Rendiconti
Accademia Nazionale delle Scienze detta dei XL
Memorie di Matematica
109° (1991), Vol. XV, fasc. 2, pagg. 19-56

DONATO PASSASEO (*)

Molteplicità di soluzioni per disequazioni variazionali non lineari di tipo ellittico (**)

SUMMARY. — This paper is concerned with the study of the existence and the multiplicity of the solutions of a nonlinear elliptic problem with respect to an obstacle; moreover some general properties of the set of solutions are described. At the end, under suitable assumptions, we precise exactly the number of the solutions.

INTRODUZIONE

Sia Ω un aperto limitato di $\mathbf{R}^n$ e siano assegnate le funzioni g su $\Omega \times \mathbf{R}$ e ϕ ed h su Ω.

In questo lavoro si considera il problema:

$$(*) \qquad \begin{cases} \Delta u + g(x,u) = h(x) & \text{per } x \text{ tale che } u(x) > \phi(x), \\ \Delta u + g(x,u) \leqq h(x) & \text{per } x \text{ tale che } u(x) = \phi(x), \\ u \geqq \phi, \quad u = 0 \text{ su } \partial\Omega, \end{cases}$$

inteso nel senso delle distribuzioni (vedi definizione (1.2)). Per semplicità ho considerato l'operatore di Laplace Δ, ma tutti i risultati e le dimostrazioni esposte valgono altrettanto bene per un operatore $A = \sum_{i,j} D_i(a_{ij}(x) D_j)$ uniformemente ellittico con $a_{ij} = a_{ji}$, a_{ij} in $L^\infty(\Omega)$.

Nel caso in cui $g(x,u) = \lambda u$, questo problema è stato studiato in [29] e in [26]. Già nel primo di questi due lavori si mostra come, in queste ipotesi di linearità per g, i risultati differiscano in modo assai notevole dal caso in cui manca l'ostacolo ϕ. Se infatti ϕ manca, il problema si riduce alla sola prima equazione delle $(*)$ e, come è ben noto, se $g(x,u) = \lambda u$, con λ ad esempio diverso dagli autovalori dell'operatore di Laplace, allora per ogni h in $L^2(\Omega)$ l'equazione $(*)$ ha un'unica soluzione.

Invece in [29] si mostra che, indicati con λ_1 e λ_2 i primi due autovalori dell'operatore di Laplace, se $g(x,u) = \lambda u$ con $\lambda_1 < \lambda < \lambda_2$, e se $\phi = 0$, il problema $(*)$ ha almeno due soluzioni se $h > 0$ quasi ovunque in $\Omega (h \in L^2(\Omega))$.

(*) Indirizzo dell'Autore: Dipartimento di Matematica dell'Università, via Buonarroti 2, 56100 Pisa (Italia).

(**) Memoria presentata il 15 novembre 1990 da Ennio De Giorgi, uno dei XL.

ISSN-0392-4106

Questa analogia di risultati fra questo problema ed il seguente problema non lineare senza ostacolo (vedi [4]):

$$\begin{cases} \Delta u + g(x,u) = h\,, \\ u = 0 \text{ su } \partial\Omega\,, \end{cases}$$

nel caso in cui

$$\lim_{t\to-\infty} \frac{g(x,t)}{t} < \lambda_1 < \lim_{t\to+\infty} \frac{g(x,t)}{t} < \lambda_2\,,$$

viene presa in esame nell'introduzione di [26].

In [26] faccio ancora l'ipotesi che g sia lineare in u e studio la risolubilità del problema $(*)$ al variare di ϕ e di h.

In particolare dimostro un teorema di alternativa: per un certo insieme di coppie (ϕ, h) ci sono esattamente due soluzioni, per altre una o un continuo, per le restanti nessuna. In [26] dimostro anche che il primo insieme di coppie è un cono convesso con certe proprietà di chiusura e studio alcune proprietà dell'insieme delle soluzioni.

Nel presente lavoro considero il problema $(*)$ senza fare l'ipotesi che g sia lineare in u.

Nel paragrafo 1, dopo aver richiamato la nozione di sottodifferenziale, interpreto, in certe ipotesi, le soluzioni u di $(*)$ come i punti inferiormente stazionari di un opportuno funzionale f su un vincolo convesso K_ϕ: 0 è nel sottodifferenziale di f su K_ϕ in u; (nel caso in cui g sia lineare le soluzioni possono essere intese come punti di minimassimo).

Nel paragrafo 2 introduco le soprasoluzioni dell'equazione $\Delta u + g(x,u) = h$ e richiamo fra gli altri un risultato (che ho esposto in [20] in collaborazione con A. Marino), che gioca un ruolo molto importante nel seguito: le soprasoluzioni possono essere utilizzate come ostacolo superiore apparente, nel senso che le soluzioni del problema con l'aggiunta dell'ostacolo superiore $\bar{\phi}$ sono soluzioni del problema $(*)$ se $\bar{\phi}$ è una soprasoluzione.

Nel paragrafo 3, assumendo le ipotesi (G) e (g) (vedi (3.1)), dimostro fra l'altro che:

— se il problema $(*)$ ammette una soluzione, allora ne ammette una minima (vedi teorema (3.10));

— valgono certe proprietà di passaggio al limite per successioni di problemi di tipo $(*)$ (vedi (3.14) e (3.17)) nella ipotesi che $\lim_{t\to+\infty} \frac{g(x,t)}{t} > \lambda_1$;

— si possono dare alcune informazioni sull'insieme (non vuoto) delle coppie (ϕ, h) per le quali $(*)$ ha soluzione, esplorandolo con opportuni fasci di rette (vedi teorema (3.20)).

I teoremi di molteplicità sono esposti nel paragrafo 4. Il risultato principale è esposto in (4.11) che è un teorema di alternativa nel quale, assumendo le ipotesi (g) e (G) (vedi (3.1)) e supponendo in sostanza che $\lim_{t\to+\infty} \frac{g(x,t)}{t} > \lambda_1$, dimostro che lo spa-

zio delle coppie (ϕ, h) può essere ripartito in tre insiemi non vuoti: se (ϕ, h) sta nel primo insieme, il problema $(*)$ ha almeno due soluzioni, se (ϕ, h) sta nel secondo, $(*)$ ha almeno una soluzione, mentre nel terzo caso $(*)$ non ha soluzioni. In questo enunciato fornisco anche alcune proprietà di tali insiemi.

Ulteriori precisazioni sono esposte in (4.12).

Desidero sottolineare il fatto che, per questi risultati come per quelli dei paragrafi precedenti non è necessaria l'ipotesi che $\lim_{t\to+\infty} \frac{g(x,t)}{t} < \lambda_2$, che invece è supposta in [29] e in [26].

Nel paragrafo 5 considero il caso speciale in cui $g(x, u)$ è convessa in u, nel quale si possono dare numerose precisazioni ai risultati dei paragrafi 3 e 4.

Desidero ringraziare il prof. A. Marino per avermi seguito nella preparazione di questo lavoro.

1. - Posizione e caratterizzazione del problema

In questo paragrafo si definisce il problema $P_\phi(h)$ e si introducono alcune ipotesi nelle quali è possibile caratterizzare le soluzioni di tale problema come punti inferiormente stazionari (vedi Definizione (1.11)) di un opportuno funzionale.

(1.1) Sia Ω un aperto limitato di $\mathbf{R}^n$, g: $\Omega \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ sia una funzione di Caratheodory, cioè $g(x, \cdot)$ sia continua per quasi ogni $x \in \Omega$ e $g(\cdot, t)$ sia misurabile per ogni $t \in \mathbf{R}$. Poniamo

$$G(x,t) = \int_0^t g(x,s)\,ds; \qquad D = \{u \in H_0^{1,2}(\Omega) | G(x,u) \in L^1(\Omega)\}.$$

Per ogni funzione ϕ: $\Omega \to \mathbf{R}$ misurabile poniamo

$$K_\phi = \{u \in L^2(\Omega) | u \geqq \phi\};$$

inoltre sia

$$\Phi = \{\phi\colon \Omega \to \mathbf{R} \text{ misurabili} | K_\phi \cap D \neq \emptyset\}.$$

Consideriamo il seguente problema:

(1.2) Definizione: Sia $\phi \in \Phi$; diciamo che u è soluzione del problema con ostacolo ϕ e termine noto h (problema $P_\phi(h)$)se:

$$P_\phi(h) \begin{cases} u \in D \cap K_\phi \text{ e inoltre per ogni } v \in D \cap K_\phi \text{ risulta:} \\ (-g(x,u) + h)(v-u) \in L^1(\Omega), \\ \int_\Omega Du\, D(v-u)\,dx + \int_\Omega (-g(x,u)+h)(v-u)\,dx \geqq 0. \end{cases}$$

Assumeremo per semplicità che il termine noto h sia in $L^2(\Omega)$; sulla funzione g faremo le seguenti ipotesi.

(1.3) Ipotesi (g_*):

a) se $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ con $n \geqq 3$, posto $2^* = 2n/(n-2)$, supponiamo che valga

$$[g(x,t_1) - g(x,t_2)](t_1 - t_2) \leqq a(1 + |t_1|^{2^*-1} + |t_2|^{2^*-1})|t_1 - t_2|$$

dove a è una costante opportuna;

b) se $n = 2$, basta che valga

$$[g(x,t_1) - g(x,t_2)](t_1 - t_2) \leqq a(1 + |t_1|^{p-1} + |t_2|^{p-1})|t_1 - t_2|$$

per qualche esponente $p > 1$;

c) se $n = 1$, basta che sia

$$[g(x,t_1) - g(x,t_2)](t_1 - t_2) \leqq \alpha(t_1, t_2)|t_1 - t_2|$$

dove $\alpha(t_1, t_2)$: $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ è una funzione continua.

(1.4) Ipotesi (G_*): Posto $G(x,t) = \int_0^t g(x,s)\,ds$, supponiamo che

a) se $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ con $n \geqq 3$, risulti

$$G(x,t) \leqq a(x) + b|t|^{2^*} \quad \text{con } a(x) \in L^1(\Omega),\ b \in \mathbf{R} \text{ e } 2^* = \frac{2n}{n-2};$$

b) se $n = 2$, valga per qualche esponente $p > 1$

$$G(x,t) \leqq a(x) + b|t|^p \quad \text{con } a(x) \in L^1(\Omega),\ b \in \mathbf{R};$$

c) se $n = 1$, sia

$$G(x,t) \leqq a(x) + \beta(t) \quad \text{con } a(x) \in L^1(\Omega) \text{ e } \beta(t) \text{ funzione continua.}$$

Notiamo che l'ipotesi (G_*) segue da (g_*) se per esempio $g(x,0) \in L^\infty(\Omega)$.

(1.5) Proposizione: Se la funzione g verifica l'ipotesi (g_*), allora risulta:

a) esiste una funzione di Caratheodory $\omega: \Omega \times \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ tale che

$$G(x,t_2) \leqq G(x,t_1) + g(x,t_1)(t_2 - t_1) + \omega(x,t_1,t_2)|t_1 - t_2|;$$

$$\omega \geqq 0; \qquad \omega(x,t_1,t_2) = \omega(x,t_2,t_1);$$

$$\omega(x,t,t) = 0 \quad \text{per quasi ogni } x \in \Omega \text{ e per ogni } t \in \mathbf{R};$$

inoltre per ogni $n \geqq 3$ risulta

$$\omega(x,t_1,t_2) \leqq a_1(1 + |t_1|^{2^*-1} + |t_2|^{2^*-1})$$

(con a_1 costante opportuna) e maggiorazioni analoghe valgono nei casi $n = 2$ ed $n = 1$.

b) per quasi ogni x e per ogni $\tau \in (0,1)$ si ha per $n \geqq 3$

$$\frac{G(x, u+\tau(v-u)) - G(x,u)}{\tau} \geqq$$

$$\geqq G(x,v) - G(x,u) - (1-\tau)\, a_2 |u-v| (1 + |u|^{2^*-1} + |v|^{2^*-1});$$

(una diseguaglianza analoga vale nei casi $n=2$, $n=1$).

Dimostrazione: Per provare il punto *a*) basta porre

$$\omega(x, t_1, t_2) = [\sup\{[g(x,\tau_1) - g(x,\tau_2)] \,|\, t_1 \wedge t_2 \leqq \tau_2 \leqq \tau_1 \leqq t_1 \vee t_2\}]^+ .$$

È immediato verificare che nell'ipotesi (g_*) la funzione ω così definita soddisfa le proprietà sopradette; il punto *b*) segue facilmente dalle proprietà della funzione ω viste al punto *a*).

(1.6) Osservazione: Notiamo che la proprietà *a*) della Proposizione (1.5) è equivalente alla ipotesi (g_*) come è immediato verificare.

Introduciamo ora i seguenti funzionali:

(1.7) Definizione: Sia $h \in L^2(\Omega)$ e valgano le ipotesi (g_*) e (G_*); i funzionali f_0, f_h ed $f_{h,\phi}$: $H_0^{1,2}(\Omega) \to \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ sono così definiti:

$$f_0(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |Du|^2\, dx - \int_\Omega G(x,u)\, dx \quad \text{per ogni } u \in H_0^{1,2}(\Omega);$$

($G(x,u)$ è semintegrabile superiormente nell'ipotesi (G_*))

$$f_h(u) = f_0(u) + \int_\Omega hu\, dx; \qquad f_{h,\phi} = f_h + I_{K_\phi}$$

dove I_{K_ϕ} è la funzione indicatrice dell'insieme K_ϕ ($I_{K_\phi}(u) = 0$ se $u \in K_\phi$, vale $+\infty$ altrimenti).

(1.8) Osservazioni: Se valgono le ipotesi (g_*) e (G_*) e se $h \in L^2(\Omega)$, allora:

a) per ogni u di $H_0^{1,2}(\Omega)$, $G(x,u)$ è semintegrabile superiormente ed i funzionali f_h ed $f_{h,\phi}$ sono semicontinui inferiormente (ciò segue dall'ipotesi (G_*) per il lemma di Fatou)

b) i domini dei funzionali f_0, f_h, $f_{h,\phi}$ sono:

$$D(f_h) = \{u \in H_0^{1,2}(\Omega) \,|\, f_h(u) < +\infty\} = D \qquad \text{(vedi punto (1.1))},$$

$$D(f_{h,\phi}) = D(f_h) \cap K_\phi = D \cap K_\phi .$$

Tali domini sono convessi, anzi per ogni u e v in D e per ogni $w \in H_0^{1,2}(\Omega)$ tale che $u \wedge v \leqq w \leqq u \vee v$, risulta $w \in D$. Per la dimostrazione basta usare il punto *b*) della Proposizione (1.5).

c) se u e $v \in D$, allora $g(x,u)(v-u)$ è semintegrabile inferiormente, come si deduce immediatamente dal punto *a*) della Proposizione (1.5).

(1.9). Proposizione: Se la funzione g verifica le ipotesi (g_*) e (G_*) di (1.3) e (1.4) e se $h \in L^2(\Omega)$, allora il funzionale f_h definito in (1.7) gode delle seguenti proprietà:

a) se u e v sono in $D = D(f_h)$, allora

$$-\infty \leqq \lim_{t \to 0^+} \frac{f_h(u+t(v-u)) - f_h(u)}{t} = \int_\Omega Du\, D(v-u)\, dx -$$

$$- \int_\Omega g(x,u)(v-u)\, dx + \int_\Omega h(v-u)\, dx < +\infty;$$

b) $$f_h(v) \geqq f_h(u) + \int_\Omega [Du\, D(v-u) - g(x,u)(v-u) + h(v-u)]\, dx -$$

$$- \int_\Omega \omega(x,u,v)\, |v-u|\, dx$$

dove ω è la funzione di Carathéodory relativa al punto *a*) della Proposizione (1.5). Inoltre risulta:

$$\lim_{\|v-u\|_{L^{2^*}(\Omega)} \to 0} \frac{\int_\Omega \omega(x,u,v)\, |u-v|}{\|v-u\|_{L^{2^*}(\Omega)}} = 0 \quad \text{per ogni } u \in D.$$

Dimostrazione: Siano u e v in D e poniamo $u_t = u + t(v-u)$ per $t \in (0,1)$. Dalla Proposizione (1.5) si ha:

$$-G(x,u) + G(x,v) - a_2 |u-v| (1 + |u|^{2^*-1} + |v|^{2^*-1}) \leqq$$

$$\leqq \frac{G(x,u_t) - G(x,u)}{t} \leqq g(x,u)(v-u) + \omega(x,u_t,u)\, |v-u| \leqq$$

$$\leqq g(x,u)(v-u) + a_1 (1 + |u|^{2^*-1} + |v|^{2^*-1}) |v-u|.$$

Ne segue che

$$\lim_{t \to 0^+} \int_\Omega \frac{G(x,u_t) - G(x,u)}{t}\, dx = \int_\Omega g(x,u)(v-u)\, dx$$

e questo prova il punto *a*) in quanto $g(x,u)(v-u)$ è semintegrabile inferiormente.

