Rendiconti
Accademia Nazionale delle Scienze detta dei XL
Memorie di Matematica e Applicazioni
113° (1995), Vol. XIX, fasc. 1, pagg. 123-128

GIUSEPPE JACOPINI (*)

Una misura invariante per le traslazioni che prolunga la misura di Lebesgue sulla retta (**)

RIASSUNTO. — Si dimostra che è possibile estendere la misura di Lebesgue λ in una misura ν che sia ancora invariante per le traslazioni, ma per la quale esista un insieme misurabile E che verifichi, per ogni insieme boreliano A, l'eguaglianza $\nu(E \cap A) = (1/2)\lambda(A)$, che sia periodico, con periodi arbitrariamente piccoli, e che sia trasformato nel proprio complementare da traslazioni di ampiezza arbitrariamente piccola.

Une mesure invariante par translation qui prolonge la mesure de Lebesgue sur la droite

RÉSUMÉ. — On montre qu'on peut prolonger la mesure de Lebesgue λ en une mesure ν qui est encore invariante par translation, mais pour laquelle il existe un ensemble mesurable E qui vérifie, pour tout ensemble borélien A, l'égalité $\nu(E \cap A) = (1/2)\lambda(A)$, qui est périodique, avec des périodes arbitrairement petites, et qui est transformé en son complémentaire par des translations de longueur arbitrairement petite.

Sono ben note le due seguenti proprietà della misura di Lebesgue:

(1) La misura di Lebesgue λ sulla tribù boreliana di R può essere caratterizzata, a meno di una costante moltiplicativa, come «misura di Haar», cioè come misura di Borel, non identicamente nulla, invariante rispetto alle traslazioni del gruppo additivo R.

(*) Indirizzo dell'Autore: Dipartimento di Matematica «Guido Castelnuovo», Piazzale Aldo Moro 2, 00185 Roma.
(**) Memoria presentata il 23 marzo 1995 da Giorgio Letta, uno dei XL.

(2) Se E è un insieme boreliano, allora, per quasi ogni punto x di $\mathbb{R}$, il rapporto

$$\frac{\lambda(E \cap [x-h, x+h])}{2h}$$

converge, al tendere di h a zero, verso 1 o verso 0, secondo che x sia un elemento di E o di $\mathbb{R} \setminus E$.

Intuitivamente, quest'ultima proprietà (conseguenza immediata del teorema di derivazione di Lebesgue) si può così interpretare: se si immagina di colorare in nero i punti di E, e in bianco quelli del complementare, è da prevedere che i colori non risulteranno molto mescolati, ma al contrario formeranno macchie quasi completamente nere o quasi completamente bianche. Infatti quasi ogni punto avrà come colore quello predominante nelle sue immediate vicinanze.

Nella presente Nota, ci proponiamo di mostrare che è possibile estendere la misura di Lebesgue λ in una misura ν che sia ancora invariante rispetto alle traslazioni, ma per la quale esista un insieme misurabile E «uniformemente grigio», cioè tale che, al variare di A nella classe degli intervalli della forma $[x-h, x+h]$ (anzi, più in generale, nella classe degli insiemi boreliani di misura finita e non nulla), il rapporto $\nu(E \cap A) / \lambda(A)$ si mantenga costantemente eguale a $1/2$.

Più precisamente (e più generalmente), ci proponiamo di dimostrare il teorema seguente:

Teorema: *Esistono una tribù $\mathcal{K}$ su $\mathbb{R}$, contenente propriamente la tribù boreliana, e una misura ν su $\mathcal{K}$, prolungante la misura di Lebesgue λ e dotata delle due proprietà seguenti:*

(a) ν è invariante per le traslazioni, nel senso che, per ogni elemento A di $\mathcal{K}$ e ogni numero reale t, si ha

$$A + t \in \mathcal{K}, \qquad \nu(A+t) = \nu(A).$$

(b) Per ogni numero reale r compreso tra 0 e 1, esiste un elemento E di $\mathcal{K}$, tale che, per ogni insieme boreliano A di $\mathbb{R}$, si abbia

$$\nu(E \cap A) = r\lambda(A).$$

Allo scopo di dimostrare questo teorema, cominceremo col fissare alcune convenzioni e col dimostrare alcuni lemmi.

Indicheremo con κ il primo ordinale avente la potenza del continuo. Inoltre chiameremo brevemente *successione transfinita* ogni famiglia che abbia come insieme degli indici l'insieme (ben ordinato) costituito da tutti gli ordinali α con $\alpha < \kappa$.

Considereremo $\mathbb{R}$ come spazio vettoriale sul corpo $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali. Per questo spazio vettoriale, per il quale una base si chiama una *base di Hamel* (cfr. [1], § 3, n° 1, p. 34), gli endomorfismi sono semplicemente gli endomorfismi del gruppo additi-

vo R. Inoltre, essendo Q numerabile, il sottospazio vettoriale generato da un insieme A di numeri reali è numerabile se A è finito, mentre ha la stessa potenza di A se A è infinito.

