Rendiconti
Accademia Nazionale delle Scienze detta dei XL
Memorie di Matematica e Applicazioni
113° (1995), Vol. XIX, fasc. 1, pagg. 191-246

LUIGI AMBROSIO (*)

Movimenti minimizzanti (**)

RIASSUNTO. — Si studiano problemi di evoluzione di tipo variazionale mediante un procedimento di discretizzazione temporale e minimizzazione. Vengono analizzati esempi in dimensione finita, in spazi di Hilbert, in spazi metrici. L'ultima parte del lavoro è dedicata a un problema di evoluzione di tipo geometrico, il moto di frontiere secondo la curvatura media.

Minimizing Movements

SUMMARY. — We study variational evolution problems following a time discretization and minimization method. We analyze examples in Euclidean spaces, in Hilbert spaces, in metric spaces. The last part of the paper is devoted to a geometric evolution problem, the flow of boundaries by mean curvature.

INTRODUZIONE

Nello studio di problemi di evoluzione di tipo variazionale, della forma

$$u'(t) = -\nabla f(u(t)), \qquad u(0) = u_0, \tag{1}$$

per un funzionale f definito in uno spazio di Hilbert H, un metodo naturale per calcolare soluzioni approssimate è quello di scegliere un parametro di discretizzazione temporale $\tau > 0$ e di definire ricorsivamente una successione $x_\tau(k)$ ponendo $x_\tau(0) = u_0$ e scegliendo $x_\tau(k+1)$ tra i minimi di

$$y \mapsto f(y) + \frac{1}{2\tau}|y - x_\tau(k)|^2 \tag{2}$$

al variare di y in H. In opportune ipotesi su f si trova che le funzioni $u_\tau([t/\tau])$ convergono uniformemente alla soluzione dell'equazione (1), detta anche *curva di massima pendenza* di f. Questo tipo di approssimazione è studiato ad esempio da Brezis in [4] per

(*) Indirizzo dell'Autore: Ist. Mat. Appl. «U. Dini», Via Bonanno 25 Bis, 56100 Pisa.
(**) Memoria presentata il 18 Luglio 1995 da Ennio De Giorgi, uno dei XL.

funzioni convesse e più in generale per gli operatori massimali monotoni. Un procedimento simile di minimizzazione in tempi successivi è anche usato da Marino, Saccon e Tosques in [21] per costruire curve di massima pendenza di funzioni definite in spazi metrici.

Ispirato anche da un recente lavoro di Almgren-Taylor-Wang [1] dedicato all'evoluzione di frontiere secondo la curvatura media, De Giorgi ha proposto in [8] un metodo generale da lui chiamato *metodo dei movimenti minimizzanti*, che unifica diversi problemi legati al calcolo delle variazioni, le equazioni alle derivate parziali, la teoria geometrica della misura. L'idea è quella di chiamare movimento minimizzante ogni limite puntuale di una successione $u_\tau([t/\tau])$ costruita minimizzando ricorsivamente un opportuno funzionale.

È per certi versi sorprendente il fatto che il metodo dei movimenti minimizzanti produca risultati interessanti anche al di fuori di equazioni di tipo variazionale e con funzionali da minimizzare diversi da quello considerato in (2) (vedi gli Esempi 2.2 e 2.3). Nello studio del lavoro [1] vedremo inoltre che, pur studiando un problema di tipo variazionale, non sempre il funzionale da minimizzare è una perturbazione col quadrato di una distanza della funzione f.

Queste dispense sono suddivise in tre capitoli. Nel primo diamo le definizioni di movimento minimizzante e movimento minimizzante generalizzato, sviluppando una serie di esempi in dimensione finita ed ispirandoci sostanzialmente a [8].

Nel secondo capitolo sviluppiamo la teoria in spazi di Hilbert, trattando il caso delle funzioni convesse. In questo caso la monotonia del sottodifferenziale garantisce unicità della soluzione di

$$u'(t) \in -\partial f(u(t)), \qquad u(0) = u_0, \qquad u \text{ assolutamente continua in } [0, +\infty)$$

e forti stime di convergenza di $u_\tau([t/\tau])$ a $u(t)$. Nello stesso capitolo, riprendendo le tecniche sviluppate in [21], daremo alcuni teoremi di convergenza e regolarità validi in spazi metrici arbitrari.

Nel terzo capitolo vedremo invece un'applicazione del metodo dei movimenti minimizzanti ad un problema in questi anni largamente studiato, l'evoluzione di superfici k-dimensionali secondo la curvatura media, che dal punto di vista euristico corrisponde alla curva di massima pendenza del funzionale area k-dimensionale. Nel caso delle superfici di codimensione 1, sfruttando l'identificazione di queste con bordi di insiemi, è stata data in [1] una nozione debole di evoluzione per curvatura media che rientra nel quadro generale dei movimenti minimizzanti.

1. - Movimenti minimizzanti: definizioni ed esempi in R^n.

Definizione 1.1: Sia S uno spazio topologico e

$$\mathcal{F}(\lambda, k, v, w): (1, +\infty) \times N \times S \times S \to \overline{R}$$

una funzione. Dato $u_0 \in S$, diremo che $u: [0, +\infty) \to S$ è un *movimento minimizzante* associato a $\mathcal{F}$ con dato iniziale u_0, e scriveremo $u \in M(\mathcal{F}, S, u_0)$, se esistono funzioni $u_\lambda(k)$ tali che $u_\lambda(0) = u_0$ e

(1) per ogni k ed ogni λ si ha che $u_\lambda(k+1)$ minimizza il funzionale

$$v \mapsto \mathcal{F}(\lambda, k, v, u_\lambda(k))$$

al variare di v in S;

(2) per ogni $t \geq 0$, $u_\lambda([\lambda t]) \to u(t)$ in S per $\lambda \to +\infty$.