Il punto *b*) segue dalla *a*) della Proposizione (1.5).

(1.10) Notazioni: Nel seguito porremo

$$f_h'(u)[v-u] = \lim_{t\to 0^+} \frac{f_h(u+t(v-u)) - f_h(u)}{t} =$$

$$= \int_\Omega [Du\, D(v-u) - g(x,u)(v-u) + h(v-u)]\, dx\,.$$

(1.11) Definizione (vedi [10]): In uno spazio di Hilbert H sia definita una funzione f: $H \to \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$; sia $u \in D(f) = \{u \in H | f(u) < +\infty\}$. Diciamo sottodifferenziale di f in u l'insieme $\partial_H^- f(u)$ degli α di H tali che:

$$\liminf_{v\to u} \frac{f(v) - f(u) - \langle \alpha, v-u\rangle}{\|v-u\|} \geqq 0\,.$$

(scriveremo anche $\partial^- f$ per semplicità).

Diciamo che f è sottodifferenziabile in u se $\partial^- f(u) \neq \emptyset$; in questo caso diciamo gradiente inferiore di f in u l'elemento $\operatorname{grad}^- f(u)$ di $\partial^- f(u)$ che ha minima norma (si verifica facilmente che $\partial^- f(u)$ è chiuso e convesso). Infine diciamo che u è un punto inferiormente stazionario per f se $0 \in \partial^- f(u)$ cioè se $\operatorname{grad}^- f(u) = 0$.

Questa definizione si generalizza in modo ovvio al caso di uno spazio di Banach.

Il teorema seguente caratterizza le soluzioni del problema $P_\phi(h)$ come punti inferiormente stazionari del funzionale $f_{h,\phi}$ definito in (1.7).

(1.12) Teorema: Supponiamo che valgano le ipotesi (g_*) e (G_*) di (1.3) e (1.4). Siano f_h ed $f_{h,\phi}$ i funzionali definiti in (1.7); sia $u \in D(f_{h,\phi}) = D \cap K_\phi$. Allora sono equivalenti le seguenti affermazioni:

a) u risolve il problema $P_\phi(h)$ definito in (1.2);

b) $\liminf_{t\to 0^+} \dfrac{f_h(u+t(v-u)) - f_h(u)}{t} \geqq 0$ per ogni $v \in D \cap K_\phi$;

c) $0 \in \partial^-_{L^{2^*}(\Omega)} f_{h,\phi}(u)$;

d) $0 \in \partial^-_{H_0^{1,2}(\Omega)} f_{h,\phi}(u)$ (vedi Definizione (1.11)).

Al punto *c)* il funzionale $f_{h,\phi}$ si intende esteso col valore $+\infty$ ai punti di $L^{2^*}(\Omega) \setminus H_0^{1,2}(\Omega)$; tale estensione è semicontinua inferiormente nell'ipotesi (G_*).

La dimostrazione segue facilmente dalle Proposizioni (1.5) e (1.9) e dall'Osservazione (1.8).

2. - Soprasoluzioni

In questo paragrafo introduciamo la nozione di soprasoluzione per l'operatore $\partial^- f_h$ e richiamiamo alcuni risultati ottenuti in [20], che saranno utilizzati nei paragrafi successivi.

Queste proprietà delle soprasoluzioni ne mettono in evidenza importanti e semplici legami con le soluzioni del problema $P_\phi(h)$ definito al punto (1.2); in particolare, la possibilità di ottenere soluzioni del problema $P_\phi(h)$ utilizzando le soprasoluzioni come ostacoli superiori ausiliari (vedi Teorema (2.6)), può interpretarsi come una versione del metodo di Perron nel caso non lineare.

(2.1) Definizione: Sia f_h il funzionale definito in (1.7) e supponiamo verificate le ipotesi (g_*) e (G_*) introdotte in (1.3) e (1.4). Diciamo che $\bar\phi \in H^{1,2}(\Omega)$ è una soprasoluzione per l'operatore $\partial^- f_h$ se, per ogni $v = v_1 \vee \bar\phi$ con $v_1 \in D(f_h) = D$ (vedi punto (1.1)), risulta:

$$\begin{cases} [-g(x,\bar\phi)+h](v-\bar\phi) \in L^1(\Omega), \\ \displaystyle\int_\Omega D\bar\phi\, D(v-\bar\phi)\,dx + \int_\Omega [-g(x,\bar\phi)+h](v-\bar\phi)\,dx \geqq 0. \end{cases}$$

(2.2) Proposizione: Se valgono le ipotesi (g_*) e (G_*) di (1.3) e (1.4) si ha:

a) se $\bar\phi$ è soluzione del problema $P_\phi(h)$ definito in (1.2), allora $\bar\phi$ è soprasoluzione per l'operatore $\partial^- f_h$;

b) se $\bar\phi$ è soprasoluzione per l'operatore $\partial^- f_h$ (in particolare se $\bar\phi$ è soluzione di $P_\phi(h)$), allora è soprasoluzione per l'operatore $\partial^- f_{h'}$, per ogni $h' \geqq h$ $(h', h \in L^2(\Omega))$.

(2.3) Proposizione: Valgano le ipotesi (g_*) e (G_*) di (1.3) e (1.4); sia $\bar\phi \in H^{1,2}(\Omega)$ e per ogni $v_1 \in D$ poniamo $\psi(v_1) = v_1 \wedge \bar\phi = \min(v_1, \bar\phi)$. Allora risulta:

a) $D\bar\phi\, D(v-\bar\phi) = D\psi(v_1)\, D(v_1 - \psi(v_1))$;

b) $g(x,\bar\phi)(v-\bar\phi) = g(x,\psi(v_1))(v_1-\psi(v_1))$;

c) $g(x,\psi(v_1))(v_1-\psi(v_1))$ è semintegrabile inferiormente;

d) $\bar\phi$ è soprasoluzione per l'operatore $\partial^- f_h$ se e solo se

$$\int_\Omega D\psi(v_1)\, D(v_1-\psi(v_1))\,dx + \int_\Omega [-g(x,\psi(v_1))+h](v_1-\psi(v_1))\,dx \geqq 0$$

per ogni $v_1 \in D$;

e) se $\bar\phi$ è soprasoluzione, allora $G(x,\psi(v_1)) \in L^1(\Omega)$ per ogni $v_1 \in D$.

Il seguente teorema mette in luce una importante proprietà delle soprasoluzioni; questa proprietà ci permetterà di utilizzare le soprasoluzioni come ostacoli superiori ausiliari.

(2.4) Teorema: Supponiamo che valgano le ipotesi (g_*) e (G_*) di (1.3) e (1.4); sia $\bar\phi \in H^{1,2}(\Omega)$ soprasoluzione per l'operatore $\partial^- f_h$; poniamo $K_{\phi,\bar\phi} = \{u \in L^2(\Omega) \mid \phi \leqq u \leqq \bar\phi\}$.

Se u risolve il problema a due ostacoli

$$P_{\phi,\bar{\phi}}(h): \begin{cases} u \in D \cap K_{\phi,\bar{\phi}} \text{ e inoltre per ogni } v \in D \cap K_{\phi,\bar{\phi}} \text{ risulta} \\ g(x,u)(v-u) \in L^1(\Omega), \\ \displaystyle\int_\Omega Du\, D(v-u)\, dx - \int_\Omega g(x,u)(v-u)\, dx + \int_\Omega h(v-u)\, dx \geqq 0, \end{cases}$$

allora u è soluzione del problema $P_\phi(h)$.

(2.5) Teorema: Valgano le ipotesi (g_*) e (G_*) di (1.3) e (1.4); allora il minimo di due soprasoluzioni per l'operatore $\partial^- f_h$ è una soprasoluzione per lo stesso operatore.

Come prima conseguenza dei Teoremi (2.4), (2.5), riportiamo il seguente risultato.

(2.6) Teorema: Valgano le ipotesi (g_*) e (G_*) di (1.3) e (1.4) e sia $\phi \in L^{2*}(\Omega)$. Allora:

a) se $\bar{\phi}$ è soprasoluzione per l'operatore $\partial^- f_h$ e se $D \cap K_{\phi,\bar{\phi}} \neq \emptyset$, allora il problema $P_\phi(h)$ ha una soluzione $u \leqq \bar{\phi}$; inoltre $f_h(u) = \min(f_h + I_{K_{\phi,\bar{\phi}}})$;

b) se u_1 e u_2 sono soluzioni del problema $P_\phi(h)$, allora esiste una soluzione $u \leqq u_1 \wedge u_2$;

c) se $P_\phi(h)$ ha soluzione, allora $P_{\phi'}(h')$ ha soluzione per ogni $\phi' \in L^{2*}(\Omega)$ e $h' \in L^2(\Omega)$ tali che $\phi' \leqq \phi$ e $h' \geqq h$.

Dimostrazione: Per provare il punto *a*) osserviamo che, siccome ϕ e $\bar{\phi}$ sono in $L^{2*}(\Omega)$, i sottolivelli del funzionale $(f_h + I_{K_{\phi,\bar{\phi}}})$ sono compatti nella norma di $L^{2*}(\Omega)$; rispetto a questa norma il funzionale è semicontinuo inferiormente e perciò ha minimo. Ogni punto di minimo del funzionale $(f_h + I_{K_{\phi,\bar{\phi}}})$ risolve il problema $P_{\phi,\bar{\phi}}(h)$ e quindi (Teorema (2.4)) è soluzione del problema $P_\phi(h)$.

Per la dimostrazione del punto *b*) basta ricordare che ogni soluzione di $P_\phi(h)$ è soprasoluzione per l'operatore $\partial^- f_h$ (Proposizione (2.2)); quindi si usa il Teorema (2.5) e si applica il punto *a*) con $\bar{\phi} = u_1 \wedge u_2$, osservando che $D \cap K_{\phi,\bar{\phi}} \neq \emptyset$ in quanto $\bar{\phi} \in D \cap K_{\phi,\bar{\phi}}$.

Il punto *c*) segue da *a*) e dalla Proposizione (2.2).

3. - Proprietà dell'insieme delle soluzioni e dell'insieme dei dati per cui esistono soluzioni

In questo paragrafo si introducono alcune ipotesi nelle quali è possibile descrivere alcune proprietà dell'insieme delle soluzioni del problema $P_\phi(h)$ definito in (1.2); un ruolo importante a questo proposito è svolto dalle proprietà delle soprasoluzioni stu-

diate nel paragrafo 2; si studiano inoltre alcune proprietà dell'insieme delle coppie (ϕ, h) per le quali il problema $P_\phi(h)$ ha soluzione e si stabiliscono alcuni risultati di esistenza.

Considereremo le seguenti ipotesi più restrittive delle ipotesi (g_*) e (G_*) introdotte in (1.3) e (1.4).

(3.1) Ipotesi: Sia $g\colon \Omega \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ una funzione di Caratheodory ed esistano $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$ ed $a \in L^1(\Omega)$ tali che:

$$(g) \qquad \frac{g(x,t_1) - g(x,t_2)}{t_1 - t_2} \leqq \lambda \quad \text{per } t_1 \neq t_2,$$

$$(G) \qquad G(x,t) = \int_0^t g(x,s)\,ds \leqq a(x) + \mu \frac{t^2}{2}.$$

(3.2) Osservazione: Nelle ipotesi (3.1) i funzionali $f_0, f_h, f_{h,\phi}$ introdotti in (1.7) si intenderanno per comodità estesi a tutto $L^2(\Omega)$, definendoli col valore $+\infty$ nei punti di $L^2(\Omega) \setminus H_0^{1,2}(\Omega)$.

Evidentemente il dominio $D(f_{h,\phi})$ è $D \cap K_\phi$ (vedi punto (1.1)). Inoltre, per ogni $u \in D \cap K_\phi$, il sottodifferenziale $\partial^- f_{h,\phi}(u)$ (vedi definizione (1.11)) sarà considerato rispetto alla norma di $L^2(\Omega)$.

Si prova facilmente la seguente proposizione.

(3.3) Proposizione: Se valgono le ipotesi (g) e (G) del punto (3.1), il funzionale $f_{h,\phi}\colon L^2(\Omega) \to R \cup \{+\infty\}$ (vedi osservazione (3.2)) è semicontinuo inferiormente e risulta

$$f_{h,\phi}(v) \geqq f_{h,\phi}(u) + \langle \alpha, v-u \rangle + \frac{1}{2}\|v-u\|^2_{H_0^{1,2}(\Omega)} - \frac{\lambda}{2}\|v-u\|^2_{L^2(\Omega)}$$

per ogni u e v in $D \cap K_\phi$ e per ogni α in $\partial^- f_{h,\phi}(u)$.

Di conseguenza si ha:

(3.4) Proposizione: Sia $u \in D \cap K_\phi$, sia $h \in L^2(\Omega)$ e valgano le ipotesi (g) e (G) di (3.1). Allora u risolve il problema $P_\phi(h)$ se e solo se $0 \in \partial^- f_{h,\phi}(u)$ rispetto alla norma di $L^2(\Omega)$.

Ricordiamo la seguente proprietà del sottodifferenziale:

(3.5) Proposizione (vedi [10]): Sia $f\colon H \to \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ semicontinua inferiormente e, per un opportuno $\lambda \in \mathbf{R}$, valga

$$f(v) \geqq f(u) + \langle \alpha, v-u \rangle - \frac{\lambda}{2}\|v-u\|^2$$

per ogni $\alpha \in \partial^- f(u)$ e per ogni u e $v \in D(f)$.

Siano $(u_m)_m$ ed $(\alpha_m)_m$ due successioni tali che $u_m \in D(f)$, $\alpha_m \in \partial^- f(u_m)$ per ogni

$m \in \mathbf{N}$; $\lim u_m = u$, $\sup \|\alpha_m\| < +\infty$ e $\alpha_m \rightharpoonup \alpha$ debolmente in H. Allora $u \in D(f)$, $\lim f(u_m) = f(u)$ e $\alpha \in \partial^- f(u)$.

In particolare se ne deduce che:

(3.6) Proposizione: Se $h \in L^2(\Omega)$ e valgono le ipotesi (g) e (G) di (3.1), allora l'insieme delle soluzioni del problema $P_\phi(h)$ è chiuso in $L^2(\Omega)$.

(3.7) Osservazione: Nelle ipotesi (g_*) e (G_*) di (1.3) e (1.4) si prova analogamente che l'insieme delle soluzioni di $P_\phi(h)$ è chiuso in $L^{2*}(\Omega)$ (basta usare la Proposizione (1.9) e le proprietà della funzione ω introdotta al punto a) della Proposizione (1.5)).

(3.8) Lemma: Valga l'ipotesi (G) di (3.1) e sia $h \in L^2(\Omega)$; siano ϕ e ϕ': $\Omega \to \mathbf{R}$ due funzioni misurabili e poniamo $K_{\phi,\phi'} = \{u \in L^2(\Omega) \mid \phi \leqq u \leqq \phi'\}$.

Allora, se $D(f_h) \cap K_{\phi,\phi'} = D \cap K_{\phi,\phi'}$ non è vuoto, il funzionale f_h ha minimo nell'insieme $K_{\phi,\phi'}$.

Dimostrazione: Nell'ipotesi (G) il funzionale f_h: $L^2(\Omega) \to \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ è semicontinuo inferiormente e vale

$$(1) \qquad f_h(u) \geqq \frac{1}{2}\int_\Omega |Du|^2\,dx - \frac{\mu}{2}\int_\Omega u^2\,dx - \int_\Omega a(x)\,dx + \int_\Omega hu\,dx\,.$$

Quindi basta provare che i sottolivelli di $(f_h + I_{K_{\phi,\phi'}})$ sono limitati in $L^2(\Omega)$, perché in questo caso essi sono limitati anche in $H_0^{1,2}(\Omega)$, come segue da (1), e quindi sono compatti. Supponiamo per assurdo che esista una successione $(u_m)_m$ contenuta in un sottolivello e tale che $\lim \|u_m\|_{L^2(\Omega)} = +\infty$. Poniamo $z_m = u_m / \|u_m\|_{L^2(\Omega)}$; da (1) si ha quindi che la successione $(z_m)_m$ è limitata in $H_0^{1,2}(\Omega)$; perciò una sua estratta converge in $L^2(\Omega)$ e quasi ovunque ad una funzione $z \in H_0^{1,2}(\Omega)$; ma questo è assurdo perché $\|z_m\|_{L^2(\Omega)} = 1$ per ogni m, mentre $z = 0$ in quanto $u_m \in K_{\phi,\phi'}$.