Diremo che una parte H di R è *spessa* se essa incontra ogni insieme boreliano non trascurabile secondo la misura di Lebesgue. Affinché ciò accada, è sufficiente che H incontri ogni insieme compatto non trascurabile. In modo analogo si definisce il concetto di parte spessa di R^2.

Il risultato essenziale per la dimostrazione del teorema enunciato all'inizio è l'esistenza di un endomorfismo di R il cui grafico sia spesso. Di questo risultato è suggerita, come esercizio, una dimostrazione in [3], (62.6, p. 276-277). Noi ne esporremo una dimostrazione leggermente diversa, e forse un po' più semplice (si vedano i successivi lemmi 2 e 3).

LEMMA 1: *Esiste una base di Hamel spessa in* R.

DIMOSTRAZIONE: Poiché ogni parte libera di R è contenuta in una base di Hamel, basta provare che esiste una parte libera che sia spessa. A questo scopo, cominciamo con l'osservare che, in R, ogni insieme compatto non trascurabile ha la potenza del continuo. Inoltre la classe costituita da tutti gli insiemi compatti non trascurabili ha a sua volta la potenza del continuo, sicché può essere rappresentata come l'insieme dei termini di una successione transfinita $(K_\alpha)_{\alpha<\kappa}$. Considerando una «funzione di scelta» in R (ossia una funzione che a ciascuna parte non vuota di R associ un suo elemento) e applicando il principio di definizione per ricorrenza transfinita, si vede che esiste una successione transfinita $(x_\alpha)_{\alpha<\kappa}$ di numeri reali, tale che, per ogni ordinale β minore di κ, il numero x_β appartenga a K_β, ma non allo spazio vettoriale generato dall'insieme (di potenza inferiore a quella del continuo) $\{x_\alpha : \alpha < \beta\}$.

Ragionando per ricorrenza transfinita, si vede che, per ogni β, l'insieme $\{x_\alpha : \alpha < \beta\}$ è libero. Ne segue che l'intero insieme $\{x_\alpha : \alpha < \kappa\}$ è libero. Inoltre quest'ultimo insieme è spesso in R: infatti, per ogni β, la sua intersezione con K_β non è vuota, in quanto contiene il punto x_β.

Il lemma è dunque dimostrato.

LEMMA 2: *Esiste un endomorfismo di* R *che abbia nucleo e immagine entrambi spessi.*

DIMOSTRAZIONE: Sia H una base di Hamel spessa in R, e si consideri la decomposizione di R in somma diretta dei due sottospazi vettoriali M, N rispettivamente generati da $H \cap R_+$ e da $H \cap (R \setminus R_+)$. Si denoti poi con f l'applicazione che, ad ogni numero reale $x = y + z$ (con $y \in M$, $z \in N$), associa y. Essa può essere caratterizzata come l'unico endomorfismo di R ammettente M come immagine e N come nucleo. Proviamo che la sua immagine M è spessa in R. Sia dunque A un insieme boreliano di R, non trascurabile, e mostriamo che esso incontra M. Pur di sostituire, se necessario, A con $-A$, si può supporre

che l'insieme $A \cap \mathrm{R}_+$ non sia trascurabile. Questo insieme incontra allora $H \cap \mathrm{R}_+$, e quindi M.

Allo stesso modo si vede che N è spesso in R. L'endomorfismo f possiede dunque le proprietà desiderate.

Osservazione: Partendo da un endomorfismo f di R che abbia immagine e nucleo entrambi spessi, se ne può facilmente ottenere un altro che possieda in più la proprietà di lasciar fisso il numero 1 (e quindi ogni numero razionale). Basta per questo fissare un qualsiasi numero reale c, non appartenente al nucleo di f, e considerare l'endomorfismo $x \mapsto f(cx)/f(c)$.

Lemma 3: Sia f un endomorfismo di R *con immagine e nucleo entrambi spessi. Allora il grafico di f è spesso in* R^2.

Dimostrazione: Denotiamo con M, N, G rispettivamente l'immagine, il nucleo e il grafico di f. Osserviamo che, per ogni elemento y di M, l'insieme $f^{-1}(y)$, essendo della forma $x_0 + N$, è spesso in R. Sia C un insieme boreliano di R^2, non trascurabile, e mostriamo che esso incontra G. A questo scopo, consideriamo l'insieme B costituito dai numeri reali y per i quali la «sezione orizzontale»

$$C^{-1}(y) = \{x : (x, y) \in C\}$$

non è trascurabile. L'insieme B è boreliano e non trascurabile: esso incontra dunque M. Sia y un elemento di $B \cap M$. Allora la sezione $C^{-1}(y)$ ha intersezione non vuota con l'insieme spesso $f^{-1}(y)$. Se x è un elemento di questa intersezione, il punto (x, y) appartiene a $C \cap G$.