Le funzioni u_λ sono quindi definite mediante un procedimento ricorsivo di minimizzazione. È spesso utile pensare che queste funzioni siano definite su $[0, +\infty)$ invece che su N: basta porre

$$u_\lambda(t) := u_\lambda([t]) \qquad \forall \lambda > 1,\ t \geq 0\,.$$

D'ora in poi adotteremo senz'altro questa convenzione, grazie alla quale le funzioni $u_\lambda(t)$ sono costanti a tratti, con discontinuità contenute in $N \setminus \{0\}$. La condizione (2) che definisce l'appartenenza di u a $MM(\mathcal{F}, S, u_0)$ diventa quindi $u_\lambda(\lambda t) \to u(t)$ per ogni t.

Osservazione: La scelta di far variare t in $[0, +\infty)$ (e quindi k in N) è motivata dal fatto che considereremo principalmente problemi di evoluzione con dato iniziale ed esistenza globale. Semplici varianti della Definizione 1.1 consentono di considerare funzioni definite su tutto R o su un fissato intervallo $[a, b]$ di R (vedi la definizione di De Giorgi ed il Remark 1.6 in [8]).

L'esempio canonico di movimento minimizzante è il seguente:

Esempio 1.1: Sia $S = R^n$, $f: R^n \to R$ lipschitziana e di classe C^2. Poniamo

$$\mathcal{F}(\lambda, k, v, w) := f(v) + \frac{\lambda}{2}|v - w|^2.$$

Allora si ha che $MM(\mathcal{F}, S, u_0)$ è costituito dalla soluzione del problema di Cauchy

$$u'(t) = -\nabla f(u(t)), \qquad u(0) = u_0. \tag{1.1}$$

Per il momento non giustificheremo le affermazioni fatte nell'esempio precedente. Limitiamoci per ora a qualche giustificazione euristica, commentando il ruolo delle ipotesi fatte su f e quello di eventuali varianti.

1) Dato che f ha una crescita al più lineare all'infinito il problema

$$\min_{v \in R^n} f(v) + \frac{\lambda}{2}|v - w|^2 \tag{1.2}$$

ha soluzione, non necessariamente unica, per ogni $w \in R^n$.

Dalla minimalità di $u_\lambda(k+1)$ ricaviamo

$$\nabla f(u_\lambda(k+1)) + \lambda(u_\lambda(k+1) - u_\lambda(k)) = 0. \tag{1.3}$$

Se quindi poniamo $k = [\lambda t]$ l'equazione sopra si può scrivere nella forma

$$\lambda(u_\lambda(\lambda t + 1) - u_\lambda(\lambda t)) = -\nabla f(u_\lambda(\lambda t + 1)).$$

Ponendo ulteriormente $\lambda = \tau^{-1}$ con $\tau < 1$ abbiamo

$$\frac{u_\lambda(\lambda(t+\tau)) - u_\lambda(\lambda t)}{\tau} = -\nabla f(u_\lambda(\lambda(t+\tau)))$$

che può essere pensata come un'approssimazione della (1.1).

Il numero λ ha quindi il ruolo dell'inverso del passo di discretizzazione temporale τ.

2) Un'importante conseguenza della (1.3) e dell'ipotesi di lipschitzianità di f è una limitazione a priori sulle traiettorie $u_\lambda([\lambda t])$. Applicando infatti k volte la disuguaglianza triangolare otteniamo

$$\lambda |u_\lambda(k+1) - u_\lambda(0)| \leq k \operatorname{Lip}(f)$$

quindi

$$|u_\lambda([\lambda t] + 1) - u_\lambda(0)| \leq t \operatorname{Lip}(f).$$

In particolare, per ogni $T > 0$ fissato, se $u_\lambda(0)$ varia in un insieme limitato allora $u_\lambda(t)$ per $\lambda \geq 1$ e $t \in [0, T]$ varia in un insieme limitato.

Nel caso di funzioni di classe C^2 ma non lipschitziane (ad esempio $f(v) = -v^4$ con $v_0 \neq 0$) può avvenire che la soluzione del sistema (1.1) non abbia esistenza globale nel tempo. In tal caso, pur essendo le funzioni $u_\lambda([\lambda t])$ definite tutto su $\boldsymbol{R}^+$ si ha convergenza solo nell'intervallo di esistenza della soluzione.

3) Un altro modo per certi versi più generale per dedurre limitazioni a priori su $u_\lambda([\lambda t])$ è quello di studiare l'applicazione $k \mapsto f(u_\lambda(k))$. Infatti, essendo

$$\mathcal{F}(\lambda, u_\lambda(k+1), u_\lambda(k)) \leq \mathcal{F}(\lambda, u_\lambda(k), u_\lambda(k))$$

si ha

$$\lambda |u_\lambda(k) - u_\lambda(k+1)|^2 \leq f((u_\lambda(k)) - f(u_\lambda(k+1)) \tag{1.4}$$

che implica in particolare che $f(u_\lambda(k+1)) \leq f(u_\lambda(k))$.