La seguente proposizione mostra che valgono enunciati analoghi a quelli del Teorema (2.6) senza ipotesi di sommabilità su ϕ, se si assumono le (g) e (G) del punto (3.1) in luogo delle (g_*) e (G_*) di (1.3) e (1.4).

(3.9) Proposizione: Valgano le ipotesi (g) e (G) di (3.1), sia $h \in L^2(\Omega)$ e sia ϕ: $\Omega \to \mathbf{R}$ una funzione misurabile. Allora:

a) se $\bar{\phi} \in H^{1,2}(\Omega)$ è una soprasoluzione per l'operatore $\partial^- f_h$ (vedi Definizione (2.1)) e se l'insieme $D \cap K_{\phi,\bar{\phi}}$ non è vuoto, allora il problema $P_\phi(h)$ ha una soluzione $u \leqq \bar{\phi}$, punto di minimo del funzionale f_h in $K_{\phi,\bar{\phi}}$;

b) se u_1 e u_2 sono soluzioni del problema $P_\phi(h)$, allora esiste una soluzione $u \leqq u_1 \wedge u_2$;

c) se $P_\phi(h)$ ha soluzione, allora $P_{\phi'}(h')$ ha soluzione per ogni $h' \in L^2(\Omega)$ e ϕ': $\Omega \to \mathbf{R}$ misurabile tali che $\phi' \leqq \phi$ e $h' \geqq h$.

DIMOSTRAZIONE: Il punto *a*) segue direttamente dal Lemma (3.8) e dal Teorema (2.4); il punto *b*) segue da *a*) utilizzando la Proposizione (2.2) ed il Teorema (2.5); *c*) si deduce da *a*) e dalla Proposizione (2.2).

(3.10) TEOREMA: Valgano le ipotesi (*g*) e (*G*) di (3.1), sia h in $L^2(\Omega)$ e sia ϕ: $\Omega \to \mathbf{R}$ una funzione misurabile. Allora, se il problema $P_\phi(h)$ ha soluzione, esiste una soluzione minima $\bar{u}$ (cioè $\bar{u} \leqq u$ q.o. in Ω per ogni u soluzione di $P_\phi(h)$).

DIMOSTRAZIONE: Sia $(u_m)_m$ una successione di soluzioni tale che

$$\lim \int_\Omega u_m \, dx = \inf \left\{ \int_\Omega u \, dx \,|\, u \text{ soluzione di } P_\phi(h) \right\} < +\infty .$$

Per un fissato $\bar{v} \in D \cap K_\phi$ risulta

$$(1) \quad f_h(\bar{v}) \geqq f_h(u_m) - \frac{\lambda}{2} \|\bar{v} - u_m\|^2_{L^2(\Omega)} \geqq$$

$$\geqq \frac{1}{2} \int_\Omega |Du_m|^2 \, dx - \frac{\mu}{2} \int_\Omega u_m^2 \, dx - \int_\Omega a(x) \, dx + \int_\Omega h u_m \, dx - \frac{\lambda}{2} \|\bar{v} - u_m\|^2_{L^2(\Omega)} .$$

Proviamo che $\sup \|u_m\|_{L^2(\Omega)} < +\infty$: per assurdo, supponiamo che, passando eventualmente ad una sottosuccessione, sia $\lim \|u_m\|_{L^2(\Omega)} = +\infty$; posto $z_m = u_m / \|u_m\|_{L^2(\Omega)}$, da (1) si ottiene che $\sup \|z_m\|_{H_0^{1,2}(\Omega)} < +\infty$ e quindi z_m (o una sua sottosuccessione) converge in $L^2(\Omega)$ e q.o. in Ω ad una funzione z; ne segue che $\|z\|_{L^2(\Omega)} = 1$ e $z \geqq 0$ in quanto $u_m \geqq \phi$. Quindi

$$\lim \int_\Omega z_m \, dx = \int_\Omega z \, dx > 0 ;$$

ma questo è assurdo perché

$$\lim \int_\Omega z_m \, dx = \lim \frac{1}{\|u_m\|_{L^2(\Omega)}} \int_\Omega u_m \, dx \leqq 0$$

in quanto

$$\lim \int_\Omega u_m \, dx < +\infty \quad \text{e} \quad \lim \|u_m\|_{L^2(\Omega)} = +\infty .$$

Perciò la successione $(u_m)_m$ deve essere limitata in $L^2(\Omega)$ e quindi in $H_0^{1,2}(\Omega)$ (per la (1)); allora una sua sottosuccessione converge in $L^2(\Omega)$ ad una funzione $\bar{u}$ che, per la Proposizione (3.6), è soluzione del problema $P_\phi(h)$. Osserviamo inoltre che

$$\int_\Omega \bar{u} \, dx = \min \left\{ \int_\Omega u \, dx \,|\, u \text{ soluzione di } P_\phi(h) \right\}$$

da cui, utilizzando il punto *b*) della Proposizione (3.9), si deduce che $\bar{u}$ è la soluzione minima.

(3.11) Osservazione: Se valgono le ipotesi (g_*) e (G_*) di (1.3) e (1.4) e se $\phi \in L^{2*}(\Omega)$, allora se $P_\phi(h)$ ha soluzione, esiste una soluzione minima.

La dimostrazione segue dal punto *b*) del Teorema (2.6) e dalla Osservazione (3.7).

(3.12) Notazioni: Siano $\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots$ gli autovalori dell'operatore $-\Delta$ in $H_0^{1,2}(\Omega)$; indichiamo con e_1 l'autofunzione relativa al primo autovalore λ_1, positiva e normalizzata in $L^2(\Omega)$. Poniamo

$$X_1 = \{te_1 \mid t \in \mathbb{R}\}; \qquad X_2 = X_1^\perp = \left\{u \in L^2(\Omega) \mid \int_\Omega ue_1\,dx = 0\right\};$$

con P_1 e P_2 indichiamo rispettivamente le proiezioni sugli spazi X_1 e X_2.

(3.13) Teorema: Valgano le ipotesi (g) e (G) di (3.1) e supponiamo che esistano $\lambda' < \lambda_1$ (vedi Notazioni (3.12)) e $a_1 \in L^1(\Omega)$ tali che

$$G(x,t) = \int_0^t g(x,s)\,ds \leqq \lambda' \frac{t^2}{2} + a_1(x) \quad \text{per ogni } t \geqq 0.$$

Allora il problema $P_\phi(h)$ ha soluzione per ogni $h \in L^2(\Omega)$ e per ogni $\phi \in \Phi$ (vedi punto (1.1)).

Dimostrazione: Basta provare che i sottolivelli del funzionale $f_{h,\phi}$ sono compatti in $L^2(\Omega)$ perché in questo caso una soluzione di $P_\phi(h)$ si può trovare come punto di minimo di $f_{h,\phi}$. Posto $u^+ = u \vee 0$ e $u^- = (-u) \vee 0$, nelle nostre ipotesi si ha:

$$\begin{aligned}
(1) \qquad f_h(u) = f_h(u^+) + f_h(-u^-) &\geqq \frac{1}{2}\int_\Omega |Du^+|^2\,dx - \frac{\lambda'}{2}\int_\Omega (u^+)^2\,dx - \int_\Omega a_1(x)\,dx + \\
&+ \int_\Omega hu^+\,dx + \frac{1}{2}\int_\Omega |Du^-|^2\,dx - \frac{\mu}{2}\int_\Omega (u^-)^2\,dx - \int_\Omega a(x)\,dx - \int_\Omega hu^-\,dx \geqq \\
&\geqq \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\lambda'}{\lambda_1}\right)\int_\Omega |Du^+|^2\,dx + \\
&+ \int_\Omega hu^+\,dx + \frac{1}{2}\int_\Omega |Du^-|^2\,dx - \frac{\mu}{2}\int_\Omega (u^-)^2\,dx - \int_\Omega hu^-\,dx - \int_\Omega (a_1 + a)\,dx.
\end{aligned}$$

Proviamo che u^- è limitata in $L^2(\Omega)$ nei sottolivelli di $f_{h,\phi}$. Supponiamo per assurdo che esista una successione $(u_m)_m$ contenuta in un sottolivello di $f_{h,\phi}$ e tale che

$\lim \|u_m^-\|_{L^2(\Omega)} = +\infty$. Allora, posto $z_m = u_m^- / \|u_m^-\|_{L^2(\Omega)}$, da (1) segue che $(z_m)_m$ è limitata in $H_0^{1,2}(\Omega)$; quindi $(z_m)_m$ (o una sua sottosuccessione) converge in $L^2(\Omega)$ e q.o. ad una funzione $z \in H_0^{1,2}(\Omega)$; ma questo è assurdo in quanto $\|z_m\|_{L^2(\Omega)} = 1$, mentre $z = 0$ in quanto $u_m \geqq \phi$.

Perciò nei sottolivelli di $f_{h,\phi}$ deve essere u^- limitata in $L^2(\Omega)$ e quindi in $H_0^{1,2}(\Omega)$, come si deduce da (1). Di conseguenza, anche u^+ è limitata in $H_0^{1,2}(\Omega)$ nei sottolivelli di $f_{h,\phi}$ (ancora per la (1)) e questo conclude la dimostrazione.

(3.14) Teorema: Valgano le ipotesi (g) e (G) di (3.1) e supponiamo che esistano $\bar{\lambda} > \lambda_1$ (vedi Notazioni (3.12)) e $c \in L^2(\Omega)$ tali che

$$g(x,t) \geqq \bar{\lambda} t - c(x) \qquad \text{per ogni } t \geqq 0 .$$

Siano $\phi_m, \phi \in \Phi$ (vedi punto (1.1)) e $h_m, h \in L^2(\Omega)$ tali che $\phi_m \leqq \phi$; $\phi_m \to \phi$ q.o. e $h_m \to h$ in $L^2(\Omega)$. Supponiamo che per ogni $m \in \mathbf{N}$ il problema $P_{\phi_m}(h_m)$ sia risolubile e u_m sia una sua soluzione. Allora:

a) la successione $(u_m)_m$ è limitata in $H_0^{1,2}(\Omega)$;

b) se $(u_m)_m$ (o una sua estratta) converge a u in $L^2(\Omega)$, allora u risolve il problema $P_\phi(h)$;

c) il problema $P_\phi(h)$ ha soluzione.

Alla dimostrazione, riportata al punto (3.16), premettiamo il seguente lemma.

(3.15) Lemma: Valgano le ipotesi (g) e (G) di (3.1); sia $h \in L^2(\Omega)$ ed esistano $\bar{\lambda} > \lambda_1$ e $c \in L^2(\Omega)$ tali che $g(x,t) \geqq \bar{\lambda} t - c(x)$ per ogni $t \geqq 0$.

Allora per ogni $u \in D$ e per ogni $\alpha \in \partial^- f_{h,\phi}(u)$ (rispetto alla norma di $L^2(\Omega)$), risulta:

$$\int_\Omega [(\lambda_1 - \bar{\lambda}) u^+ - (\lambda_1 - \lambda) u^- + c + h - \alpha] e_1 \, dx \geqq 0$$

(vedi Notazioni (3.12)).

Dimostrazione: Nelle nostre ipotesi $v = u + e_1 \in D$ in quanto $u \leqq v \leqq v^+ \in D$. Se $\alpha \in \partial^- f_{h,\phi}(u)$, si ha quindi

$$\int_\Omega \alpha(v-u)\, dx \leqq f_h'(u)[v-u] = \int_\Omega [Du\, De_1 - g(x,u)\, e_1 + he_1]\, dx =$$

$$= \int_\Omega [\lambda_1 u - g(x,u) + h]\, e_1 \, dx .$$

Inoltre, posto $\Omega^+ = \{x \in \Omega \,|\, u(x) \geqq 0\}$, risulta

$$\int_\Omega g(x,u)\, e_1\, dx = \int_{\Omega^+} g(x,u)\, e_1\, dx + \int_{\Omega \setminus \Omega^+} g(x,u)\, e_1\, dx \geqq$$

$$\geqq \int_{\Omega^+} (\bar{\lambda} u - c)\, e_1\, dx + \int_{\Omega \setminus \Omega^+} (\lambda u - c)\, e_1\, dx = \int_\Omega (\bar{\lambda} u^+ - \lambda u^- - c)\, e_1\, dx$$

e questo prova la tesi.

(3.16) Dimostrazione del Teorema (3.14): Fissato $\bar{u} \in K_\phi \cap D \subset K_{\phi_m} \cap D$, si ha:

$$(1) \qquad f_{h_m}(\bar{u}) \geqq f_{h_m}(u_m) - \frac{\lambda}{2} \|\bar{u} - u_m\|^2_{L^2(\Omega)} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{2} \int_\Omega |Du_m|^2\, dx - \frac{\mu}{2} \int_\Omega u_m^2\, dx - \int_\Omega a(x)\, dx + \int_\Omega h_m u_m\, dx - \frac{\lambda}{2} \|\bar{u} - u_m\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

Proviamo che la successione $(u_m)_m$ è limitata in $L^2(\Omega)$: per assurdo (passando eventualmente ad un'estratta) sia $\lim \|u_m\|_{L^2(\Omega)} = +\infty$. Posto $z_m = u_m / \|u_m\|_{L^2(\Omega)}$, da (1) si deduce che $(z_m)_m$ è limitata in $H_0^{1,2}(\Omega)$; quindi una sua estratta converge in $L^2(\Omega)$ e q.o. ad una $z \in H_0^{1,2}(\Omega)$; di conseguenza $\|z\|_{L^2(\Omega)} = 1$ e inoltre $z \geqq 0$ q.o. in Ω, in quanto $u_m \geqq \phi_m \to \phi$ q.o. Ma per il Lemma (3.15) si ha

$$\frac{1}{\|u_m\|_{L^2(\Omega)}} \int_\Omega [(\lambda_1 - \bar{\lambda})\, u_m^+ - (\lambda_1 - \lambda)\, u_m^- + c + h]\, e_1\, dx \geqq 0$$

da cui, passando al limite, si ottiene $(\lambda_1 - \bar{\lambda}) \int_\Omega z e_1 \geqq 0$ e questo è assurdo in quanto $\bar{\lambda} > \lambda_1$, $z \geqq 0$ e $\|z\|_{L^2(\Omega)} = 1$. Perciò la successione $(u_m)_m$ deve essere limitata in $L^2(\Omega)$ e allora da (1) segue che essa è limitata anche in $H_0^{1,2}(\Omega)$; quindi il punto *a*) è provato.

Proviamo *b*): per ogni $v \in K_\phi \cap D \subseteq K_{\phi_m} \cap D$, risulta:

$$f_{h_m}(v) \geqq f_{h_m}(u_m) - \frac{\lambda}{2} \|v - u_m\|^2_{L^2(\Omega)}$$

da cui, passando al limite, si ottiene

$$f_h(v) \geqq f_h(u) - \frac{\lambda}{2} \|v - u\|_{L^2(\Omega)} \qquad \text{per ogni } v \in K_\phi \cap D$$

e questo prova il punto *b*); il punto *c*) segue ovviamente da *a*) e *b*).

(3.17) Teorema: Valgano per la funzione (g) le stesse ipotesi del Teorema (3.14); siano $\phi_m, \phi \in \Phi$ ed $h_m, h \in L^2(\Omega)$ tali che $\phi_m \to \phi$ q.o. in Ω e $h_m \to h$ in $L^2(\Omega)$. Allora, se $P_{\phi_m}(h_m)$ ha soluzione per ogni $m \in \mathbb{N}$, anche il problema $P_\phi(h)$ ha soluzione.

DIMOSTRAZIONE: Poniamo $\psi(\phi_m) = \phi_m \wedge \phi$; (quindi risulta $\psi(\phi_m) \leqq \phi$ e $\psi(\phi_m) \to \phi$ q.o. in Ω). Se $P_{\phi_m}(h_m)$ ha soluzione, anche il problema $P_{\psi(\phi_m)}(h_m)$ ha soluzione per il punto *c*) della Proposizione (3.9) e quindi si applica il Teorema (3.14) ottenendo la tesi.

