opposto, anche se le particelle del gas dovrebbero poter attraversare tutta la stanza un qualche centinaio di volte al secondo"

Il riconoscimento della validità dell'obiezione posta da Ballot, induce Clausius a ricercare un aggiustamento del modello introdotto per la trattazione dei gas reali nei quali le molecole, non essendo trascurabili le dimensioni molecolari, non possono proseguire in linea retta per lunghe distanze. L'immediata replica di Clausius porterà all'introduzione di una speciale ipotesi probabilistica quale il cammino libero medio (c.l.m.) di una molecola che consente di superare lo scoglio posto da Ballot riconciliando i fatti con la teoria del moto rettilineo delle molecole.

STORIA **SIMULA clausius**



CLAUSIUS 1858

"Se ora applichiamo i risultati (trovati sul cammino libero medio molecolare) al comportamento osservabile dall'esterno, di un gas in cui si assuma che non esiste altro moto complessivo oltre a quello molecolare, è facile convincersi che la teoria che spiega la forma espansiva dei gas non porta alla conclusione secondo cui due quantità di gas a contatto debbono mescolarsi rapidamente e violentemente: essa porta invece a concludere che solo un numero relativamente piccolo di atomi può giungere rapidamente a grandi distanze, mentre le quantità maggiori dei gas si mescolano gradualmente nelle zone relative alla superficie di contatto"

Clausius, traducendo la domanda carica di portata falsificante in un linguaggio teorico rinnovato, reinterpretava i dati sulla diffusione come base empirica a favore della teoria rinnovata e apriva vie sperimentali che, attraverso misure di c.l.m., avrebbero implicato valutazioni sempre più favorevoli all'ipotesi molecolare.

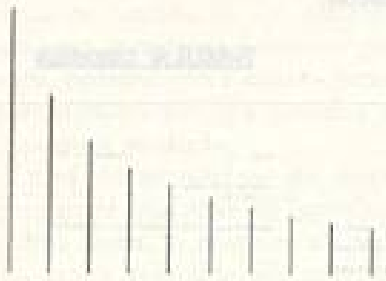
STORIA **SIMULA clausius**

SCHEDA 2

MAXWELL 1860

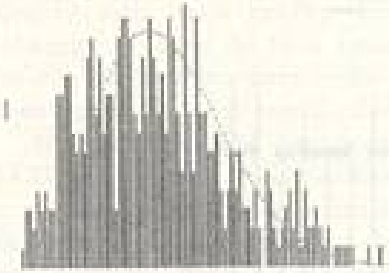
"Se un gran numero di particelle sferiche uguali sono in moto in un contenitore perfettamente elastico, hanno luogo collisioni tra le particelle, e le loro velocità sono alterate ad ogni collisione; cosicchè dopo un certo tempo la vis viva sarà divisa tra le particelle secondo una legge regolare e il numero medio delle particelle la cui velocità varia entro limiti assegnati, risulterà accertabile, sebbene la velocità di ciascuna particella cambi ad ogni collisione."

STORIA SIMULA maxwell

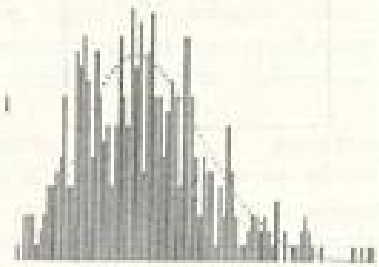


gruppo 1 - distribuzione iniziale
energia media iniziale = 14471

gruppo 2 - distribuzione iniziale
energia media iniziale = 472



gruppo 1 - distr. dopo 80525 urti
energia media = 7543



gruppo 2 - distr. dopo 80525 urti
energia media = 7300

BOLTZMANN 1872

Nella memoria "Studi ulteriori sull'equilibrio termico di un gas di molecole", Boltzmann svolge il tentativo più articolato di ricavare l'evoluzione irreversibile dello stato di un gas, come effetto risultante dal complesso di urti molecolari.

In questo lavoro lo scienziato austriaco persegue i seguenti obiettivi:

- ottenere un'equazione di variazione temporale della funzione di distribuzione in conseguenza degli urti molecolari;
- dimostrare che la funzione di distribuzione tende sempre e comunque con il tempo alla distribuzione di Maxwell (teorema H)

Il teorema H sembra realizzare una vera e propria dimostrazione su base microscopico-molecolare della seconda legge della termodinamica. Come nei lavori di Maxwell anche questo teorema si fonda sull'assunzione della microreversibilità e sull'ipotesi del caos molecolare.