Quindi l'applicazione $t \mapsto f(u_\lambda(t))$ è decrescente. Se ora sostituiamo l'ipotesi di lipschitzianità globale di f con l'ipotesi di coercività

$$\lim_{|x| \to +\infty} f(x) = +\infty \tag{1.5}$$

allora i problemi di minimo (1.2) hanno soluzione e la monotonia di $f(u_\lambda(t))$ implica che

l'insieme

$$\{|u_\lambda(t)| : t \geq 0,\ \lambda \geq 1\}$$

è limitato se lo è l'insieme $\{|u_\lambda(0)| : \lambda \geq 1\}$.

Vediamo ora altri tre esempi che mostrano la flessibilità del metodo dei movimenti minimizzanti.

Esempio 1.2: Sia $S = R^n$, $f: R^n \to R$ lipschitziana e di classe C^2. Per $\beta \in (1, 2]$ fissato poniamo

$$\mathcal{F}(\lambda, k, v, w) := f(v) + \frac{\lambda^{\beta-1}}{\beta}|v - w|^\beta.$$

Allora si ha che $MM(\mathcal{F}, S, u_0)$ è costituito dalla soluzione del problema di Cauchy

$$u'(t) = -|u'(t)|^{2-\beta}\nabla f(u(t)), \qquad u(0) = u_0. \tag{1.6}$$

Esempio 1.3: Sia $S = R^n$ e $f \in C^2(R^n)$, tale che $|\nabla f| > 0$ in R^n. Sia

$$\mathcal{F}(\lambda, k, v, w) := \begin{cases} f(v) & \text{se } \lambda|v - w| \leq 1; \\ +\infty & \text{altrimenti}. \end{cases}$$

Allora si ha che $MM(\mathcal{F}, S, u_0)$ è costituito dalla soluzione del problema di Cauchy

$$u'(t) = -\frac{\nabla f(u(t))}{|\nabla f|(u(t))}, \qquad u(0) = u_0. \tag{1.7}$$

Si osservi che le soluzioni di (1.6) e di (1.7) coincidono con quelle di (1.1) a meno di una riparametrizzazione.

Fino ad ora abbiamo considerato esempi di funzionali $\mathcal{F}(\lambda, k, v, w)$ indipendenti da k. La dipendenza da k può a volte essere utile per considerare problemi non autonomi:

Esempio 1.4: Sia $f(v, t)$ di classe C^2 e lipschitziana in $R^n \times [0, +\infty)$. Posto

$$\mathcal{F}(\lambda, k, v, w) := \int_k^{k+1} f\left(v, \frac{\tau}{\lambda}\right) d\tau + \frac{\lambda}{2}|v - w|^2$$

si ha che $MM(\mathcal{F}, S, u_0)$ è costituito dalla soluzione del sistema $u'(t) = -\nabla_v f(u(t), t)$ con la condizione iniziale $u(0) = u_0$.

Nel seguito ci limiteremo per semplicità ai problemi autonomi, quindi i nostri funzionali F saranno indipendenti da k.

Esercizio 1: Verificare gli Esempi 1.1, 1.2, 1.3, 1.4. Traccia:

1) Posto (raccordo lineare)

$$\hat{u}_\lambda(t) := u_\lambda(k) + (t-k)(u_\lambda(k+1) - u_\lambda(k)) \qquad t \in [0, +\infty), \qquad k = [t]$$

le funzioni $t \mapsto \hat{u}_\lambda(\lambda t)$ sono equi-lipschitziane (usare formule analoghe a (1.3) e (1.4)).

2) Si ha $\|u_\lambda - \hat{u}_\lambda\| \to 0$ per $\lambda \to +\infty$.

3) Ogni funzione $u(t)$ limite uniforme sui compatti di una successione $\hat{u}_{\lambda_j}$ per $\lambda_j \to +\infty$ è soluzione del sistema.

4) Essendo la soluzione del problema di Cauchy unica si ha che $MM(\mathcal{F}, S, u_0)$ ha un unico elemento.

Vediamo ora cosa succede se l'ipotesi $f \in C^2$ nell'Esempio 1.1 viene indebolita:

a) Supponiamo che f sia lipschitziana ma solo di classe C^1; allora ogni funzione $u \in MM(\mathcal{F}, S, u_0)$ è soluzione del sistema (passo 3 dell'Esercizio 1) ma non è vero il viceversa: basta prendere $n = 1$, $u \equiv 0$ e $f(v) = -|\sin v|^{3/2}$. Allora $u \notin MM(\mathcal{F}, S, 0)$: infatti, detta $v(t)$ l'unica soluzione del problema di Cauchy

$$v'(t) = \frac{3}{4} \frac{\sin 2v(t)}{\sqrt{|\sin v(t)|}} \qquad v(0) = 0,$$

strettamente positiva in $(0, +\infty)$, si trova $MM(\mathcal{F}, \mathbf{R}, 0) = \{v, -v\}$.

b) Nelle ipotesi fatte in (*a*) può avvenire che $MM(\mathcal{F}, S, u_0)$ sia vuoto: posto $n = 1$, $u_0 = 0$ e

$$f(v) := \begin{cases} -|\sin v|^{3/2} + \sin^4 v \sin \dfrac{1}{v} & \text{se } v \neq 0; \\ 0 & \text{se } v = 0; \end{cases}$$

si ha $MM(\mathcal{F}, S, 0) = \emptyset$.

c) Infine, se viene meno anche l'ipotesi C^1 e si suppone solo che f sia lipschitziana e ovunque differenziabile in $\mathbf{R}^n$ (in modo da dare ancora senso all'equazione differenziale) allora può avvenire che vi siano funzioni $u \in MM(\mathcal{F}, S, u_0)$ che non sono soluzione del problema di Cauchy: basta porre $n = 1$, $u_0 = 0$ e

$$f(v) := \begin{cases} \dfrac{v}{2} + \sin^2 v \sin \dfrac{1}{v} & \text{se } v \neq 0; \\ 0 & \text{altrimenti}; \end{cases}$$

per avere che $u \equiv 0 \in MM(\mathcal{F}, S, 0)$ ma non è soluzione del problema di Cauchy.