(3.18) OSSERVAZIONE: Semplici esempi mostrano che, nelle ipotesi del Teorema (3.17), una successione $(u_m)_m$ di soluzioni dei problemi $P_{\phi_m}(h_m)$ può non essere limitata in $H_0^{1,2}(\Omega)$ e, se converge in $L^2(\Omega)$, non è detto che il limite sia soluzione del problema $P_\phi(h)$.

(3.19) DEFINIZIONE: Per ogni $h \in L^2(\Omega)$, $h \geqq 0$, poniamo

$$E_h = \left\{ u \in H_0^{1,2}(\Omega) \,\middle|\, \int_\Omega u^2\,dx = 1;\ u \geqq 0;\ \int_\Omega hu\,dx = 0 \right\}$$

e definiamo $\lambda(h)$ in questo modo:

$$\lambda(h) = \begin{cases} \min\left\{ \int_\Omega |Du|^2\,dx \,\middle|\, u \in E_h \right\} & \text{se } E_h \neq \emptyset, \\ +\infty \quad \text{se } E_h = \emptyset \text{ (per esempio se } h > 0 \text{ q.o. in } \Omega). \end{cases}$$

($\lambda(h)$ può essere considerato come il primo autovalore di $-\Delta$ nell'insieme $\{x \in \Omega \,|\, h(x) = 0\}$).

(3.20) TEOREMA: Valgano le ipotesi (*g*) e (*G*) del punto (3.1); sia ϕ: $\Omega \to \mathbb{R}$ misurabile e tale che $K_\phi \cap D \neq \emptyset$; siano $\bar{h}$, $h \in L^2(\Omega)$ e supponiamo che $h \geqq 0$ e $\lambda(h) > \mu$ (vedi Definizione (3.19) e ipotesi (*G*)).

Allora, o il problema $P_\phi(\bar{h} + \tau h)$ ha soluzione per ogni $\tau \in \mathbb{R}$, oppure esiste $\bar{\tau} \in \mathbb{R}$ (dipendente da ϕ, $\bar{h}$, h) tale che $P_\phi(\bar{h} + \tau h)$ ha soluzione per $\tau > \bar{\tau}$, non ha soluzione per $\tau < \bar{\tau}$. (Il Teorema (7.1) e l'Osservazione (7.2) di [26] mostrano che, senza ulteriori ipotesi, il problema $P_\phi(\bar{h} + \bar{\tau} h)$ può non avere soluzione.)

Alla dimostrazione (vedi punto (3.22)) premettiamo il seguente lemma.

(3.21) LEMMA: Valgano le ipotesi del Teorema (3.20); poniamo

$$S_c = \left\{ u \in L^2(\Omega) \,\middle|\, \int_\Omega hu\,dx \leqq c \right\}.$$

Allora, per ogni $c \in \mathbb{R}$ tale che $K_\phi \cap D \cap S_c \neq \emptyset$ si ha che i sottolivelli del funzionale $(f_{\bar{h},\phi} + I_{S_c})$ sono limitati in $H_0^{1,2}(\Omega)$ ($I_{S_c}(u) = 0$ se $u \in S_c$, $+\infty$ altrimenti).

DIMOSTRAZIONE: Nell'ipotesi (G) si ha per ogni $u \in D$

$$(1) \qquad f_{\bar{h}}(u) \geqq \frac{1}{2}\int_\Omega |Du|^2\,dx - \frac{\mu}{2}\int_\Omega u^2\,dx - \int_\Omega a(x)\,dx + \int_\Omega \bar{h}u\,dx\,.$$

Proviamo che i sottolivelli di $(f_{\bar{h},\phi} + I_{S_c})$ sono limitati in $L^2(\Omega)$: supponiamo per assurdo che esista una successione $(u_m)_m$ contenuta in un sottolivello di $(f_{\bar{h},\phi} + I_{S_c})$ e tale che $\lim \|u_m\|_{L^2(\Omega)} = +\infty$.

Allora, posto $z_m = u_m/\|u_m\|_{L^2(\Omega)}$, si ha dalla (1)

$$\limsup \int_\Omega |Dz_m|^2\,dx \leqq \mu\,.$$

Quindi (z_m) (o una sua estratta) converge in $L^2(\Omega)$ e q.o. in Ω ad una funzione $z \in H_0^{1,2}(\Omega)$ tale che $z \geqq 0$ (perché $u_m \geqq \phi$), $\|z\|_{L^2(\Omega)} = 1$ e $\int_\Omega |Dz|^2\,dx \leqq \mu$.

Si ha inoltre

$$\lim \frac{1}{\|u_m\|_{L^2(\Omega)}}\int_\Omega u_m h\,dx = \lim \int_\Omega z_m h\,dx = \int_\Omega zh\,dx\,;$$

ma questo è assurdo perché

$$\lim \frac{1}{\|u_m\|_{L^2(\Omega)}}\int_\Omega u_m h\,dx = 0$$

in quanto $\int_\Omega u_m h\,dx \leqq c$ $(u_m \in S_c)$, mentre $\int_\Omega hz\,dx > 0$ perché altrimenti sarebbe $\lambda(h) \leqq \int_\Omega |Dz|^2\,dx \leqq \mu$, contro l'ipotesi assunta.

(3.22) DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA (3.20): Essendo $h \geqq 0$ e ricordando il punto *c)* della Proposizione (3.9), basta provare che $P_\phi(\bar{h} + \tau h)$ ha soluzione per qualche $\tau \in \mathbb{R}$. Sia $u_0 \in K_\phi \cap D \neq \emptyset$ e fissiamo $c > \int_\Omega hu_0\,dx$; allora, utilizzando il Lemma (3.21), si ha per τ abbastanza grande:

$$\min\left\{f_{\bar{h}+\tau h}(u) \,|\, u \geqq \phi;\ \int_\Omega hu\,dx \leqq c\right\} \leqq f_{\bar{h}+\tau h}(u_0) =$$

$$= f_{\bar{h}}(u_0) + \tau\int_\Omega hu_0\,dx < \min\left\{f_{\bar{h}+\tau h}(u) \,|\, u \geqq \phi;\ \int_\Omega hu\,dx = c\right\} =$$

$$= \min\left\{f_{\bar{h}}(u) \,|\, u \geqq \phi;\ \int_\Omega hu\,dx = c\right\} + \tau c\,.$$

Quindi una soluzione del problema $P_\phi(\bar{h} + \tau h)$ può essere trovata come punto di mini-

mo del funzionale $(f_{\bar{h}+\tau h} + I_{K_\phi})$ nell'insieme

$$\left\{ u \in L^2(\Omega) \,\middle|\, \int_\Omega hu\,dx < c \right\}.$$

4. - Molteplicità di soluzioni per il problema $P_\phi(h)$

In questo paragrafo si utilizzano metodi di tipo topologico per ottenere risultati di molteplicità, cioè si valuta il numero delle soluzioni del problema $P_\phi(h)$ definito in (1.2) studiando la topologia dei sottolivelli del funzionale $f_{h,\phi}$ introdotto in (1.7).

In particolare, si fa delle soprasoluzioni un uso nuovo che ci permette di individuare alcuni sottolivelli di $f_{h,\phi}$ topologicamente non banali, consentendoci quindi di applicare i metodi topologici suddetti.

Un ruolo importante a questo proposito è svolto dal seguente lemma.

(4.1) Lemma: Valgano le ipotesi (g) e (G) di (3.1); siano $h, \bar{h} \in L^2(\Omega)$ con $h \geqq 0$ e $\lambda(h) > \lambda$ (vedi Definizione (3.19) e ipotesi (g)); sia ϕ: $\Omega \to \mathbf{R}$ misurabile; $\bar{\phi} \in H^{1,2}(\Omega)$ sia una soprasoluzione per l'operatore $\partial^- f_{\bar{h}}$ e supponiamo che $K_{\phi,\bar{\phi}} \cap D \neq \emptyset$. Per ogni $u \in K_\phi \cap D$ poniamo

$$\psi(u) = u \wedge \bar{\phi} \quad \text{e} \quad d_{L^2(\Omega)}(u, K_{\phi,\bar{\phi}}) = \min\{\|u - v\|_{L^2(\Omega)} \,|\, v \in K_{\phi,\bar{\phi}}\} = \|u - \psi(u)\|_{L^2(\Omega)}.$$

Allora esiste $\bar{r} > 0$, tale che per ogni $r \in (0, \bar{r})$ risulta:

$$\min\{f_{\bar{h}+h}(u) \,|\, u \in K_{\phi,\bar{\phi}}\} < \min\{f_{\bar{h}+h}(u) \,|\, u \in K_\phi;\ d_{L^2(\Omega)}(u, K_{\phi,\bar{\phi}}) = r\}.$$

Dimostrazione: Nell'ipotesi (g), dalle proprietà delle soprasoluzioni (vedi Proposizione (2.3)) si ha per ogni $u \in D \cap K_\phi$:

$$f_{\bar{h}}(u) \geqq f_{\bar{h}}(\psi(u)) + \frac{1}{2}\|u - \psi(u)\|^2_{H_0^{1,2}(\Omega)} - \frac{\lambda}{2}\|u - \psi(u)\|^2_{L^2(\Omega)};$$

quindi

$$f_{\bar{h}+h}(u) \geqq f_{\bar{h}+h}(\psi(u)) + \frac{1}{2}\|u - \psi(u)\|^2_{H_0^{1,2}(\Omega)} - \frac{\lambda}{2}\|u - \psi(u)\|^2_{L^2(\Omega)} + \int_\Omega h(u - \psi(u))\,dx.$$

Di conseguenza, per ogni $u \in K_\phi \cap D$ tale che $\|u - \psi(u)\|_{L^2(\Omega)} = r$, si ha:

$$f_{\bar{h}+h}(u) \geqq \min\{f_{\bar{h}+h}(u) \,|\, u \in K_{\phi,\bar{\phi}}\} + m_r,$$

dove si è posto

$$m_r = \min\left\{ \frac{1}{2}\int_\Omega [|Dw|^2\,dx - \lambda w^2]\,dx + \int_\Omega hw\,dx \,\middle|\, w \in H_0^{1,2}(\Omega);\ w \geqq 0;\ \|w\|_{L^2(\Omega)} = r \right\}.$$

Basta quindi provare che esiste $\bar{r}$ tale che $m_r > 0$ per ogni $r \in (0, \bar{r})$.

Fissato $\nu \in \mathbf{R}$ tale che $\lambda < \nu < \lambda(h)$, poniamo

$$C = \left\{ u \in H_0^{1,2}(\Omega) \,\middle|\, \int_\Omega [|Du|^2 - \nu u^2]\, dx \leqq 0 \right\}.$$

Se $C = \emptyset$, la tesi è ovvia. Supponiamo quindi $C \neq \emptyset$ e osserviamo che l'insieme

$$\{w \in H_0^{1,2}(\Omega) \,|\, w \geqq 0,\ \ w \in C,\ \ \|w\|_{L^2(\Omega)} = 1\}$$

è limitato in $H_0^{1,2}(\Omega)$, per cui esiste il seguente minimo:

$$\varepsilon = \min \left\{ \int_\Omega hw\, dx \,\middle|\, w \in H_0^{1,2}(\Omega);\ \ w \geqq 0;\ \ w \in C;\ \ \|w\|_{L^2(\Omega)} = 1 \right\}.$$

Nelle nostre ipotesi risulta $\varepsilon > 0$: infatti, detto $\overline{w}$ un punto di minimo, deve essere $\varepsilon = \int_\Omega h\overline{w} > 0$ perché altrimenti si avrebbe (vedi Definizione (3.19)) $\lambda(h) \leqq \int_\Omega |D\overline{w}|^2\, dx \leqq \nu$, contro l'ipotesi assunta. Di conseguenza, nell'insieme $\{w \in H_0^{1,2}(\Omega) \,|\, w \geqq 0,\ \ w \in C\}$ si ha $\int_\Omega hw\, dx \geqq \varepsilon \|w\|_{L^2(\Omega)}$ e quindi

$$\text{(1)} \qquad \frac{1}{2} \int_\Omega [|Dw|^2 - \lambda w^2]\, dx + \int_\Omega hw\, dx \geqq -\frac{\lambda}{2} \|w\|^2_{L^2(\Omega)} + \varepsilon \|w\|_{L^2(\Omega)}$$

$$\text{per ogni } w \in H_0^{1,2}(\Omega),\ \ w \geqq 0;\ \ w \in C.$$

D'altra parte si ha ovviamente

$$\text{(2)} \qquad \frac{1}{2} \int_\Omega [|Dw|^2 - \lambda w^2]\, dx + \int_\Omega hw\, dx \geqq \frac{1}{2}(\nu - \lambda) \int_\Omega w^2\, dx$$

$$\text{per ogni } w \in H_0^{1,2}(\Omega),\ \ w \geqq 0;\ \ w \notin C$$

e quindi da (1) e (2) segue facilmente la tesi.

Il seguente teorema è una prima conseguenza del Lemma (4.1).

(4.2) Teorema: Supponiamo che per la funzione g valgano le ipotesi (g) e (G) e inoltre esistano $\overline{\lambda} > \lambda_1$ (vedi Notazioni (3.12)) e $c \in L^2(\Omega)$ tali che $g(x,t) \geqq \overline{\lambda} t - c(x)$ per ogni $t \geqq 0$. Siano $\overline{h}$, $h \in L^2(\Omega)$ con $h \geqq 0$ e $\lambda(h) > \lambda$ (vedi Definizione (3.19) e ipotesi (g)); sia ϕ: $\Omega \to \mathbf{R}$ misurabile e supponiamo che esista $\overline{\phi} \in H^{1,2}(\Omega)$, soprasoluzione per l'operatore $\partial^- f_{\overline{h}}$, tale che $K_{\phi,\overline{\phi}} \cap D \neq \emptyset$.

Allora il problema $P_\phi(\overline{h} + h)$ ha almeno due soluzioni.

La dimostrazione è riportata al punto (4.8).

Per provare il Teorema (4.2) useremo i seguenti risultati (vedi [10]).

(4.3) Definizione: Sia f: $H \to R \cup \{+\infty\}$ una funzione definita in uno spazio di Hilbert H; sia I un intervallo di $\mathbf{R}$ con $\mathring{I} \neq \emptyset$ e sia $\mathcal{U}$ un'applicazione di I in H.

Diciamo che $\mathcal{U}$ è una curva di massima pendenza (discendente) per f se:

a) $\mathcal{U}$ è assolutamente continua sui compatti di I;

b) $\mathcal{U}(t) \in D(f)$ e $-\mathcal{U}'(t) \in \partial^- f(\mathcal{U}(t))$ quasi ovunque su I;

c) $f \circ \mathcal{U}$ è non crescente su I.

Nel nostro caso sarà $H = L^2(\Omega)$ ed $f = f_{b,\phi}$.

Il teorema seguente è contenuto in [6]; qui lo utilizzeremo nella forma esposta in [10].

(4.4) Teorema (vedi [6]): Sia H uno spazio di Hilbert; sia f: $H \to R \cup \{+\infty\}$ una funzione semicontinua inferiormente e supponiamo che per un'opportuna costante c valga

$$f(v) \geqq f(u) + \langle \alpha, v - u \rangle - c\|v - u\|^2$$

per ogni $\alpha \in \partial^- f(u)$ e per ogni $u, v \in D(f)$.

Allora per ogni $u_0 \in D(f)$ esiste un'unica curva $\mathcal{U}$: $[0, +\infty[\to H$ di massima pendenza per f e tale che $\mathcal{U}(0) = u_0$. Inoltre:

a) per ogni $t \in]0, +\infty[$ è $\partial^- f(\mathcal{U}(t)) \neq \emptyset$ e risulta $\mathcal{U}'_+(t) = -\operatorname{grad}^- f(\mathcal{U}(t))$ ($\mathcal{U}'_+(t)$ è la derivata destra di $\mathcal{U}$ in t); inoltre la funzione $t \to \mathcal{U}'_+(t)$ è continua da destra in $]0, +\infty[$;

b) $f \circ \mathcal{U}(t_2) - f \circ \mathcal{U}(t_1) = -\int_{t_1}^{t_2} \|\operatorname{grad}^- f \circ \mathcal{U}(t)\|^2 \, dt$ per ogni t_1 e $t_2 \in [0, +\infty[$;

c) se poi $(u_m)_m$ è una successione che converge al punto $u \in D(f)$ con $\sup f(u_m) < +\infty$, indicate con $\mathcal{U}_m$ e $\mathcal{U}$ le curve di massima pendenza per f tali che $\mathcal{U}_m(0) = u_m$, $\mathcal{U}(0) = u$, risulta che $\mathcal{U}_m(t)$ converge ad $\mathcal{U}(t)$ ed $f \circ \mathcal{U}_m(t)$ converge a $f \circ \mathcal{U}(t)$ per ogni $t \geqq 0$.