STORIA SIMULA maxwell

Il programma di simulazione «LOSCHM», diversamente, possiede un carattere puramente dimostrativo per realizzare e verificare concretamente l'obiezione di Loschmidt alla rigida determinazione temporale indotta dal teorema-H nella versione del 1872. La simulazione propone il modello descritto da Loschmidt, mostrando come l'evoluzione di un sistema tendente ad allontanarsi da una situazione «ordinata» iniziale possa essere rovesciata, per effetto di una inversione istantanea delle velocità molecolari, complessione estremamente improbabile, ma possibile tra le molteplici realizzabili, che conduce il sistema a riassumere la configurazione iniziale.

Ciò renderà manifesto il paradosso esistente nell'interpretazione dell'irreversibilità macroscopica in termini di collisioni molecolari reversibili, evidenziando il carattere non rigidamente deterministico dell'evoluzione del sistema verso l'equilibrio.

Nella simulazione riportata nella Scheda 3 Loschmidt descrive un modellino di gas assolutamente lontano dall'equilibrio: alcuni atomi fermi sul fondo del recipiente ed un solo atomo istantaneamente fermo sulla parete superiore del recipiente: lasciato a se stesso, l'atomo cade, urta gli altri atomi sul fondo e l'energia cinetica si distribuisce tra tutti, raggiungendo presto la distribuzione maxwelliana; ma invertendo ad un certo istante le velocità di tutti gli atomi si ritornerà inevitabilmente dalla distribuzione di equilibrio a quella iniziale, lontana dall'equilibrio, in cui tutti gli atomi sono fermi.

È interessante osservare che emergono qui i limiti dell'ambiente nel quale si opera; infatti un numero elevato di urti molecolari, per effetto dei troncamenti numerici realizzati nel corso dell'elaborazione dei dati, può condurre alla perdita della simmetria numerica e, di conseguenza, nella nostra rappresentazione, anche «temporale».

Infine, collegato con questa necessità di sviluppare un'interpretazione probabilistica dell'evoluzione di un sistema, è stata inserita una simulazione relativa alla diffusione di un gas in un contenitore diviso in due settori. A questo scopo è stato utilizzato un programma elaborato dal G.N.D.F. di Palermo, nell'ambito del Progetto strategico T.I.D. (CNR),[6] che evidenzia la tendenza allo sviluppo della distribuzione delle configurazioni possibili verso una situazione in cui la configurazione corrispondente allo stato di uniformità del numero di particelle tra i due settori, risulta essere la più probabile. L'aspetto più rilevante che viene evidenziato è il fatto che gli stati (macrostati) più probabili all'equilibrio sono quelli realizzati da un maggior numero di configurazioni microscopiche, nell'ipotesi che tutte le configurazioni siano ugualmente probabili.

Al di là dell'immediata costatazione qualitativa dello sviluppo stesso delle distribuzioni ottenute, l'approfondimento quantitativo sul numero delle possibili

introduzione alla storia della chimica», Atti del Convegno (Venezia, 20-22 novembre 1986), Gruppo di Didattica delle Scienze, Università di Venezia; Atti del Seminario, *Aspetti storico epistemologici della scienza ottocentesca: genesi e sviluppo della teoria atomistico - molecolare*, Venezia, 8-9 marzo 1988, Gruppo di Didattica delle Scienze, Università di Venezia; A. Benedetti, F. Di Cataldo, *Microfenomeni e didattica*, in «Epsilon» n° 4, ed. Patavia, 1989.

[6] R.M. Speranzio, R. Madonia, G. Tabi, *Star-gas: analisi statistica di un gas: andamento all'equilibrio*, Progetto Strategico C.N.R. «Tecnologie ed innovazioni Didattiche», Unità del G.N.D.F. di Palermo (Università di Palermo), distribuito dalla Società Italiana di Fisica (Bologna).

SCHEDA 3

LOSCHMIDT 1877

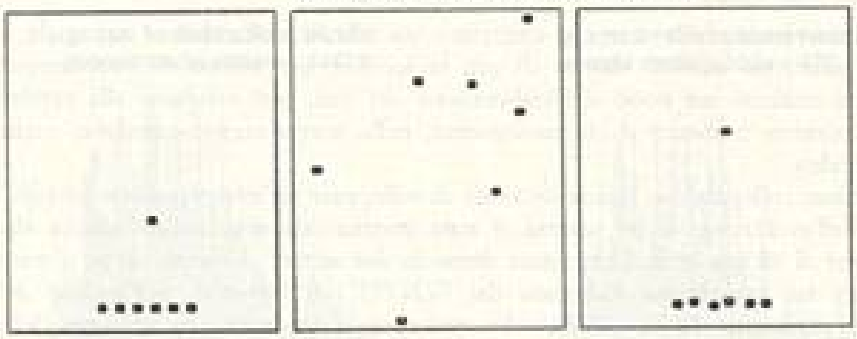
Loschmidt descrive un modellino di gas assolutamente lontano dall'equilibrio, alcuni atomi fermi sul fondo del recipiente ed un solo atomo istantaneamente fermo sulla parete superiore del recipiente: lasciato a se stesso, l'atomo cade, urta gli altri atomi sul fondo e l'energia cinetica si distribuisce tra tutti raggiungendo presto la distribuzione maxwelliana all'equilibrio; ma invertendo ad un certo istante le velocità di tutti gli atomi, si ritornerà inevitabilmente dalla distribuzione di equilibrio a quella iniziale, lontana dall'equilibrio, in cui tutti gli atomi sono fermi.