Esercizio 2: Verificare gli esempi in (*a*), (*b*), (*c*).

Motivati dall'esempio in (*b*) e dal fatto che considereremo nel seguito problemi di evoluzione privi di unicità diamo la definizione di movimento minimizzante generalizzato:

Definizione 1.2: Siano S, $\mathcal{F}$, u_0 come nella Definizione 1.1. Diremo che $u:[0,+\infty)\to S$ è un *movimento minimizzante generalizzato* associato a $\mathcal{F}$ con la condizione iniziale u_0, e scriveremo $u\in GMM(\mathcal{F},S,u_0)$, se esiste una successione divergente $(\lambda_i)\subset(1,+\infty)$ ed esistono funzioni $u_i(k)$ tali che $u_i(0)=u_0$ e

(1) per ogni intero $k\geq 0$ ed ogni i si ha che $u_i(k+1)$ minimizza il funzionale

$$v\mapsto\mathcal{F}(\lambda_i,k,v,u_i(k))$$

al variare di v in S;

(2) per ogni $t\geq 0$, $u_i([\lambda_i t])\to u(t)$ in S per $i\to+\infty$.

Quindi la differenza è che si richiede la convergenza (per tutti i tempi t) solo per una certa successione divergente e non per $\lambda\to+\infty$. Nel caso dell'esempio in (*b*), $GMM(\mathcal{F},R,0)=\{v,-v\}$.

2. - Movimenti minimizzanti in spazi di Hilbert e in spazi metrici

Nel caso di funzionali f definiti su spazi di Hilbert e, più in generale, su spazi metrici, l'ipotesi di lipschitzianità può essere troppo forte per alcune applicazioni. In questi casi la stima naturale sulle funzioni $t\mapsto\tilde{u}_\lambda(\lambda t)$ si ha nello spazio delle funzioni assolutamente continue con derivata in L^2.

Incominciamo quindi col richiamare le principali proprietà delle funzioni assolutamente continue a valori in uno spazio metrico (E,d).

Definizione 2.1: Sia $I\subset R$ un intervallo aperto e sia $u:I\to E$. Diremo che u è *assolutamente continua* se esiste $g\in L^1(I)$ tale che

$$d(u(s),u(t))\leq\int_s^t g(\tau)\,d\tau\qquad\forall s,t\in I,\ s<t. \tag{2.1}$$

Evidentemente ogni funzione assolutamente continua è continua; le proprietà di differenziabilità di queste funzioni sono riassunte nel

Teorema 2.1: *Sia $u\in AC(I,E)$. Si ha*

(1) *per quasi ogni* $t \in I$ *esiste finito il limite*

$$|u'(t)| := \lim_{h \to 0} \frac{d(u(t+h), u(t))}{|h|};$$

(2) *la funzione* $g = |u'|$ *soddisfa la* (2.1) *ed ogni altra funzione con la stessa proprietà maggiora* g *quasi ovunque;*

(3) *se* $(E, \|\cdot\|)$ *è uno spazio di Banach riflessivo e separabile allora per quasi ogni* $t \in$ $\in I$ *esiste il limite*

$$u'(t) := \lim_{h \to 0} \frac{u(t+h) - u(t)}{h}$$

e si ha

$$u(t) - u(s) = \int_s^t u'(\tau)\, d\tau \qquad \forall s,\ t \in I,\ s < t. \tag{2.2}$$

(4) *Nelle ipotesi* (3), *per ogni* $\varphi \in C_0^1(I, E')$ *vale la formula di integrazione per parti*

$$\int_I \langle \varphi'(t), u(t) \rangle\, dt = -\int_I \langle \varphi(t), u'(t) \rangle\, dt.$$

Osservazione: L'integrale nella (2.2), detto *integrale di Bochner*, è definito nel seguente modo: sia $w: I \to E$ una funzione di Borel tale che $\|w\| \in L^1(E)$ e consideriamo il funzionale $L \in (E')'$ dato da

$$L(f) := \int_I \langle f, w(t) \rangle\, dt.$$

Dalla riflessività di E segue l'esistenza di un unico $z \in E$ tale che $L(f) = \langle f, z \rangle$ per ogni $f \in E'$. L'integrale di Bochner z è quindi caratterizzato dalla proprietà di commutazione con la dualità tra E' ed E

$$\left\langle f, \int_I w(t)\, dt \right\rangle = \int_I \langle f, w(t) \rangle\, dt \qquad \forall f \in E' \tag{2.3}$$

che implica facilmente

$$\left\| \int_I w(t)\, dt \right\| \leq \int_I \|w(t)\|\, dt. \tag{2.4}$$

Dimostrazione del Teorema 2.1: Useremo una proprietà delle funzioni reali sommabili (vedi ad esempio [24], Teorema 8.8): data $g \in L^1(I)$, quasi ogni $t \in I$ è *punto di*

Lebesgue per g, vale a dire

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{1}{h} \int_{t-h}^{t+h} |g(s) - g(t)|\, ds = 0 . \tag{2.5}$$

È facile vedere che in ogni punto di Lebesgue di g la funzione $G(t) = \int_{t_0}^{t} g(s)\, ds$ (con $t_0 \in I$ fissato) è derivabile e $G'(t) = g(t)$. Useremo inoltre il fatto (vedi sempre [24], cap. 8) che la (2.2) vale per funzioni $u \in AC(I, R)$.