Notiamo che nel nostro caso $H = L^2(\Omega)$, $f = f_{b,\phi}$ e quindi le ipotesi del Teorema (4.4) sono verificate per la Proposizione (3.3).

(4.5) Definizione: Sia f: $H \to R \cup \{+\infty\}$ e sia $D(f)$ il suo dominio; indichiamo con D^* l'insieme $D(f)$ munito della metrica d^* così definita (metrica del grafico di f):

$$d^*(u, v) = \|u - v\| + |f(u) - f(v)| \quad \text{per ogni } u, v \in D(f).$$

(4.6) Teorema (vedi [22]): Sia f: $H \to R \cup \{+\infty\}$; sia D^* l'insieme $D(f)$ munito della metrica del grafico d^* (vedi Definizione (4.5)). Supponiamo che

a) per ogni u_0 in $D(f)$ esista un'unica curva $\mathcal{U}$: $[0, +\infty[\to H$ di massima pendenza per f con $\mathcal{U}(0) = u_0$; inoltre, posto $\Phi(u_0, t) = \mathcal{U}(t)$ per tale $\mathcal{U}$, sia Φ: $D^* \times [0, +\infty[\to D^*$ continua;

b) siano a e b in R con $a \leqq b$, tali che in $f^{-1}([a, b])$ non esistano punti inferiormente stazionari per f;

c) valga la seguente estensione della condizione di Palais-Smale:

se $(u_m)_m$ è una successione in $f^{-1}([a,b])$ tale che $\partial^- f(u_m) \neq \emptyset$ e $\lim \operatorname{grad}^- f(u_m) = 0$, allora esiste una sottosuccessione $(u_{m_h})_h$ convergente in d^* ad un punto u tale che $\operatorname{grad}^- f(u) = 0$.

Allora l'insieme $f^a = \{u \in H \mid f(u) \leqq a\}$ è un retratto di deformazione di $f^b = \{u \in H \mid f(u) \leqq b\}$, rispetto alla metrica di D^*.

Osserviamo che per $H = L^2(\Omega)$ ed $f = f_{h,\phi}$, l'ipotesi *a*) del Teorema (4.5) è verificata in virtù del Teorema (4.4); il lemma successivo mostra (tra l'altro) che è verificata anche l'ipotesi *c*) (condizione di tipo Palais-Smale).

(4.7) Lemma: Valgano le ipotesi (*g*) e (*G*) di (3.1) ed esistano $\bar{\lambda} > \lambda_1$ (vedi Notazioni (3.12)) e $c \in L^2(\Omega)$ tali che $g(x,t) \geqq \bar{\lambda} t - c(x)$ per ogni $t \geqq 0$.

Sia $h \in L^2(\Omega)$; ϕ: $\Omega \to \mathbb{R}$ sia misurabile e tale che $K_\phi \cap D \neq \emptyset$. Sia $(u_m)_m$ una successione contenuta in $K_\phi \cap D$ e tale che $\partial^- f_{h,\phi}(u_m) \neq \emptyset$, $\sup \|\operatorname{grad}^- f_{h,\phi}(u_m)\| < +\infty$ (vedi Definizione (1.11)).

Allora la successione $(u_m)_m$ è limitata in $H_0^{1,2}(\Omega)$; inoltre esiste una sottosuccessione convergente in d^* (vedi Definizione (4.5)) ad una funzione $u \in D \cap K_\phi$ tale che $\partial^- f_{h,\phi}(u) \neq \emptyset$ e

$$\|\operatorname{grad}^- f_{h,\phi}(u)\| \leqq \min \lim \|\operatorname{grad}^- f_{h,\phi}(u_m)\|$$

(in particolare sarà $0 \in \partial^- f_{h,\phi}(u)$ se $\lim \operatorname{grad}^- f_{h,\phi}(u_m) = 0$).

Dimostrazione: Basta provare che $(u_m)_m$ è limitata in $H_0^{1,2}(\Omega)$ perché le altre proprietà seguono dalla proposizione (3.5). Fissato $\bar{u} \in K_\phi \cap D$ e posto per brevità $\alpha_m = \operatorname{grad}^- f_{h,\phi}(u_m)$, si ha:

$$(1) \qquad f_h(\bar{u}) \geqq f_h(u_m) + \int_\Omega \alpha_m(\bar{u} - u_m)\,dx - \frac{\lambda}{2}\|\bar{u} - u_m\|^2_{L^2(\Omega)} \geqq$$

$$\geqq \frac{1}{2}\int_\Omega |Du_m|^2\,dx - \frac{\mu}{2}\int_\Omega u_m^2\,dx - \int_\Omega a(x)\,dx + \int_\Omega \alpha_m(\bar{u} - u_m)\,dx - \frac{\lambda}{2}\|\bar{u} - u_m\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

Proviamo che $(u_m)_m$ è limitata in $L^2(\Omega)$: supponiamo per assurdo che (passando eventualmente ad un'estratta) sia $\lim \|u_m\|_{L^2(\Omega)} = +\infty$.

Poniamo $z_m = u_m / \|u_m\|_{L^2(\Omega)}$; allora da (1) segue che $(z_m)_m$ è limitata in $H_0^{1,2}(\Omega)$, per cui una sua estratta converge in $L^2(\Omega)$ e q.o. in Ω ad una funzione $z \in H_0^{1,2}(\Omega)$; si ha quindi $\|z\|_{L^2(\Omega)} = 1$ e $z \geqq 0$ q.o. (perché $u_m \geqq \phi$ q.o.).

Ma per il Lemma (3.15) si ottiene $(\lambda_1 - \bar{\lambda}) \int_\Omega z e_1\,dx \geqq 0$ e questo è assurdo perché $\bar{\lambda} > \lambda_1$ e $\int_\Omega z e_1\,dx > 0$.

Perciò $(u_m)_m$ deve essere limitata in $L^2(\Omega)$ e quindi, per (1), è limitata anche in $H_0^{1,2}(\Omega)$.

(4.8) Dimostrazione del Teorema (4.2): Una soluzione u_1 si trova come punto di minimo del funzionale $f_{\bar{h}+h}$ nell'insieme $K_{\phi,\bar{\phi}}$ ($\bar{\phi}$ è soprasoluzione per $\partial^- f_{\bar{h}+h}$, in quanto $h \geqq 0$). Nelle nostre ipotesi si ha

$$G(x,u) \geqq \bar{\lambda}\frac{u^2}{2} - c(x)\,u \qquad \text{per ogni } u \geqq 0$$

da cui segue facilmente che $\lim_{t\to+\infty} f_{\bar{h}+h}(u_1^+ + te_1) = -\infty$. È facile anche verificare che

$$\lim_{t\to+\infty} d_{L^2(\Omega)}(u_1^+ + te_1, K_{\phi,\bar{\phi}}) = +\infty \qquad \text{(vedi Lemma (4.1))}.$$

Quindi esiste $\bar{u} \in K_\phi \cap D$ tale che $f_{\bar{h}+h}(\bar{u}) \leqq f_{\bar{h}+h}(u_1)$ e $d_{L^2(\Omega)}(\bar{u}, K_{\phi,\bar{\phi}}) > 0$.

Per il Lemma (4.1), esiste $r > 0$ tale che $r < d_{L^2(\Omega)}(\bar{u}, K_{\phi,\bar{\phi}})$ e

$$f_{\bar{h}+h}(u_1) < \min\{f_{\bar{h}+h}(u) \mid u \in K_\phi,\ d_{L^2(\Omega)}(u, K_{\phi,\bar{\phi}}) = r\}.$$

Sia $a \in \mathbb{R}$ tale che

$$f_{\bar{h}+h}(u_1) < a < \{\min f_{\bar{h}+h}(u) \mid u \in K_\phi,\ d_{L^2(\Omega)}(u, K_{\phi,\bar{\phi}}) = r\}.$$

Osserviamo che $f_{\bar{h}+h}$ è continua sul segmento congiungente u_1 e $\bar{u}$; quindi, posto $b = \max\{f_{\bar{h}+h}(u_1 + \theta(\bar{u} - u_1)) \mid 0 \leqq \theta \leqq 1\}$, abbiamo che i punti u_1 e $\bar{u}$ sono connessi rispetto alla metrica del grafico di $f_{\bar{h}+h,\phi}$ (vedi Definizione (4.5)) nel sottolivello $f^b_{\bar{h}+h,\phi} = \{u \in L^2(\Omega) \mid f_{\bar{h}+h,\phi}(u) \leqq b\}$, che contiene il segmento che li congiunge, mentre sono sconnessi nel sottolivello

$$f^a_{\bar{h}+h,\phi} = \{u \in L^2(\Omega) \mid f_{\bar{h}+h,\phi}(u) \leqq a\},$$

che non contiene l'insieme $\{u \in K_\phi \mid d_{L^2(\Omega)}(u, K_{\phi,\bar{\phi}}) = r\}$.

Pertanto $f^a_{\bar{h}+h,\phi}$ non può essere un retratto di deformazione di $f^b_{\bar{h}+h,\phi}$ nella metrica del grafico di $f_{\bar{h}+h,\phi}$.

Allora dal Teorema (4.6) si ottiene che deve esistere una soluzione u_2 del problema $P_\phi(h)$ tale che $f_{\bar{h}+h,\phi}(u_2) \in [a, b]$. Notiamo infine che la soluzione u_2 è distinta da u_1 in quanto $f_{\bar{h}+h}(u_1) < a \leqq f_{\bar{h}+h}(u_2)$; quindi il teorema è provato.

(4.9) Teorema: Valgano le ipotesi (g) e (G) del punto (3.1) e inoltre esistano $\bar{\lambda} > \lambda_1$ (vedi Notazioni (3.12)) e $c \in L^2(\Omega)$ tali che $g(x,t) \geqq \bar{\lambda}t - c(x)$ per ogni $t \geqq 0$.

Sia ϕ: $\Omega \to \mathbb{R}$ misurabile e tale che $K_\phi \cap D \neq \emptyset$; siano $\bar{h}, h \in L^2(\Omega)$ e supponiamo che $h \geqq 0$ e $\lambda(h) > \max(\lambda, \mu)$ (vedi Definizione (3.19) e ipotesi (g) e (G)).

Allora esiste $\bar{\tau} \in \mathbb{R}$ (dipendente da ϕ, $\bar{h}$, h) tale che $P_\phi(\bar{h} + \tau h)$ ha almeno due soluzioni per $\tau > \bar{\tau}$, ha almeno una soluzione per $\tau = \bar{\tau}$, non ha soluzione per $\tau < \bar{\tau}$.

Dimostrazione: È sufficiente provare che

$$\inf\{\tau \in \mathbb{R} \mid P_\phi(\bar{h} + \tau h) \text{ ha soluzione}\} > -\infty,$$

perché il resto segue immediatamente dai Teoremi (3.20), (4.2) e (3.14).

Supponiamo per assurdo che $P_\phi(\bar{h} - mh)$ abbia soluzione u_m per ogni $m \in \mathbb{N}$; allora, fissato $\bar{u} \in D \cap K_\phi$, $\bar{u} \geqq 0$, si ha:

$$f_{\bar{h}}(\bar{u}) \geqq f_{\bar{h}}(\bar{u}) - m \int_\Omega h\bar{u}\, dx = f_{\bar{h}-mh}(\bar{u}) \geqq f_{\bar{h}-mh}(u_m) - \frac{\lambda}{2}\|\bar{u} - u_m\|^2_{L^2(\Omega)} \geqq$$

$$\geqq \frac{1}{2}\int_\Omega |Du_m|^2\, dx - \frac{\mu}{2}\int_\Omega u_m^2\, dx - \int_\Omega a(x)\, dx + \int_\Omega (\bar{h} - mh)\, u_m\, dx - \frac{\lambda}{2}\|\bar{u} - u_m\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

Posto $z_m = u_m/m$, si ottiene quindi che esiste una costante $c_1 \geqq 0$ tale che

$$\int_\Omega |Dz_m|^2\, dx \leqq c_1\left(1 + \int_\Omega z_m^2\, dx\right). \tag{1}$$

Ora, se $(z_m)_m$ è limitata in $L^2(\Omega)$, per la (1) è limitata anche in $H_0^{1,2}(\Omega)$; quindi una sua estratta converge in $L^2(\Omega)$ e q.o. ad una funzione $z \in H_0^{1,2}(\Omega)$ e risulta $z \geqq 0$ in quanto $u_m \geqq \phi$. Allora dal Lemma (3.15) si ottiene $(\lambda_1 - \bar{\lambda})\int_\Omega z e_1\, dx - \int_\Omega h e_1\, dx \geqq 0$; ma questo è assurdo perché $\bar{\lambda} > \lambda_1$, $z \geqq 0$ e $\int_\Omega h e_1 > 0$.

Consideriamo il caso in cui z_m non è limitata in $L^2(\Omega)$: a meno di passare ad una sottosuccessione, possiamo supporre che $\lim \|z_m\|_{L^2(\Omega)} = +\infty$.

Posto $z'_m = z_m/\|z_m\|_{L^2(\Omega)}$, da (1) si ha che $(z'_m)_m$ à limitata in $H_0^{1,2}(\Omega)$; quindi una sua sottosuccessione converge in $L^2(\Omega)$ e q.o. ad una funzione $z' \in H_0^{1,2}(\Omega)$ tale che $\|z'\|_{L^2(\Omega)} = 1$ e $z' \geqq 0$. Dal Lemma (3.15) si ottiene allora $(\lambda_1 - \bar{\lambda})\int_\Omega z' e_1\, dx \geqq 0$; ma anche questo è assurdo perché $\int_\Omega z' e_1\, dx > 0$ in quanto $z' \geqq 0$ e $\|z'\|_{L^2(\Omega)} = 1$; quindi il teorema è provato.

(4.10) Osservazione: Supponiamo che valgano per la funzione $g(x, t)$ le stese ipotesi del Teorema (4.9).

Siano $\phi \in \Phi$, $\bar{h}, h \in L^2(\Omega)$ con $h \geqq 0$ e supponiamo che $\lambda(h) > \mu$ (come nel Teorema (3.20): non richiediamo cioè che sia anche $\lambda(h) > \lambda$ come nel Teorema (4.9)). Allora esistono $\bar{\tau}_1$ e $\bar{\tau}_2 \in \mathbb{R}$, $\bar{\tau}_2 \geqq \bar{\tau}_1$, tali che il problema $P_\phi(\bar{h} + \tau h)$ non ha soluzioni per $\tau < \bar{\tau}_1$, ne ha almeno una per $\tau \geqq \bar{\tau}_1$ e ne ha almeno due per $\tau \geqq \bar{\tau}_2$.

Per la dimostrazione basta osservare che, per τ sufficientemente grande, una soluzione u_1 si trova (come nel Teorema (3.20)) come punto di minimo del funzionale $f_{\bar{h}+\tau h}$ in un insieme del tipo

$$\left\{u \in K_\phi \,\middle|\, \int_\Omega hu\, dx < c\right\}$$

e inoltre si ha

$$f_{\bar{h}+\tau h}(u_1) < \min\left\{f_{\bar{h}+\tau h}(u) \,\middle|\, u \in K_\phi;\ \int_\Omega hu\, dx = c\right\}.$$

Quindi una seconda soluzione u_2 si può trovare con metodi topologici simili a quelli usati per dimostrare il Teorema (4.9): osservando che

$$\lim_{t\to+\infty} f_{\bar{h}+\tau h}(u_1^+ + te_1) = -\infty \quad \text{e} \quad \lim_{t\to+\infty} \int_\Omega h(u_1^+ + te_1)\,dx = +\infty,$$

si individuano un punto $\bar{u}$ e due sottolivelli tali che i punti u_1 e $\bar{u}$ sono sconnessi nel primo sottolivello, che non contiene l'iperpiano

$$\left\{u \in L^2(\Omega) \,\middle|\, \int_\Omega hu\,dx = c\right\},$$

mentre sono connessi nel secondo sottolivello, che contiene il segmento che li congiunge; quindi si conclude come nel Teorema (4.2).

(4.11) Teorema: Valgano le ipotesi del Teorema (4.9) e sia $\phi_0 \in H_0^{1,2}(\Omega)$, $\phi_0 \geqq 0$. Allora esiste una funzione $\bar{\gamma}$: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ non decrescente e semicontinua inferiormente, tale che il problema $P_{\phi+t\phi_0}(\bar{h}+\tau h)$ ha almeno due soluzioni per $\tau > \bar{\gamma}(t)$, ne ha almeno una per $\tau = \bar{\gamma}(t)$, non ha soluzione per $\tau < \bar{\gamma}(t)$.