Con questa critica acuta Loschmidt centra una zona tuttora oscura nella comprensione della questione "che cos'è l'irreversibilità?" e più puntualmente porta alle estreme conseguenze il paradosso insito nell'affermazione che attraverso delle collisioni molecolari reversibili, un sistema macroscopico, ad esempio un gas, si evolve, secondo un processo irreversibile, verso l'equilibrio.

Il bersaglio centrale della critica è tuttavia il teorema-H.

SIMULA loschmidt STORIA

SITUAZIONI nella SIMULAZIONE



iniziale dopo molti urti dopo inversione velocità

BOLTZMANN 1877

Nelle due memorie del 1877 Boltzmann, rispondendo alle critiche di Loschmidt, opera una rigorosa formalizzazione del carattere probabilistico del 2° principio della termodinamica anche se non realizza un reale riesame critico del teorema H.

"Lo stato iniziale del sistema sarà in generale uno stato molto poco probabile ed il sistema tenderà sempre verso stati più probabili fino a pervenire allo stato più probabile cioè a dire allo stato di equilibrio termodinamico. Se noi applichiamo allora il 2° principio della termodinamica, noi potremo allora identificare la grandezza che continuiamo a chiamare entropia con la probabilità dello stato corrispondente... Consideriamo un sistema di corpi isolato, in virtù del 2° principio della termodinamica l'entropia totale del sistema non può che aumentare. Nella nostra interpretazione attuale, questo non significa altra cosa che il fatto che le probabilità dello stato dei corpi del sistema dovrà costantemente aumentare: il sistema non può passare che da uno stato ad un altro più probabile".

STORIA SIMULA maxwell

SCHEDA 4

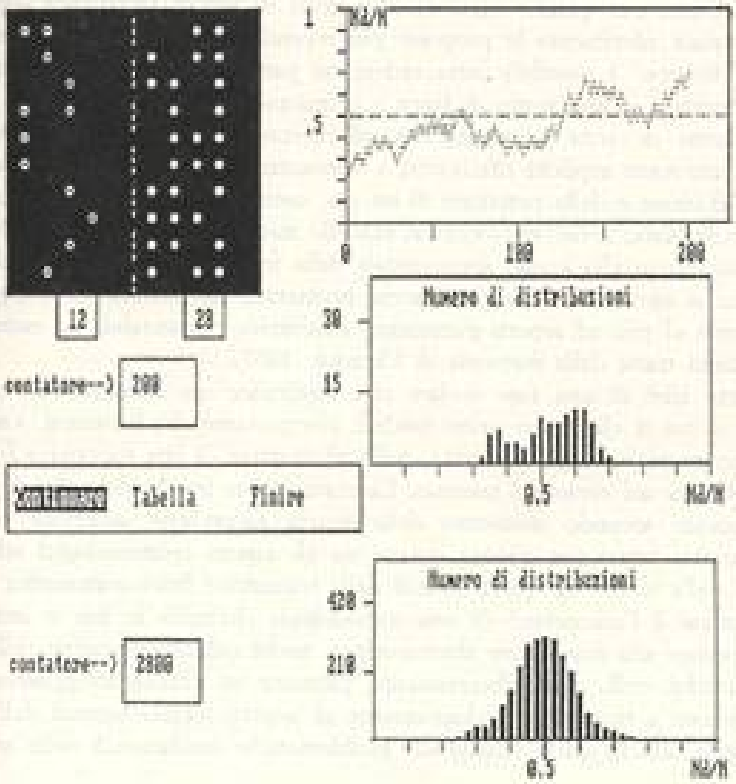
BOLTZMANN 1877

"Se in un'urna vi fosse un gran numero N di sfere identiche per gli altri aspetti, delle quali un certo numero fossero bianche, un ugual numero nere, un ugual numero rosse, e così via, allora la probabilità di estrarre 'a' sfere bianche, 'b' sfere nere, ' c' sfere rosse, ecc. è N! / (a!b!c!...) volte la probabilità di estrarre sfere di un solo colore".