(1) Sia $D \subset E$ numerabile e denso nell'immagine (compatta) di u. Per $x \in D$ poniamo

$$u_x(t) = d(x, u(t)) .$$

È facile vedere che le funzioni u_x sono assolutamente continue. Infatti la disuguaglianza

$$|u_x(t) - u_x(s)| \leq d(u(t), u(s)) \leq \int_s^t g(\tau)\, d\tau \qquad \forall s,\ t \in I,\ s < t$$

implica l'assoluta continuità ed il fatto che $|u_x'| \leq g$ quasi ovunque in I. Poniamo

$$f(t) := \sup_{x \in D} |u_x'(t)| \in L^1(I)$$

e verifichiamo che

$$\lim_{h \to 0} \frac{d(u(t+h), u(t))}{|h|} = f(t)$$

per quasi ogni $t \in I$. La disuguaglianza

$$\liminf_{h \to 0} \frac{d(u(t+h), u(t))}{|h|} \geq f(t) \qquad \text{per q.o. } t \in I$$

segue facilmente dalla formula

$$\liminf_{h \to 0} \frac{d(u(t+h), u(t))}{|h|} \geq \lim_{h \to 0} \frac{|u_x(t+h) - u_x(t)|}{|h|} = |u_x'(t)| \qquad \text{per q.o. } t \in I$$

e dalla definizione di f. Per avere l'altra disuguaglianza basta osservare che

$$d(u(s), u(t)) = \sup_{x \in D} |u_x(s) - u_x(t)| \leq \sup_{x \in D} \int_s^t |u_x'(\tau)|\, d\tau \leq \int_s^t f(\tau)\, d\tau \tag{2.6}$$

$$\forall s,\ t \in I,\ s < t$$

quindi

$$\limsup_{h \to 0} \frac{d(u(t+h), u(t))}{|h|} \leq f(t)$$

in ogni punto di Lebesgue di f.

(2) Abbiamo già verificato in (2.6) che $f = |u'|$ soddisfa la (2.1). Viceversa, se g soddisfa la (2.1) allora $|u'|(t) \leq g(t)$ in ogni punto t di Lebesgue per g nel quale $|u'|$ è definita.

(3) Sia $D \subset E'$ denso e numerabile e consideriamo le funzioni assolutamente continue $u_f(t) := \langle f, u(t) \rangle$ per $f \in D$. Essendo D numerabile possiamo trovare un insieme trascurabile $G \subset I$ tale che

$$\exists L_f(t) := \lim_{h \to 0} \frac{u_f(t+h) - u_f(t)}{h} = \lim_{h \to 0} \left\langle f, \frac{u(t+h) - u(t)}{h} \right\rangle$$

e

$$\limsup_{h \to 0} \frac{\|u(t+h) - u(t)\|}{|h|} \leq g(t) < +\infty$$

per ogni $t \in I \setminus G$ ed ogni $f \in D$. Queste due condizioni implicano, per densità, l'esistenza del limite

$$L_f(t) := \lim_{h \to 0} \left\langle f, \frac{u(t+h) - u(t)}{h} \right\rangle$$

per ogni $f \in E'$ e la limitatezza del funzionale lineare $f \mapsto L_f(t)$. Grazie alla riflessività di E esiste $w(t) \in E$ tale che $L_f(t) = \langle f, w(t) \rangle$ per ogni $f \in E'$. Possiamo quindi concludere che per ogni $t \in I \setminus G$ esiste $w(t) \in E$ tale che $\|w(t)\| \leq g(t)$ e

$$\frac{u(t+h) - u(t)}{h} \to w(t)$$

debolmente per $h \to 0$. In particolare $u_f'(t) = \langle f, w(t) \rangle$ per ogni $t \in I \setminus G$ ed ogni $f \in D$. Fissato $t_0 \in I$, verifichiamo ora l'uguaglianza

$$u(t) = u(t_0) + \int_{t_0}^{t} w(s)\, ds\,. \tag{2.7}$$

Scelta $f \in D$ abbiamo infatti (per la (2.3))

$$\langle f, u(t_0)\rangle + \left\langle f, \int_{t_0}^{t} w(s)\,ds \right\rangle = u_f(t_0) + \int_{t_0}^{t} \langle f, w(s)\rangle\,ds =$$

$$= u_f(t_0) + \int_{t_0}^{t} u_f'(s)\,ds = u_f(t) = \langle f, u(t)\rangle .$$

Essendo f arbitraria si ottiene la (2.7). Preso un punto t di Lebesgue per $\|w\|$ abbiamo

$$\left\| \frac{u(t+h) - u(t)}{h} - w(t) \right\| = \frac{1}{|h|} \left\| \int_{t}^{t+h} w(s) - w(t)\,ds \right\| .$$

Usando la (2.4) si ottiene facilmente

$$\lim_{h \to 0} \frac{u(t+h) - u(t)}{h} = w(t) .$$

(4) Verifichiamo che la funzione $\phi(t) := \langle \varphi(t), u(t)\rangle$ è assolutamente continua. Si ha infatti

$$|\phi(s) - \phi(t)| \leq \sup_I \|u\| \, |\varphi(s) - \varphi(t)| + \sup_I \|\varphi\| \, |u(s) - u(t)| \qquad \forall s,\ t \in I .$$