Dimostrazione: Osserviamo innanzitutto che nelle nostre ipotesi risulta $\phi + t\phi_0 \in \Phi$ (vedi punto (1.1)) per ogni $t \in \mathbb{R}$: basta infatti osservare che, se $\bar{u} \in D$, allora $\bar{u} + t\phi_0 \in D$ per ogni $t \geqq 0$, in quanto

$$\bar{u} \leqq \bar{u} + t\phi_0 \leqq (\bar{u} + t\phi_0)^+ \in D.$$

Quindi il Teorema (4.9) permette di individuare per ogni $t \in \mathbb{R}$ il valore $\bar{\gamma}(t) \in \mathbb{R}$; la non crescenza della funzione $\bar{\gamma}$ segue dal fatto che, se $P_{\phi+t_1\phi_0}(\bar{h}+\tau h)$ ha soluzione, allora anche $P_{\phi+t_2\phi_0}(\bar{h}+\tau h)$ ha soluzione per ogni $t_2 \leqq t_1$, come segue dal punto *c*) della Proposizione (3.9).

La semicontinuità inferiore di $\bar{\gamma}$ si deduce dal Lemma (3.14).

(4.12) Teorema: Valgano le ipotesi (*g*) e (*G*) del punto (3.1) e inoltre esistano $\bar{\lambda} > \lambda_1$ (vedi Notazioni (3.12)) e $c \in L^2(\Omega)$ tali che $g(x,t) \geqq \bar{\lambda}t - c(x)$ per ogni $t \geqq 0$.

Siano $h \in L^2(\Omega)$, $\phi \in L^2(\Omega) \cap \Phi$ (vedi punto (1.1)) e poniamo $\tilde{X}_2 = P_2(\Phi \cap L^2(\Omega))$ (vedi Notazioni (3.12)). Allora esiste una funzione γ: $\tilde{X}_2 \times X_2 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ semicontinua inferiormente, tale che

a) se $\int_\Omega he_1\,dx > \gamma\left(P_2\phi, P_2h, \int_\Omega \phi e_1\,dx\right)$, allora il problema $P_\phi(h)$ ha almeno due soluzioni;

b) se $\int_\Omega he_1\,dx = \gamma\left(P_2\phi, P_2h, \int_\Omega \phi e_1\,dx\right)$, il problema $P_\phi(h)$ ha almeno una soluzione;

c) se $\int_\Omega he_1\,dx < \gamma\left(P_2\phi, P_2h, \int_\Omega \phi e_1\,dx\right)$, $P_\phi(h)$ non ha soluzioni.

Inoltre la funzione $\gamma(\phi, h, \cdot)$ è continua e non decrescente per ogni $\phi \in \tilde{X}_2$ ed $h \in X_2$.

Ulteriori proprietà della funzione γ sono provate nella Proposizione (4.14).

DIMOSTRAZIONE: Per ogni $\phi \in \tilde{X}_2$, $\bar{h} \in X_2$, $t \in \mathbb{R}$, il valore $\gamma(\phi, \bar{h}, t)$ è individuato mediante la Proposizione (4.11) applicata con $\phi_0 = h = e_1$; dalla stessa proposizione si ottiene anche la non decrescenza della funzione $\gamma(\phi, \bar{h}, \cdot)$ per ogni $\phi \in \tilde{X}_2$ e $\bar{h} \in X_2$. La semicontinuità inferiore di γ in $\tilde{X}_2 \times X_2 \times \mathbb{R}$ si deduce dal Teorema (3.17). La continuità della funzione $\gamma(\phi, \bar{h}, \cdot)$ è provata nella Proposizione (4.14).

(4.13) OSSERVAZIONE: Nel caso in cui $g(x,t) = \lambda t$ con $\lambda > \lambda_1$, si trova che la funzione γ che compare nel Teorema (4.12) è del tipo

$$\gamma\left(P_2\phi, P_2 h, \int_\Omega \phi e_1 \, dx\right) = \Gamma_\lambda(P_2\phi, P_2 h) + (\lambda - \lambda_1) \int_\Omega \phi e_1 \, dx$$

dove $\Gamma_\lambda : \tilde{X}_2 \times X_2 \to [0, +\infty[$ è una funzione semicontinua inferiormente, convessa e positivamente omogenea di primo grado (vedi [26]).

Nel caso generale, la proposizione seguente fornisce alcune ulteriori proprietà qualitative della funzione $\gamma(\phi, h, \cdot)$ e ne precisa gli andamenti asintotici.

(4.14) PROPOSIZIONE: Nelle ipotesi del Teorema (4.12) la funzione γ che compare in quel Teorema gode delle seguenti proprietà: per ogni $\phi \in \Phi \cap L^2(\Omega)$ e $h \in L^2(\Omega)$ risulta:

a) $$\frac{\gamma(P_2\phi, P_2 h, t_1) - \gamma(P_2\phi, P_2 h, t_2)}{t_1 - t_2} \leqq \lambda - \lambda_1 \qquad \text{per } t_1 \neq t_2$$

(vedi ipotesi (*g*) di (3.1) e notazioni (3.12));

b) la funzione $\gamma(P_2\phi, P_2 h, \cdot)$ è lipschitziana;

c) $$\limsup_{t \to \pm\infty} \frac{\gamma(P_2\phi, P_2 h, t)}{t} \leqq \lambda - \lambda_1 ;$$

d) $$\liminf_{t \to +\infty} \frac{\gamma(P_2\phi, P_2 h, t)}{t} \geqq \bar{\lambda} - \lambda_1$$

($\bar{\lambda}$ compare nelle ipotesi del Teorema (4.12)).

Per la dimostrazione, riportata al punto (4.16), useremo i risultati seguenti.

(4.15) PROPOSIZIONE: Valgano le ipotesi (*g*) e (*G*) del punto (3.1) e supponiamo che esistano $\bar{\lambda} > \lambda_1$ (vedi Notazioni (3.12)) e $c \in L^2(\Omega)$ tali che $g(x,t) \geqq \bar{\lambda} t - c(x)$ per ogni $t \geqq 0$. Allora abbiamo:

a) sia $\bar{h} \in L^2(\Omega)$; $\bar{\phi} \in H^{1,2}(\Omega)$ con $\bar{\phi}^- \in H_0^{1,2}(\Omega)$ sia soprasoluzione per l'operatore $\partial^- f_{\bar{h}}$; allora, per ogni $t \geqq 0$, $\bar{\phi} + te_1$ (vedi Notazioni (3.12)) è soprasoluzione per l'operatore $\partial^- f_h$ con $h = \bar{h} + (\lambda - \lambda_1) te_1$.

b) sia $\phi \in \Phi$ (vedi (1.1)), $h \in L^2(\Omega)$ e supponiamo che il problema $P_\phi(h)$ abbia soluzione; allora il problema $P_{\phi+te_1}(h+(\lambda-\lambda_1)te_1)$ ha soluzione per ogni $t \geqq 0$.

Dimostrazione: Per ogni $v \in D$ e per ogni $t \geqq 0$, poniamo

$$\psi(v) = v \wedge \bar{\phi}; \qquad \psi_t(v) = v \wedge (\bar{\phi} + te_1).$$

Utilizzando la Proposizione (2.3), per dimostrare il punto *a*) basterà provare che, posto $h = \bar{h} + (\lambda - \lambda_1)te_1$, si ha $f'_h(\psi_t(v))[v - \psi_t(v)] \geqq 0$ per ogni $v \in D$.

Poniamo $v_t = \psi(v) + v - \psi_t(v)$ per ogni $t \geqq 0$; allora $v_t \in D$ in quanto $\psi(v) \leqq v_t \leqq v$, con $\psi(v) \in D$ per la Proposizione (2.3) (punto *e*)); inoltre si verifica facilmente che $\psi(v_t) = \psi(v)$; $v_t - \psi(v_t) = v - \psi_t(v)$. Siccome $\bar{\phi}$ è soprasoluzione per $\partial^- f_{\bar{h}}$, abbiamo (vedi Proposizione (2.3))

$$0 \leqq f'_{\bar{h}}(\psi(v_t))[v_t - \psi(v_t)] < +\infty.$$

Basta quindi provare che

$$f'_h(\psi_t(v))[v - \psi_t(v)] \geqq f'_{\bar{h}}(\psi(v_t))[v_t - \psi(v_t)];$$

e infatti si ha:

$$f'_h(\psi_t(v))[v - \psi_t(v)] - f'_{\bar{h}}(\psi(v_t))[v_t - \psi(v_t)] = \int_\Omega [D\psi_t(v) - D\psi(v_t)]\, D(v - \psi_t(v))\, dx -$$

$$- \int_\Omega [g(x, \psi_t(v)) - g(x, \psi(v_t))](v - \psi_t(v))\, dx + (\lambda - \lambda_1)\, t \int_\Omega e_1 (v - \psi_t(v))\, dx.$$

Siccome $\psi_t(v) - \psi(v_t) = te_1$ nei punti in cui $v - \psi_t(v) = v_t - \psi(v_t) \neq 0$, per l'ipotesi (*g*) possiamo minorare con

$$t \int_\Omega De_1 D(v - \psi_t(v))\, dx - \lambda t \int_\Omega e_1 (v - \psi_t(v))\, dx + (\lambda - \lambda_1)\, t \int_\Omega e_1 (v - \psi_t(v))\, dx = 0$$

e quindi il punto *a*) è provato.

Proviamo il punto *b*): sia u soluzione del problema $P_\phi(h)$ (quindi u è in particolare soprasoluzione per l'operatore $\partial^- f_h$). Nelle nostre ipotesi si verifica facilmente che $u + te_1 \in D \cap K_{\phi+te_1}$ per ogni $t \geqq 0$; inoltre $u + te_1$ è soprasoluzione per l'operatore $\partial^- f_{h+(\lambda-\lambda_1)te_1}$, per quanto provato al punto *a*). La tesi segue quindi dal punto *a*) della Proposizione (3.9).

(4.16) Dimostrazione della Proposizione (4.14): Fissiamo t_1 e t_2 e assumiamo che $t_1 < t_2$; siccome il problema

$$P_{P_2\phi + t_1 e_1}(P_2 h + \gamma(P_2\phi, P_2 h, t_1)\, e_1)$$

ha soluzione, dalla Proposizione (4.15) segue che anche il problema

$$P_{P_2\phi+t_2e_1}(P_2h+\gamma(P_2\phi,P_2h,t_1)\,e_1+(\lambda-\lambda_1)(t_2-t_1)e_1)$$

ha soluzione; quindi deve essere

$$\gamma(P_2\phi,P_2h,t_2)\leqq\gamma(P_2\phi,P_2h,t_1)+(\lambda-\lambda_1)(t_2-t_1)$$

e questo prova il punto *a*).

Il punto *b*) segue da *a*) e dalla non decrescenza della funzione $\gamma(P_2\phi,P_2h,\cdot)$; (la costante di Lipschitz è non superiore a $\lambda-\lambda_1$).

Il punto *c*) segue ovviamente da *a*).

Proviamo *d*): sia u_t soluzione del problema $P_{P_2\phi+te_1}(P_2h+\gamma(P_2\phi,P_2h,t)\,e_1)$. Allora, dal Lemma (3.15) segue

$$\int_\Omega[c+P_2h+\gamma(P_2\phi,P_2h,t)\,e_1]\,e_1\,dx\geqq(\bar\lambda-\lambda_1)\int_\Omega u_t^+\,e_1\,dx-(\lambda-\lambda_1)\int_\Omega u_t^-\,e_1\,dx\geqq$$

$$\geqq(\bar\lambda-\lambda_1)\int_\Omega(P_2\phi+te_1)^+\,e_1\,dx-(\lambda-\lambda_1)\int_\Omega(P_2\phi+te_1)^-\,e_1\,dx\,.$$

Per $t\geqq0$ ha $(P_2\phi+te_1)^-\leqq(P_2\phi)^-$ e quindi

$$\gamma(P_2h,P_2h,t)\geqq-\int_\Omega ce_1\,dx+(\bar\lambda-\lambda_1)\int_\Omega(P_2\phi+te_1)^+\,e_1\,dx-(\lambda-\lambda_1)\int_\Omega(P_2\phi)^-\,e_1\,dx\,.$$

Basta quindi provare che

$$\lim_{t\to+\infty}\int_\Omega\frac{(P_2\phi+te_1)^+}{t}\,e_1\,dx=1$$

e questo è vero perché

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{(P_2\phi+te_1)^+}{t}=e_1\quad\text{q.o. in }\Omega\quad\text{e}\quad0\leqq\frac{(P_2\phi+te_1)^+}{t}\leqq(P_2\phi)^++e_1\quad\text{per }t\geqq1\,.$$

5. - Il problema $P_\phi(h)$ nel caso che $g(x,\cdot)$ sia convessa

In questo paragrafo si mostra come i risultati ottenuti nei paragrafi precedenti si possono precisare nel caso che, oltre alle ipotesi (*g*) e (*G*) di (3.1) (oppure (g_*) e (G_*) di (1.3) e (1.4)), si assume che la funzione $g(x,\cdot)$ sia convessa per q.o. $x\in\Omega$.

Lo strumento fondamentale utilizzato in questo paragrafo è il Lemma (5.1).

Nelle ipotesi di questo lemma si prova la convessità dell'insieme delle coppie (ϕ,h) per le quali il problema $P_\phi(h)$ ha soluzione, si valuta esattamente il numero delle soluzioni (in opportune ipotesi sull'andamento asintotico di $g(x,t)$ per $t\to+\infty$) e si descrive la struttura dell'insieme delle soluzioni del problema $P_\phi(h)$.

Useremo, anche in questo paragrafo, i funzionali f_h e $f_{h,\phi}$ definiti in (1.7) e le Notazioni (3.12).

(5.1) Lemma: Valgano le ipotesi (g_*) e (G_*) di (1.3) e (1.4); supponiamo inoltre che

a) $g(x,\cdot)$ sia convessa per quasi ogni $x \in \Omega$.

b) $G(x,u) = \int_0^u g(x,s)\,ds \in L^1(\Omega)$ per ogni $u \in H_0^{1,2}(\Omega)$, $u \geqq 0$

(ciò è vero per esempio se $g(x,t) \geqq \underline{\lambda} t - c(x)$ per $t \geqq 0$ con $\underline{\lambda} \in \mathbf{R}$ e $c(x) \in L^2(\Omega)$).

Allora l'insieme $\{(\bar{\phi}, h) | \bar{\phi} \in H^{1,2}(\Omega);\ \bar{\phi} \wedge 0 \in H_0^{1,2}(\Omega);\ h \in L^2(\Omega);\ \bar{\phi}$ è soprasoluzione per $\partial^- f_h\}$ è convesso.

Dimostrazione: Osserviamo innanzitutto che $\{u \in H_0^{1,2}(\Omega) | u \geqq 0\} \subset D$, come si deduce evidentemente dall'ipotesi *b*); ne segue che, se $w \in H_0^{1,2}(\Omega)$ e $w \geqq 0$, allora $u + w \in D$ per ogni $u \in D$ (basta infatti osservare che $u \leqq u + w \leqq (u+w)^+ \in D$).

Siano $\bar{\phi}_0$ e $\bar{\phi}_1$ soprasoluzioni per $\partial^- f_{h_0}$ e $\partial^- f_{h_1}$ con h_0 e h_1 in $L^2(\Omega)$; per ogni $\theta \in (0,1)$ poniamo:

$$\bar{\phi}_\theta = \bar{\phi}_0 + \theta(\bar{\phi}_1 - \bar{\phi}_0); \qquad h_\theta = h_0 + \theta(h_1 - h_0).$$

Per ogni $v \in D$ poniamo:

$$\psi_0(v) = v \wedge \bar{\phi}_0; \qquad \psi_1(v) = v \wedge \bar{\phi}_1; \qquad \psi(v) = v \wedge \bar{\phi}$$

dove

$$\bar{\phi} = \bar{\phi}_0 \wedge \bar{\phi}_1; \qquad \psi_\theta(v) = v \wedge \bar{\phi}_\theta; \qquad v_0 = \psi(v) + \frac{1}{1-\theta}(\psi_0 \circ \psi_\theta(v) - \psi(v)) + (v - \psi_\theta(v));$$

$$v_1 = \psi(v) + \frac{1}{\theta}(\psi_1 \circ \psi_\theta(v) - \psi(v)) + (v - \psi_\theta(v)).$$

Notiamo che v_0 e v_1 sono in D per quanto osservato prima e inoltre

$$v_0 - \psi_0(v_0) = v_1 - \psi_1(v_1) = v - \psi_\theta(v).$$

Per l'ipotesi *a*) risulta perciò

$$f'_{h_\theta}(\psi_\theta(v))[v - \psi_\theta(v)] \geqq (1-\theta) f'_{h_0}(\psi_0(v_0))[v_0 - \psi_0(v_0)] + \theta f'_{h_1}(\psi_1(v_1))[v_1 - \psi_1(v_1)],$$

da cui segue ovviamente la tesi.