Proprio come in questo semplice esempio, l'evento che tutte le molecole di un gas abbiano la stessa velocità nella stessa direzione non è per nulla meno probabile dell'evento che ogni molecola abbia esattamente la velocità e la direzione del moto che essa possiede realmente ad un istante particolare nel gas. Ma se paragoniamo il primo evento con l'evento che valga nel gas la distribuzione delle velocità di Maxwell, troviamo che vi sono innumerevoli configurazioni equiprobabili da contare come appartenenti al secondo."

N! / a!b!c!... sono i coefficienti multinomiali determinabili al variare di a, b, c,... Si tratta di una generalizzazione del caso binomiale esprimibile mediante la relazione N! / a!b!.

DISTRIB. VELOCITA' **SIMULA STATGAS** **STORIA**



configurazioni conduce, attraverso semplici generalizzazioni, dalla distribuzione binomiale, corrispondente alla suddivisione in due settori, a quella multinomiale, nel caso di n suddivisioni.

Dal punto di vista storico si può così costruire un primo approccio didattico alla revisione critica del teorema-H, operata da Boltzmann nelle memorie del 1877 in conseguenza delle obiezioni di Loschmidt per giungere ad una chiarificazione critica del carattere probabilistico dell'entropia e dello stesso 2° principio della termodinamica.

La Scheda 4 riguarda una possibile

Utilizzazione didattica

È chiaro, da quanto detto sopra, che il modulo, proprio per il suo specifico carattere sperimentale, non ha la pretesa di un'immediata trasferibilità didattica, ma si configura come una sorta di prototipo per ulteriori sviluppi successivi. Vi sono molti aspetti concettuali appena enunciati, riferimenti storici non contestualizzati, percorsi potenziali di approfondimento ancora non realizzati. Vale tuttavia la pena di esplicitare, in forma ipotetica, limitati usi dell'ipertesto in situazioni o fasce scolari diverse.

Ad esempio, per quanto riguarda il biennio di scuola secondaria superiore, assumendo quale riferimento le proposte più recenti formulate dalla Commissione Ministeriale Brocca,[7] è possibile intravvedere un particolare uso legato all'insegnamento denominato «Laboratorio di fisica e chimica».

Dal punto di vista contenutistico, all'interno del Tema 6 (*Movimento e Energia*), si ritrovano espliciti riferimenti a conoscenze quali l'interpretazione cinetica della diffusione e della pressione di un gas, correlate ad attività di simulazione del moto molecolare, come approccio al modello microscopico interpretativo, come momento successivo allo studio sperimentale della fenomenologia dei gas. Il livello di età in cui si opera induce a riconoscere prematura l'attivazione di collegamenti storici, se non al più ad aspetti puramente descrittivi, riscontrabili ad esempio in alcune citazioni tratte dalla memoria di Clausius (1857).

Si tratta cioè di una fase scolare che costituisce un momento di carattere esplorativo in cui si elaborano primi modelli interpretativi dei fenomeni, «adeguati allo sviluppo cognitivo degli studenti», nella prospettiva di una successiva formalizzazione realizzata nel corso del triennio. La maturazione intellettuale che si presuppone in questo secondo momento della scuola secondaria superiore consente approfondimenti critici per quanto attiene sia gli aspetti epistemologici relativi ai fondamenti della teoria, sia quelli formali della trattazione fisico-matematica. Prioritaria comunque è l'assunzione di una metodologia didattica in cui si attribuisca particolare valore alla dimensione storico-critica, anche nell'insegnamento delle discipline scientifiche, nelle quali, diversamente, permane un diffuso atteggiamento che induce i docenti a riproporre esclusivamente gli aspetti tecnico-formali della disciplina, marginalizzando quelli relativi alle problematiche fondazionali delle teorie.

[7] *Piani di studio della scuola secondaria superiore e programmi dei primi due anni*, Annali della Pubblica Istruzione, n° 56, ed. Le Monnier, 1991.

RIFERIMENTI STORICO-BIBLIOGRAFICI

CLAUSIUS R., *On the moving force of heat, and the laws regarding the nature of heat itself which are deducible therefrom*, Philosophical Magazine, 1851, tradotto da «Annalen der Physik und Chemie», 155 (1850).

— *On the nature of motion which we call heat*, Philosophical Magazine, 1857, tradotto da «Annalen der Physik», 100 (1857).

— *Über die mittlere Länge der Wege*, «Annalen der Physik», 105 (1858).

MAXWELL J.K., *Illustration of the dynamical theory of gases*, «Philosophical Magazine», (1860).

BOLTZMANN L., *Weitere studien über das Wärmegleichgewicht unter Gasmolekülen*, «Wien. Ber.», 66 (1872).

— *Bemerkungen über einige Probleme der mechanischen Wärmtheorie*, «Wien. Ber.», 75 (1877).

LOSCHMIDT J., *Über der Zustand des Wärmegleichgewichtes eines System von Körpern mit Rucksicht auf die Schwerkraft*, «Wien. Ber.», 75-76 (1877).