È ora facile vedere che $\phi' = \langle \varphi', u\rangle + \langle \varphi, u'\rangle$, da cui segue la tesi. ■

Dato $p \in [1, +\infty]$ poniamo ora

$$AC_p(I, E) := \{u \in AC(I, E) \colon |u'| \in L^p(I)\} .$$

Notiamo che $AC_\infty(I, E)$ coincide con la classe delle funzioni Lipschitziane da $\bar{I}$ in E. Usando la disuguaglianza di Hölder è facile dimostrare la

Proposizione 2.2: *Sia $1 \leq p < +\infty$. Ogni funzione in $AC_p(I, E)$ è di classe $C^{0, 1-1/p}(\bar{I})$ e vale la disuguaglianza*

$$d(u(s), u(t)) \leq \left(\int_I |u'|^p \right)^{1/p} |s - t|^{1-1/p} \qquad \forall s,\ t \in \bar{I} .$$

Definizione 2.2: Sia E uno spazio di Banach e $f \colon E \to (-\infty, +\infty]$ semicontinua inferiormente e convessa. Dato $x \in E$ tale che $f(x) < +\infty$ indicheremo con $\partial f(x)$ il *sottodifferenziale* di f, vale a dire

$$\partial f(x) = \{v \in E' : f(y) \geq f(x) + \langle v, y - x\rangle \ \forall y \in E\} .$$

È facile verificare che $\partial f(x)$ è un insieme convesso e chiuso.

Esercizio 3: Verificare la *proprietà di monotonia* del sottodifferenziale di una funzione convessa:

$$\langle p_2 - p_1, x_2 - x_1 \rangle \geq 0 \qquad \forall x_i \in \{f < +\infty\},\ p_i \in \partial f(x_i),\ i = 1,\ 2.$$

Verificare inoltre che se E è uno spazio di Hilbert e $y \in \{f < +\infty\}$ minimizza

$$x \mapsto f(x) + \frac{\lambda}{2}|x - z|^2$$

allora $\lambda(z - y) \in \partial f(y)$.

Teorema 2.3: *Sia H uno spazio di Hilbert separabile e sia $f: H \to [0, +\infty]$ convessa e semicontinua inferiormente. Poniamo*

$$\mathcal{F}(\lambda, x, y) = f(x) + \frac{\lambda}{2}|x - y|^2$$

e fissiamo $x_0 \in \{f < +\infty\}$. Allora l'insieme $MM(\mathcal{F}, H, x_0)$ consiste dell'unica soluzione $u \in AC_2([0, +\infty), H)$ del problema di Cauchy

$$(2.8) \qquad \begin{cases} u'(t) \in -\partial f(u(t)) & \text{per q.o. } t; \\ u(0) = x_0. \end{cases}$$

Dim: Posto

$$\tilde{u}_\lambda(t) = u_\lambda(k) + (t - k)(u_\lambda(k+1) - u_\lambda(k)) \qquad k = [t]$$

incominciamo col dimostrare la stima

$$(2.9) \qquad \lambda \int_0^{+\infty} |\tilde{u}_\lambda'(t)|^2\, dt \leq 2f(x_0)$$

per ogni $\lambda \geq 1$. Per ottenerla basta sommare per i da 0 ad ∞ nelle disuguaglianze

$$\lambda|\tilde{u}_\lambda'(t)|^2 = \lambda|u_\lambda(i+1) - u_\lambda(i)|^2 \leq 2f(u_\lambda(i)) - 2f(u_\lambda(i+1)) \qquad t \in (i, i+1).$$

Osserviamo ora che la minimalità di $u_\lambda(k+1)$ implica (Esercizio 3)

$$\tilde{u}_\lambda'(t) = u_\lambda(k+1) - u_\lambda(k) \in \frac{1}{\lambda}\partial f(u_\lambda(k+1))$$

per ogni $t \in (k, k+1)$. Scelti ora $\lambda,\ \eta \geq 1$ stimiamo la derivata di $|\tilde{u}_\lambda - \tilde{u}_\eta|^2$ usando la monotonia del sottodifferenziale:

$$\frac{1}{2}|\tilde{u}_\lambda - \tilde{u}_\eta|^{2\prime}(t) =$$

$$= \langle \tilde{u}_\lambda(t) - \tilde{u}_\eta(t), \tilde{u}_\lambda'(t) - \tilde{u}_\eta'(t)\rangle = \langle \tilde{u}_\lambda([t]+1) - \tilde{u}_\eta([t]+1), \tilde{u}_\lambda'(t) - \tilde{u}_\eta'(t)\rangle +$$

$$+\langle \bar{u}_\lambda(t) - \bar{u}_\lambda([t]+1), \bar{u}_\lambda'(t) - \bar{u}_\eta'(t)\rangle + \langle \bar{u}_\eta([t]+1) - \bar{u}_\eta(t), \bar{u}_\lambda'(t) - \bar{u}_\eta'(t)\rangle \leq$$

$$\leq |\bar{u}_\lambda(t) - \bar{u}_\lambda([t]+1)|\,|\bar{u}_\lambda'(t) - \bar{u}_\eta'(t)| + |\bar{u}_\eta([t]+1) - \bar{u}_\eta(t)|\,|\bar{u}_\lambda'(t) - \bar{u}_\eta'(t)| =$$

$$= |\bar{u}_\lambda'(t)|\,|\bar{u}_\lambda'(t) - \bar{u}_\eta'(t)| + |\bar{u}_\eta'(t)|\,|\bar{u}_\lambda'(t) - \bar{u}_\eta'(t)| \leq 2|\bar{u}_\lambda'(t)|^2 + 2|\bar{u}_\eta'(t)|^2.$$