(5.2) Teorema: Supponiamo che

a) $g(x,\cdot)$ sia convessa per q.o. $x \in \Omega$;

b) $G(x,u) = \int_0^u g(x,s)\,ds \in L^1(\Omega)$ per ogni $u \in H_0^{1,2}(\Omega)$, $u \geqq 0$ (questo è vero per esempio se $g(x,t) \geqq \underline{\lambda} t - c(x)$ per $t \geqq 0$ con $\underline{\lambda} \in \mathbf{R}$ e $c(x) \in L^2(\Omega)$).

Allora

1) Se valgono le ipotesi (g_*) e (G_*) di (1.3) e (1.4), l'insieme $\{(\phi, h) | \phi \in L^{2*}(\Omega);\ h \in L^2(\Omega);\ P_\phi(h)$ ha soluzione$\}$ è convesso.

2) Nelle ipotesi (g) e (G) del punto (3.1), è convesso l'insieme $\{(\phi, h) | \phi\colon \Omega \to \mathbf{R}$ misurabile; $h \in L^2(\Omega);\ P_\phi(h)$ ha soluzione$\}$.

La dimostrazione segue immediatamente dalla Proposizione (2.2) e dal Lemma (5.1), utilizzando il Teorema (2.6) per il punto 1) e la Proposizione (3.9) per il punto 2).

Se ne deduce facilmente che:

(5.3) Corollario: Se la funzione $g(x, \cdot)$ è convessa per q.o. $x \in \Omega$, allora le funzioni $\bar{\gamma}$ e γ che compaiono nella Proposizione (4.11) e nel Teorema (4.12) sono convesse.

(5.4) Proposizione: Valgano le ipotesi (g) e (G) di (3.1) e supponiamo che per q.o. $x \in \Omega$ $g(x, \cdot)$ sia positivamente omogenea di primo grado, cioè esistano due funzioni $\alpha(x)$ e $\beta(x)$ tali che $g(x, u) = \alpha(x)\, u^+ - \beta(x)\, u^-$ (dove $u^+ = u \vee 0$ e $u^- = (-u) \vee 0$). Allora:

a) u risolve il problema $P_\phi(h)$ se e solo se ρu risolve il problema $P_{\rho\phi}(\rho h)$ per ogni $\rho \geqq 0$;

b) se inoltre $\alpha(x) \geqq \beta(x)$ per q.o. $x \in \Omega$, allora l'insieme $\{(\phi, h) | \phi\colon \Omega \to \mathbf{R}$ misurabile, $h \in L^2(\Omega),\ P_\phi(h)$ ha soluzione$\}$ è un cono convesso con vertice nell'origine.

c) la funzione γ che compare nel Teorema (4.12) è positivamente omogenea di primo grado ed è anche convessa se $\alpha(x) \geqq \beta(x)$ per q.o. $x \in \Omega$.

Dimostrazione: Il punto *a*) si verifica facilmente; il punto *b*) segue dal Teorema (5.2) e da *a*), osservando che $g(x, \cdot)$ è convessa se $\alpha(x) \geqq \beta(x)$; il punto *c*) segue ovviamente da *a*) e *b*).

Nei seguenti teoremi si precisano i risultati di molteplicità del paragrafo precedente e si descrive la struttura dell'insieme delle soluzioni, in opportune ipotesi sull'andamento asintotico di $g(x, t)$ per $t \to +\infty$.

(5.5) Teorema: Valgano per la funzione g le stesse ipotesi del Teorema (4.12) e supponiamo inoltre che per q.o. $x \in \Omega$ risulti

a) $g(x, \cdot)$ è convessa;

b) $\lim_{t \to +\infty} g(x, t)/t \leqq \lambda < \lambda_2$ (vedi Notazioni (3.12)) (cioè l'ipotesi (g) vale con $\lambda < \lambda_2$).

Allora:

I) nel caso *a*) del Teorema (4.12) il problema $P_\phi(h)$ ha esattamente due soluzioni u_1 e u_2 tali che $u_1 \leqq u_2$ e $f_h(u_1) < f_h(u_2)$;

II) nel caso *b*) del Teorema (4.12), il problema $P_\phi(h)$ ha un'unica soluzione, oppure esistono due soluzioni u_1 e u_2 tali che $u_1 \leqq u_2$ e l'insieme S delle soluzioni di $P_\phi(h)$ è il segmento

$$S = \{u_1 + \theta(u_2 - u_1) \mid 0 \leqq \theta \leqq 1\}$$

(quindi u_1 è la soluzione minima e u_2 è quella massima); inoltre il funzionale f_h è costante su S.

(Al punto (4.13) di [26] si dà un esempio di ostacolo ϕ per il quale il problema $P_\phi(0)$ con $g(x,u) = \lambda u$ ha un segmento di soluzioni).

In modo analogo si precisano i risultati di molteplicità forniti dal Teorema (4.9) e dalla Proposizione (4.11).

(5.6) Teorema: Valgano per la funzione g le ipotesi del Teorema (4.12) e supponiamo inoltre che per q.o. $x \in \Omega$ risulti:

a) $g(x,\cdot)$ convessa;

b) $\lim_{t \to +\infty} g(x,t)/t \leqq \lambda_2$ (vedi Notazioni (3.12)) (cioè l'ipotesi (*g*) vale con $\lambda = \lambda_2$).

Allora:

I) nel caso *a*) del Teorema (4.12), l'insieme S delle soluzioni del problema $P_\phi(h)$ è unione di un punto u_1 (soluzione minima) e di un convesso S_2:

$$S = \{u_1\} \cup S_2;$$

inoltre f_h è costante su S_2 e $f_h(u_1) < f_h(u_2)$ per ogni $u_2 \in S_2$;

II) nel caso *b*) del Teorema (4.12), il problema $P_\phi(h)$ ha una unica soluzione, oppure, detta u_1 la soluzione minima, esiste un convesso S_2 tale che l'insieme S delle soluzioni del problema $P_\phi(h)$ è

$$S = \{u_1 + \theta(u_2 - u_1) \mid 0 \leqq \theta \leqq 1;\ \ u_2 \in S_2\};$$

inoltre f_h è costante su S.

(Al punto (5.12) è mostrato un esempio di ostacolo ϕ per il quale il problema $P_\phi(0)$, con $g(x,u) = \lambda_2 u$, ha un simile insieme di soluzioni.)

In modo analogo si precisano i risultati di molteplicità forniti dal Teorema (4.9) e dalla Proposizione (4.11). La dimostrazione dei Teoremi (5.5) e (5.6), riportata ai punti (5.10) e (5.11), si basa sui lemmi che seguono.

(5.7) Definizione: Nelle ipotesi (*g*) e (*G*) di (3.1), per ogni $\phi \in \Phi$ e $h \in L^2(\Omega)$ consideriamo la funzione $s_\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ così definita:

$$s_\phi(t) = \min(f_{h,\phi} + I_{P_t})$$

dove P_t è l'iperpiano

$$P_t = \left\{ u \in L^2(\Omega) \,\middle|\, \int_\Omega u e_1 \, dx = t \right\}$$

e I_{P_t} è la sua funzione indicatrice ($I_{P_t}(u) = 0$ se $u \in P_t$, $+\infty$ altrimenti).

Notiamo che, nelle ipotesi (g) e (G), l'esistenza di tale minimo è garantita dal Lemma (3.21).

(5.8) Lemma: Valgano le ipotesi (g) e (G) del punto (3.1), siano $\phi \in \Phi$, $h \in L^2(\Omega)$, $u \in D \cap K_\phi$ (vedi punto (1.1)). Allora:

a) se u un punto di minimo per $f_{h,\phi} + I_{P_t}$ (vedi Definizione (5.7)) con $t = \int_\Omega u e_1 \, dx$ e se $k \in \partial^- s_\phi(t)$, allora $k e_1 \in \partial^- f_{h,\phi}(u)$;

b) per ogni $t \in \mathbf{R}$ il funzionale $(f_{h,\phi} + I_{P_t})$ è convesso se l'ipotesi (g) vale con $\lambda \leqq \lambda_2$ (strettamente convesso se $\lambda < \lambda_2$);

c) se l'ipotesi (g) vale con $\lambda \leqq \lambda_2$, vale il viceversa di *a*), cioè: se $k e_1 \in \partial^- f_{h,\phi}(u)$, allora u è un punto di minimo (unico se $\lambda < \lambda_2$) per il funzionale $(f_{h,\phi} + I_{P_t})$ con $t = \int_\Omega u e_1 \, dx$ e inoltre $k \in \partial^- s_\phi(t)$.

In particolare, per $k = 0$ si ottiene che, se $\lambda \leqq \lambda_2$, il problema $P_\phi(h)$ è equivalente alla equazione $0 \in \partial^- s_\phi(t)$;

d) se l'ipotesi (g) vale con $\lambda \leqq \lambda_2$, la funzione $s_\phi(t) + (\lambda - \lambda_1)(t^2/2)$ è convessa.

Dimostrazione: Il punto *a*) si verifica facilmente; per provare *b*) e *c*) basta osservare che per ogni $v \in D$ si ha

$$f_h(v) \geqq f_h(u) + f_h'(u)[v-u] + \frac{1}{2}\|v-u\|^2_{H_0^{1,2}(\Omega)} - \frac{\lambda}{2}\|v-u\|^2_{L^2(\Omega)};$$

il punto *d*) segue dal fatto che il funzionale

$$f_h(u) + \frac{\lambda - \lambda_1}{2}\left(\int_\Omega u e_1 \, dx\right)^2$$

è convesso se l'ipotesi (g) vale con $\lambda \leqq \lambda_2$.

(5.9) Lemma: Valgano le ipotesi del Lemma (5.1); siano u_1 e $u_2 \in D$ (vedi punto (1.1)) soprasoluzioni per l'operatore $\partial^- f_h$ e supponiamo che $u_1 \leqq u_2$; allora la funzione $\theta \to f_h(u_1 + \theta(u_2 - u_1))$ è continua e non decrescente per $\theta \in [0, 1]$. (In particolare la tesi è vera se u_1 e u_2 sono soluzioni del problema $P_\phi(h)$).

DIMOSTRAZIONE: Osserviamo che

$$\frac{d}{d\theta}[f_h(u_1+\theta(u_2-u_1))]=f_h'(u_1+\theta(u_2-u_1))[u_2-u_1]$$

e quindi basta applicare il Lemma (5.1) per concludere la dimostrazione.

(5.10) DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA (5.5): Nel caso *a*) del Teorema (4.12) esistono t_1' e $t_2' \in \mathbf{R}$ tali che $t_1' < t_2'$ e $s_\phi(t_1') < s_\phi(t_2')$; ne segue che il problema $P_\phi(h)$ ha due soluzioni u_1 e u_2 tali che

$$\int_\Omega u_1 e_1\,dx < \int_\Omega u_2 e_1\,dx \quad \text{e} \quad f_h(u_1) < f_h(u_2).$$

Utilizzando i Lemmi (5.8) e (5.9), possiamo assumere che u_1 sia la soluzione minima (vedi Teorema (3.10)) e che

$$f_h(u_2)=\max\left\{s_\phi(t)\,|\,t \geqq \int_\Omega u_1 e_1\,dx\right\}.$$

Supponiamo per assurdo che esista una soluzione u_3 distinta da u_1 e u_2; allora, per il Lemma (5.8), si ha che $t_3=\int_\Omega u_3 e_1\,dx$ è inferiormente stazionario per s_ϕ ed è distinto da $t_1=\int_\Omega u_1 e_1\,dx$ e $t_2=\int_\Omega u_2 e_1\,dx$.

Faremo vedere che in questo caso esistono delle costanti $a, b, c \in \mathbf{R}$, tali che, posto

$$s(t)=s_\phi(t)+a\frac{t^2}{2}+bt+c,$$

esistono $\tau_2, \tau_3, \tau_4 \in \mathbf{R}$, ed una soluzione $\tilde{u}_3$ tali che

$$t_1<\tau_2<\tau_3<\tau_4, \qquad \int_\Omega \tilde{u}_3 e_1\,dx=\tau_3, \qquad s(t_1)<0,$$

$$s(\tau_2)>0, \qquad s(\tau_3)<0, \qquad s(\tau_4)>0.$$

Da ciò segue che, posto

$$f(u)=f_{h,\phi}(u)+\frac{a}{2}\left(\int_\Omega ue_1\,dx\right)^2+b\left(\int_\Omega ue_1\,dx\right)+c,$$

si ha

$$s(t)=\min\left\{f(u)\,|\,\int_\Omega ue_1\,dx=t\right\}$$

e quindi

$$f(u_1) = s(\tau_1) < 0\,, \qquad f(\tilde{u}_3) = s(\tau_3) < 0\,;$$

mentre

$$f(u) \geqq s(\tau_2) > 0 \quad \text{per ogni } u \in P_{\tau_2} \text{ (vedi Definizione (5.7))},$$

$$f(u) \geqq s(\tau_4) > 0 \quad \text{per ogni } u \in P_{\tau_4}\,.$$

Sia $\bar{u}_3$ un punto di minimo per f nell'insieme

$$\left\{ v \in L^2(\Omega) \,|\, v \geqq u_1\,,\ \tau_2 < \int_\Omega v e_1\, dx < \tau_4 \right\};$$

notiamo che $\tilde{u}_3$ appartiene a questo insieme in quanto u_1 è la soluzione minima e $\tilde{u}_3$ è soluzione; quindi

$$f(\bar{u}_3) < 0 \quad \text{e} \quad f'(\bar{u}_3)[v - \bar{u}_3] \geqq 0 \quad \text{per ogni } v \in D,\ v \geqq u_1\,.$$

Ora sia $\bar{u}_1$ un punto di minimo di f nell'insieme

$$\left\{ v \in L^2(\Omega) \,|\, v \leqq \bar{u}_3\,,\ \int_\Omega v e_1\, dx < \tau_2 \right\};$$

notiamo che questo insieme contiene u_1 e quindi

$$f(\bar{u}_1) < 0 \quad \text{e} \quad f'(\bar{u}_1)[v - \bar{u}_1] \geqq 0 \quad \text{per ogni } v \in D \cap K_{\phi, \bar{u}_3}$$

(in particolare per $v = \bar{u}_3$).

Per ogni $\theta \in [0,1]$ poniamo $u_\theta = \bar{u}_1 + \theta(\bar{u}_3 - \bar{u}_1)$; per la convessità di $g(x, \cdot)$ si ha:

$$\frac{d}{d\theta}[f(u_\theta)] = f'(u_\theta)[\bar{u}_3 - \bar{u}_1] \geqq (1-\theta)\, f(\bar{u}_1)[\bar{u}_3 - \bar{u}_1] + \theta f'(\bar{u}_3)[\bar{u}_3 - \bar{u}_1] \geqq 0\,;$$

quindi la funzione $\theta \to f(u_\theta)$ non è decrescente per $\theta \in [0,1]$. Ma questo è assurdo perché $f(\bar{u}_3) < 0$, mentre

$$f(u_{\theta_2}) \geqq s_\phi(\tau_2) > 0 \quad \text{per } \theta_2 = \frac{\tau_2 - \int_\Omega \bar{u}_1 e_1\, dx}{\int_\Omega (\bar{u}_3 - \bar{u}_1)\, e_1\, dx} \in (0,1)\,.$$

Resta quindi da provare l'esistenza delle costanti reali a, b, c sopradette, nell'ipotesi che esista $t_3 \neq t_1$, t_2 tale che $0 \in \partial^- s_\phi(t_3)$.