Nel seguito, denoteremo con T il gruppo additivo R/Z, e con φ l'omomorfismo naturale di R su T (definito da $\varphi(x) = x + \mathrm{Z}$). Il gruppo T è compatto, e la sua tribù boreliana è costituita dagli insiemi della forma $\varphi(A)$, con A insieme boreliano di $[0, 1[$. Su questa tribù esiste un'unica misura normalizzata che sia una misura di Haar, cioè che sia invariante per le traslazioni: essa è la misura μ definita ponendo

$$\mu(\varphi(A)) = \lambda(A)$$

per ogni insieme boreliano A di $[0, 1[$. Sulla tribù boreliana del gruppo $\mathrm{R} \times \mathrm{T}$ considereremo la misura prodotto $\lambda \otimes \mu$, che è, a sua volta, una misura di Haar (cfr. [2], (14.2.7), p. 230).

Lemma 4: *Sia f un endomorfismo di* R, *con immagine e nucleo entrambi spessi, e si ponga $g = \varphi \circ f$. Allora g è un omomorfismo del gruppo additivo* R *nel gruppo additivo* T, *con nucleo spesso in* R, *immagine spessa in* T, *e grafico spesso in* $\mathrm{R} \times \mathrm{T}$.

Dimostrazione: Il nucleo di g è spesso in R perché contiene quello di f. L'immagine di g è spessa in T perché, se B è un insieme boreliano di T, non trascurabile

secondo μ, l'insieme $\varphi^{-1}(B)$, non essendo trascurabile secondo λ, incontra l'immagine di f.

Infine, il fatto che il grafico di g sia spesso in $\mathrm{R} \times \mathrm{T}$ si dimostra ragionando come nel lemma precedente.

Siamo ora in grado di dimostrare il teorema enunciato all'inizio.

Dimostrazione del Teorema: Siano f e g come nel Lemma 4, e si denoti con G il grafico di g. Questo grafico, in quanto immagine dell'omomorfismo $x \mapsto (x, g(x))$, è un sottogruppo di $\mathrm{R} \times \mathrm{T}$. Consideriamo su di esso la tribù boreliana, cioè la tribù $\mathcal{G}$ costituita dagli insiemi della forma $C \cap G$, con C insieme boreliano di $\mathrm{R} \times \mathrm{T}$. Grazie al fatto che G è spesso, è possibile definire su $\mathcal{G}$, senza ambiguità, una misura γ mediante la formula

$$\gamma(C \cap G) = (\lambda \otimes \mu)(C)$$

(si veda [3], 17.A, p. 75). Essendo $\lambda \otimes \mu$ invariante rispetto alle traslazioni del gruppo $\mathrm{R} \times \mathrm{T}$, è chiaro che γ è invariante rispetto alle traslazioni del gruppo G.

La proiezione di G sur R, ossia l'isomorfismo p di G su R che ad ogni elemento di G associa la sua prima coordinata, permette di trasportare la tribù $\mathcal{G}$ in una tribù $\mathcal{H}$ su R, e la misura γ in una misura ν su $\mathcal{H}$.

Essendo γ invariante per le traslazioni del gruppo G, è chiaro che ν è invariante per le traslazioni del gruppo R.

Inoltre $\mathcal{H}$ contiene la tribù boreliana di R, e ν prolunga λ. Infatti, se A è un insieme boreliano di R, si ha $A = p((A \times \mathrm{T}) \cap G)$, e quindi

$$\nu(A) = \gamma((A \times \mathrm{T}) \cap G) = (\lambda \otimes \mu)(A \times \mathrm{T}) = \lambda(A).$$

Rimane infine da provare che ν possiede la proprietà (b). A questo scopo, fissato il numero reale r compreso tra 0 e 1, e scelto un insieme boreliano B di T con $\mu(B) = r$ (per esempio, $B = \varphi([0, r[)$), si ponga

$$E = g^{-1}(B) = p((\mathrm{R} \times B) \cap G).$$

Allora, per ogni insieme boreliano A di R, risulta

$$E \cap A = p((A \times B) \cap G),$$

e quindi:

$$\nu(E \cap A) = \gamma((A \times B) \cap G) = \lambda(A)\mu(B) = r\lambda(A).$$

Il teorema è dunque dimostrato.

Osservazione: Conservando le notazioni della precedente dimostrazione, si denoti con K il nucleo (spesso) dell'omomorfismo g. È chiaro che l'insieme $E = g^{-1}(B)$ è trasformato in se stesso da ogni traslazione di R del tipo $x \mapsto x + t$, con $t \in K$. Se poi, co-

m'è lecito, si suppone che l'endomorfismo f lasci fisso ogni numero razionale, e si prende $r = 1/2$, $B = \varphi([0, 1/2[)$, si vede che ogni traslazione di R del tipo $x \mapsto x + t$, con t appartenente all'insieme spesso $1/2 + K$, trasforma l'insieme E nel suo complementare.

BIBLIOGRAFIA

[1] N. Bourbaki, *Algèbre linéaire*, Hermann (1955).
[2] J. Dieudonné, *Éléments d'analyse*, Gauthiers-Villars (1968).
[3] P. R. Halmos, *Measure Theory*, Van Nostrand (1950).

Direttore responsabile: Prof. A. Ballio - Autorizz. Trib. di Roma n. 7269 dell'8-12-1959
«Monograf» - Via Collamarini, 5 - Bologna