Integrando tra 0 e t ed usando la stima (2.9) si ottiene

$$|\bar{u}_\lambda(t) - \bar{u}_\eta(t)|^2 \leq \left(\frac{8f(x_0)}{\lambda} + \frac{8f(x_0)}{\eta}\right).$$

Posto $v_\lambda(t) = \bar{u}_\lambda(\lambda t)$ abbiamo allora che

$$\sup_{t\in[0,+\infty)} |v_\lambda(t) - v_\eta(t)|^2$$

tende a zero per $\lambda,\ \eta \to +\infty$ quindi v_λ converge in $C([0,+\infty), H)$ ad una funzione u. Osserviamo che anche $u_\lambda(\lambda t)$ converge a u: si ha infatti

$$|u_\lambda(\lambda t) - v_\lambda(t)|^2 = |u_\lambda(\lambda t) - \bar{u}_\lambda(\lambda t)|^2 \leq \sup_{k\in N} |u_\lambda(k+1) - u_\lambda(k)|^2 \leq \frac{2f(x_0)}{\lambda}.$$

Resta da dimostrare che u è l'unica soluzione del problema di Cauchy (2.8). L'unicità della soluzione segue facilmente dal calcolo delle derivata di $|v_1 - v_2|^2$, con v_1 e v_2 entrambe soluzioni:

$$|v_1 - v_2|^{2\prime}(t) = 2\langle v_1(t) - v_2(t), v_1'(t) - v_2'(t)\rangle \leq 0$$

per la monotonia del sottodifferenziale. Osserviamo ora che

$$v_\lambda'(t) = \lambda\bar{u}_\lambda'(\lambda t) = \lambda(u_\lambda(\lambda t+1) - u_\lambda(\lambda t)) \in -\partial f(u_\lambda(\lambda t+1)) = -\partial f(v_\lambda(t+\lambda^{-1}))$$

per quasi ogni t. Per passare al limite nell'inclusione differenziale su scritta è conveniente passare ad una formulazione integrale.

Osserviamo che la (2.9) implica la limitatezza di $|v_\lambda'|$ nello spazio di Hilbert $L^2([0,+\infty), H)$. Dalla Definizione 2.1 e la riflessività di $L^2([0,+\infty))$ segue che $u \in AC_2([0,+\infty), H)$. Inoltre, usando la formula di integrazione per parti si vede che v_λ' converge debolmente in $L^2([0,+\infty), H)$ a u' per $\lambda \to +\infty$.

Fissiamo un punto t_0 di Lebesgue di $|u'|$ (quindi esiste $u'(t_0)$) ed un vettore $y \in H$. Integrando la disuguaglianza

$$f(y) \geq f(v_\lambda(t+\lambda^{-1})) - \langle v_\lambda'(t), y - v_\lambda(t)\rangle$$

tra t_0 e $t_0 + h$ otteniamo

$$f(y) + \left\langle \frac{v_\lambda(t_0+h) - v_\lambda(t_0)}{h}, y\right\rangle \geq \frac{1}{h}\int_{t_0}^{t_0+h} f(v_\lambda(t+\lambda^{-1}))\,dt + \frac{1}{h}\int_{t_0}^{t_0+h} \langle v_\lambda'(t), v_\lambda(t)\rangle\,dt.$$

Passando al limite per $\lambda \to +\infty$ si ottiene, usando anche il lemma di Fatou

$$f(y) + \left\langle \frac{u(t_0+h) - u(t_0)}{h}, y \right\rangle \geq \frac{1}{h} \int_{t_0}^{t_0+h} f(u(t))\, dt + \frac{1}{h} \int_{t_0}^{t_0+h} \langle u'(t), u(t) \rangle\, dt .$$

Infine passiamo al limite per $h \to 0$ ed usiamo ancora il lemma di Fatou per ottenere

$$f(y) \geq f(u(t_0)) - \langle u'(t_0), y - u(t_0) \rangle .$$

Per l'arbitrarietà di y si ha $-u'(t_0) \in \partial f(u(t_0))$. ■

Osservazione: Osserviamo che per la monotonia del sottodifferenziale l'operatore $I + \partial f$ è iniettivo (è anche facile vedere che è surgettivo: Esercizio 3 con $\lambda = 1$):

$$x + p_x \neq y + p_y \qquad \forall x, y \in H, \;\; p_x \in \partial f(x), \;\; p_y \in \partial f(y) .$$

L'equazione

$$\lambda(u_\lambda(k+1) - u_\lambda(k)) \in -\partial f(u_\lambda(k+1))$$

si può quindi scrivere nella forma

$$u_\lambda(k+1) = \left(I + \frac{\partial f}{\lambda}\right)^{-1} (u_\lambda(k))$$

dalla quale segue

$$u_\lambda(\lambda t) = \left(I + \frac{\partial f}{\lambda}\right)^{-[\lambda t]} (x_0) .$$

Sia ora $S(t)$ il semigruppo generato dal problema di Cauchy (2.8), vale a dire $t \mapsto S(t)x_0$ risolve per ogni $x_0 \in H$ il problema (2.8). Possiamo riformulare il Teorema 2.3 dicendo che

$$\left(I + \frac{\partial f}{\lambda}\right)^{-[\lambda t]} \to S(t) \tag{2.10}$$

puntualmente su $\{f < +\infty\}$. La formula (2.10) è detta *formula esponenziale* e vale per operatori più generali del sottodifferenziale, gli *operatori massimali monotoni* (vedi [4], Esempio 2.3.4 e Corollario 4.4).