Esaminiamo i vari casi possibili:

1) sia $t_3 > t_2$: siccome abbiamo assunto che

$$s_\phi(t_2) = \max\{s_\phi(t) \,|\, t \geqq t_1\}\,,$$

deve essere

$$s_\phi(t) \leqq s_\phi(t_2) \quad \text{per ogni } t \in [t_2, t_3].$$

D'altra parte la funzione $\theta \to f_h(u_1 + \theta(u_3 - u_1))$ è non decrescente per $\theta \in [0, 1]$ (vedi Lemma (5.9)); perciò risulta

$$s_\phi(t_3) = f_h(u_3) \geqq f_h(u_1 + \theta_2'(u_3 - u_1)) \geqq s_\phi(t_2)$$

per $\theta_2' = (t_2 - t_1)/(t_3 - t_1) \in (0, 1)$. Quindi $s_\phi(t_2) = s_\phi(t_3)$ (si può anche provare con analogo procedimento che s_ϕ è costante nell'intervallo $[t_2, t_3]$); da ciò segue l'esistenza delle costanti a, b, c sopradette (con $a > 0$).

2) sia $t_1 < t_3 < t_2$; allora, per la non decrescenza delle funzioni $\theta \to f_h(u_1 + \theta(u_3 - u_1))$ e $\theta \to f_h(u_1 + \theta(u_2 - u_1))$ per $\theta \in [0, 1]$ (vedi Lemma (5.9)) deve essere $s_\phi(t_1) \leqq s_\phi(t_3) \leqq s_\phi(t_2)$.

Se $s_\phi(t_3) = s_\phi(t_2)$, si conclude come nel caso 1).

Se $s_\phi(t_3) = s_\phi(t_1)$, allora s_ϕ è costante nell'intervallo $[t_1, t_3]$: infatti, per la non decrescenza della funzione $\theta \to f_h(u_1 + \theta(u_3 - u_1))$ per $t \in [0, 1]$, risulta $s_\phi(t) \leqq s_\phi(t_3)$ per $t \in [t_1, t_3]$; d'altra parte, se fosse $s_\phi(\bar{t}) < s_\phi(t_3)$ per qualche $\bar{t} \in [t_1, t_3]$ si potrebbe trovare una $\tilde{u}$ soluzione di $P_\phi(h)$ come punto di minimo di $f_{h,\phi}$ nell'insieme

$$\left\{ u \in L^2(\Omega) \,\middle|\, \int_\Omega u e_1 \, dx < t_3 \right\}$$

e sarebbe $f_h(\tilde{u}) \leqq s_\phi(\bar{t}) < s_\phi(t_3) = s_\phi(t_1)$, contro il fatto che $f_h(\tilde{u}) \geqq f_h(u_1) = s_\phi(t_1)$ per il Lemma (5.9), in quanto $\tilde{u} \geqq u_1$ (soluzione minima).

Perciò anche in questo caso si trovano le costanti a, b, c sopradette (con $a < 0$).

Resta da esaminare il caso in cui $s_\phi(t_1) < s_\phi(t_3) < s_\phi(t_2)$ con $t_1 < t_2 < t_3$: siccome t_3 è inferiormente stazionario per s_ϕ, si ottiene per $\varepsilon > 0$ sufficientemente piccolo:

$$\frac{s_\phi(t_3) - s_\phi(t_3 - \varepsilon)}{\varepsilon} < \min\left(\frac{s_\phi(t_2) - s_\phi(t_3)}{t_2 - t_3}, \frac{s_\phi(t_3) - s_\phi(t_1)}{t_3 - t_1} \right).$$

Da ciò segue evidentemente l'esistenza delle costanti a, b, c cercate (anzi si può prendere in questo caso $a = 0$); quindi il punto I) è completamente dimostrato.

Proviamo il punto II): nel caso b) del Teorema (4.12) la funzione s_ϕ è non crescente, perché altrimenti il problema $P_\phi(h - \varepsilon e_1)$ avrebbe soluzione per $\varepsilon > 0$ sufficientemente piccolo (infatti per un tale ε la funzione $s_\phi(t) - \varepsilon t$ avrebbe un minimo locale). Sia u_1 la soluzione minima di $P_\phi(h)$; allora, se esiste un'altra soluzione u_2, risulta per il Lemma (5.9) $f_h(u_1) \leqq f_h(u_2)$; quindi, posto

$$t_1 = \int_\Omega u_1 e_1 \, dx \quad \text{e} \quad t_2 = \int_\Omega u_2 e_1 \, dx,$$

deve essere $s_\phi(t_1) = f_h(u_1) = s_\phi(t_2) = f_h(u_2)$. Di conseguenza, s_ϕ è costante nell'intervallo

$[t_1, t_2]$; inoltre per la non decrescenza della funzione $\theta \to f_h(u_1 + \theta(u_2 - u_1))$ per $\theta \in [0,1]$ (vedi Lemma (5.9)), si ha $f_h(u_1 + \theta(u_2 - u_1)) = s_\phi((t_1 + \theta(t_2 - t_1)) = s_\phi(t_1)$ e quindi $u_1 + \theta(u_2 - u_1)$ è soluzione di $P_\phi(h)$ per ogni $\theta \in [0,1]$; da qui, tenendo conto che $(f_h + I_{P_t})$ è strettamente convesso per ogni $t \in \mathbf{R}$ se $\lambda < \lambda_2$ (e quindi ha un solo punto di minimo) segue facilmente il punto II) e questo conclude la dimostrazione.

(5.11) Dimostrazione del Teorema (5.6): Come nella dimostrazione del Teorema (5.5), si prova che nel caso *a*) del Teorema (4.12) la funzione s_ϕ definita al punto (5.7) ha esattamente due punti inferiormente stazionari t_1 e t_2 e sono tali che $t_1 < t_2$ e $s_\phi(t_1) < s_\phi(t_2)$. Di conseguenza l'insieme delle soluzioni di $P_\phi(h)$ è $S = S_1 \cup S_2$, dove S_1 e S_2 sono rispettivamente l'insieme dei punti di minimo di $(f_{h,\phi} + I_{P_{t_1}})$ e di $(f_{h,\phi} + I_{P_{t_2}})$.

Evidentemente la soluzione minima u_1 (che esiste per il Teorema (3.10)) è in S_1. Proviamo che $S_1 = \{u_1\}$: infatti, se $u \in P_{t_1}$ è soluzione di $P_\phi(h)$, si ha $u - u_1 \geqq 0$, perché u_1 è soluzione minima e inoltre $\int_\Omega (u - u_1)\, e_1\, dx = 0$ perché u_1 e $u \in P_{t_1}$; di conseguenza $u = u_1$ e quindi il punto I) è provato.

Proviamo il punto II): sia u_1 la soluzione minima, poniamo

$$t_1 = \int_\Omega u_1 e_1\, dx, \qquad t_2 = \max\{t \in \mathbf{R} \mid s_\phi(t) = s_\phi(t_1)\};$$

sia S_2 l'insieme dei punti di minimo di $(f_{h,\phi} + I_{P_{t_2}})$. Allora, come nella dimostrazione del Teorema (5.5), si prova che $u_1 + \theta(u_2 - u_1)$ è soluzione di $P_\phi(h)$ per ogni $\theta \in [0,1]$, $u_2 \in S_2$ e inoltre $f_h(u_1 + \theta(u_2 - u_1)) = f_h(u_1)$.

Resta da provare che ogni soluzione di $P_\phi(h)$ è di questo tipo, cioè che per ogni soluzione $u \neq u_1$ risulta $t_1 < \int_\Omega u e_1\, dx \leqq t_2$ e inoltre

$$u_1 + \bar{t}(u - u_1) \in S_2 \qquad \text{per } \bar{t} = \frac{t_2 - t_1}{\int_\Omega u e_1\, dx - t_1}. \tag{1}$$

Consideriamo la funzione $t \to f_h(u_1 + t(u - u_1))$ per $t \geqq 0$, per il Lemma (5.9) e la non crescenza di s_ϕ, si ha

$$f_h(u_1 + t(u - u_1)) = f_h(u_1) \qquad \text{per } t \in [0,1]. \tag{2}$$

Di conseguenza risulta

$$s_\phi(t_1) = f_h(u_1) = f_h(u) = s_\phi\left(\int_\Omega u e_1\, dx\right),$$

per cui si ha $t_1 < \int_\Omega u e_1\, dx \leqq t_2$.

Basta ora provare che la funzione $t \to f_h(u_1 + t(u - u_1))$ è non crescente per $t \geqq 0$, perché allora la (1) segue da (2). A questo scopo osserviamo che

$$\frac{d}{dt} f_h(u_1 + t(u - u_1)) = f_h'(u_1 + t(u - u_1))[u - u_1];$$

per la (2) si ha

$$f_h'(u_1 + t(u - u_1))[u - u_1] = 0 \quad \text{per } t \in [0, 1]$$

e quindi, fissato $t' \in (0, 1)$, risulta

$$(3) \quad f_h'(u_1 + t(u - u_1))[u - u_1] = f_h'(u_1 + t(u - u_1))[u - u_1] -$$

$$- f_h'(u_1 + t'(u - u_1))[u - u_1] = (t - t') \int_\Omega |D(u - u_1)|^2 \, dx -$$

$$- \int_\Omega [g(x, u_1 + t(u - u_1)) - g(x, u_1 + t'(u - u_1))] \cdot (u - u_1) \, dx ;$$

ora osserviamo che per la (2) si ha

$$(1 - t') \left\{ \int_\Omega |D(u - u_1)|^2 \, dx - \frac{1}{1 - t'} \int_\Omega [g(x, u) - g(x, u_1 + t'(u - u_1))] \cdot (u - u_1) \, dx \right\} = 0 ,$$

cioè

$$\int_\Omega |D(u - u_1)|^2 \, dx = \frac{1}{1 - t'} \int_\Omega [g(x, u) - g(x, u_1 + t'(u - u_1))](u - u_1) \, dx ;$$

ma siccome $g(x, \cdot)$ è convessa, si ha per $t \geqq 1$

$$\frac{1}{t - t'} [g(x, u_1 + t(u - u_1)) - g(x, u_1 + t'(u - u_1))] \geqq$$

$$\geqq \frac{1}{1 - t'} [g(x, u) - g(x, u_1 + t'(u - u_1))] ;$$

quindi dalla (3) si ottiene $f_h'(u_1 + t(u - u_1))[u - u_1] \leqq 0$ per $t \geqq 0$ e questo conclude la dimostrazione.

(5.12) Esempio: Sia Ω un aperto limitato di $\mathbf{R}^n$ ed e_2 un'autofunzione relativa al secondo autovalore λ_2 (vedi Notazioni (3.12)). Sia $\phi = -|e_2|$ e $g(x, t) = \lambda_2 t$; allora l'insieme delle soluzioni del problema $P_\phi(0)$ è il «triangolo»

$$\{\phi + \theta(te_2 - \phi) \mid \theta \in [0, 1], \ t \in [-1, 1]\} .$$

Quindi può effettivamente verificarsi la situazione descritta al punto II) del Teorema (5.6): nelle notazioni di quel teorema, $u_1 = \phi$ è la soluzione minima e $S_2 = \{te_2 \mid t \in [-1, 1]\}$.

BIBLIOGRAFIA

[1] H. Amann, *Saddle points and multiple solutions of differential equations*, Math. Z., 169 (1979).

[2] H. Amann - E. Zehnder, *Non trivial solutions for a class of nonresonance problems and applications to nonlinear differential equations*, Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa, 7 (1980).

[3] A. Ambrosetti, *Elliptic equations with jumping nonlinearities*, J. Math. Phys. Sc., 18 (1984).

[4] A. Ambrosetti - G. Prodi, *On the inversion of some differential mappings with singularities between Banach Spaces*, Ann. Mat. Pura Appl., 93 (1972).

[5] A. Ambrosetti - P. Rabinowitz, *Dual variational methods in critical point theory and applications*, J. Funct. Anal., 14 (1973).

[6] H. Brezis, *Opérateurs maximaux monotones et semigroupes de contractions dans les espaces de Hilbert*, North-Holland Mathematics Studies, n. 5, Notas de Matematica (50), Amsterdam-London (1973).

[7] H. Brezis, *Monotonicity methods in Hilbert spaces and some applications to nonlinear partial differential equations* in, *Contributions to Nonlinear Analysis*, edited by E. H. Zarantonello, Academic Press.

[8] H. Brezis - G. Stampacchia, *Sur la regularité de la solution d'inequations elliptiques*, Bull. Soc. Math., France, 98 (1968).

[9] G. Chobanov - A. Marino - D. Scolozzi, *Analisi non lineare sottodifferenziale: 2 - Molteplicità dei punti stazionari per una classe di funzioni discontinue. Condizioni di non tangenza. Pendenza e regolarizzazione*, preprint Dip. Mat. Pisa, n. 167, (1986).

[10] G. Chobanov - A. Marino - D. Scolozzi, *Analisi non lineare sottodifferenziale: 1 - Una classe di problemi vincolati. Autovalori dell'operatore di Laplace rispetto ad un ostacolo e relativa equazione di evoluzione*, preprint Dip. Mat. Pisa, n. 166 (1986).

[11] G. Chobanov - A. Marino - D. Scolozzi, *Evolution equation for the eigenvalue problem for the Laplace Operator with respect to an obstacle*, preprint Dip. Mat. Pisa, n. 214 (1987).

[12] E. De Giorgi - M. De Giovanni - A. Marino - M. Tosques, *Evolution equations for a class of non-linear operators*, Atti Accad. Naz. Lincei, 75 (1983).

[13] E. De Giorgi - A. Marino - M. Tosque, *Problemi di evoluzione in spazi metrici e curve di massima pendenza*, Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sc. Fis. Mat. Natur., (8), 68 (1980).

[14] E. De Giorgi - A. Marino - M. Tosques, *Funzioni (p, q)-convesse*, Atti Accad. Naz. Lincei. Rend. Cl. Sc. Fis. Mat. Natur., (8), 73 (1982).

[15] M. De Giovanni - A. Marino - M. Tosques, *Evolution equations with lack of convexity*, in *Nonlinear Analysis-Theory, Methods & Applications*, V. 9, n. 12 (1985).

[16] D. Kinderlehrer - G. Stampacchia, *An Introduction to Variational Inequalities and their Applications*, Academic Press, New York (1980).

[17] H. Levi - G. Stampacchia, *On the regularity of the solutions of a variational inequality*, Comm. Pure Appl. Math., 22 (1969).

[18] J. L. Lions - G. Stampacchia, *Variational inequalities*, Comm. Pure Appl. Math., 20 (1967).

[19] K. A. Lusternik - G. Schnirelmann, *Methodes topologiques dans les problèmes variationnels*, Actualités Sci. Ind. Paris, 188 (1934).

[20] A. Marino - D. Passaseo, lavoro in preparazione.

[21] A. Marino - D. Scolozzi, *Punti inferiormente stazionari ed equazioni di evoluzione con vincoli unilaterali non convessi*, Rend. Sem. Mat. Fis. Milano, V. 52 (1982).

[22] A. Marino - D. Scolozzi, *Geodetiche con ostacolo*, Boll. U.M.I., B(6), 2 (1963).

[23] R. Palais, *Homotopy theory of infinite dimensional manifolds*, Topology, B (1966).

[24] R. Palais, *Lusternik-Schnirelmann theory on Banach manifolds*, Topology, B (1966).

[25] R. Palais - S. Smale, *A generalised Morse Theory*, Bull Amer. Math. Soc., 70 (1964).

[26] D. Passaseo, *Molteplicità di soluzioni per certe disequazioni variazionali di tipo ellittico*, preprint Dip. Mat. di Pisa, n. 236 (1988) (in pubblicazione sul Boll. U.M.I.).
[27] P. Quittner, *Solvability and multiplicity results for variational inequalities*, (in corso di stampa).
[28] P. H. Rabinowitz, *Variational methods for non-linear eigenvalue problems*, in *Eigenvalue of Non-Linear Problems*, Edizioni Cremonese, Roma (1974).
[29] A. Szulkin, *On a class of variational inequalities involving gradient operators*, J. Math. Anal. Appl., 100 (1984).
[30] A. Szulkin, *On the solvability of a class of semilinear variational inequalities*, Rend. Mat. (7), 4 (1984).
[31] A. Szulkin, *Positive solutions of variational inequalities: a degree-theoretic approach*, J. Differential Equations, 57 (1985).
[32] G. Stampacchia, *Le problème de Dirichlet pour les equations elliptiques du second ordre à coefficients discontinus*, Ann. Inst. Fourier. Grenoble, 15 (1965).
[33] G. Stampacchia, *Regularity of solutions of some variational inequalities*, in *Proceedings of Symposia on Nonlinear Functional Analysis*, V. 18, Part. 1 (1980).
[34] M. M. Vainberg, *Variational Methods for the Study of Nonlinear Operators*, Holden Day, San Francisco (1964).

Direttore responsabile: Prof. A. Ballio - Autorizz. Trib di Roma n. 7269 dell'8-12-1959
«Monograf» - Va Collamarini, 5 - Bologna