Un esempio canonico in dimensione infinita è il seguente.

Esempio 2.1: Sia $S = L^2(R^n)$ e

$$f(u) = \begin{cases} \frac{1}{2}\int_{R^n} |\nabla u|^2\, dx & \text{se } u \in H^{1,2}(R^n); \\ +\infty & \text{altrimenti}; \end{cases}$$

ove $H^{1,2}(R^n)$ è lo spazio di Sobolev delle funzioni $u \in L^2(R^n)$ aventi derivata nel senso delle distribuzioni in L^2. È facile vedere che la funzione f è convessa e semicontinua inferiormente; inoltre

$$w \in \partial f(u) \Leftrightarrow w = -\Delta u \tag{2.11}$$

nel senso delle distribuzioni. Dal Teorema 2.3 segue quindi che, posto

$$\mathcal{F}(\lambda, v, w) = f(v) + \frac{\lambda}{2}\int_{R^n} |v - w|^2\, dx$$

per ogni $u_0 \in H^{1,2}(R^n)$ l'insieme $MM(\mathcal{F}, S, u_0)$ consiste della soluzione (debole) dell'equazione del calore $u_t = \Delta_x u$ con la condizione iniziale $u(x, 0) = u_0(x)$.

Esercizio 4: Dimostrare la (2.11).

Vediamo ora altri due esempi che non seguono dal Teorema 2.3 (per un enunciato generale che comprende questi due esempi vedi [17] e [18]) e mostrano la possibilità di scegliere funzionali $\mathcal{F}$ diversi da $f + \lambda / 2d^2$.

Esempio 2.2: Sia $S = H^{1,2}(R^n)$ e poniamo

$$\mathcal{F}(\lambda, v, w) = \begin{cases} \frac{1}{2}\int_{R^n} |\nabla v|^2\, dx + \frac{\lambda}{2}\int_{R^n} |v - w|^2\, dx & \text{se } v \geq w \text{ q.o. in } R^n; \\ +\infty & \text{altrimenti}. \end{cases}$$

Allora per ogni $u_0 \in S$ l'insieme $GMM(\mathcal{F}, S, u_0)$ consiste della soluzione (debole) dell'equazione $u_t = (\Delta_x u)^+$ con la condizione iniziale $u(x, 0) = u_0$.

Esempio 2.3: Sia $S = H^{1,2}(R^n)$, $a_1, \ldots, a_n \in L^\infty(R^n)$ e poniamo

$$\mathcal{F}(\lambda, v, w) = \frac{1}{2}\int_{R^n} |\nabla v|^2 - \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial w}{\partial x_i} v\, dx + \frac{\lambda}{2}\int_{R^n} |v - w|^2\, dx.$$

Allora per ogni $u_0 \in S$ l'insieme $GMM(\mathcal{F}, S, u_0)$ consiste della soluzione (debole)

dell'equazione

$$u_t = \Delta_x u + \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial u}{\partial x_i}$$

con la condizione iniziale $u(x, 0) = u_0$.

Affrontiamo ora lo studio dei movimenti minimizzanti in uno spazio metrico arbitrario (E, d). I prossimi due risultati sono sostanzialmente dovuti a Marino, Saccon e Tosques, che sviluppano in [21] una teoria delle curve di massima pendenza in spazi metrici (vedi anche [9]). Incominciamo con la definizione di *pendenza discendente* per una funzione $f: E \to (-\infty, +\infty]$.

Definizione 2.3: Dato $u \in E$ tale che $f(u) < +\infty$ chiamiamo pendenza discendente di f il numero

$$|\nabla^- f|(u) = \begin{cases} \limsup\limits_{v \to u} \dfrac{[f(u) - f(v)]^+}{d(u, v)} & \text{se } u \text{ non è isolato}; \\ 0 & \text{altrimenti}. \end{cases}$$

Osserviamo che $|\nabla^- f|(u) = 0$ se u è un minimo locale di f. La notazione è giustificata dal fatto che $|\nabla^- f| = |\nabla f|$ se $E = \mathbf{R}^n$ e f è differenziabile in u. Se H è uno spazio di Hilbert e f è convessa e semicontinua inferiormente allora $|\nabla^- f|(u) < +\infty$ se e solo se $\partial f(u) \neq \emptyset$ e

$$|\nabla^- f|(u) = \min\{|p| : p \in \partial f(u)\}.$$

Sia ora $f: E \to [0, +\infty]$ semicontinua superiormente e tale che gli insiemi $\{x \in E : f(x) \leq t\}$ sono compatti per ogni $t \in \mathbf{R}$. Poniamo

$$\mathcal{F}(\lambda, v, w) := f(v) + \frac{\lambda}{2} d^2(v, w).$$

Osserviamo che le ipotesi fatte su f garantiscono l'esistenza di minimi di $v \mapsto \mathcal{F}(\lambda, v, w)$ per $\lambda > 0$ e $w \in E$ fissati. Ci sarà utile la seguente osservazione.

Osservazione: Sia u un minimo di $v \mapsto \mathcal{F}(\lambda, v, w)$ e supponiamo $f(u) < +\infty$. Si ha allora la seguente stima sulla pendenza di f in u

$$|\nabla^- f|(u) \leq \lambda d(u, w). \tag{2.12}$$

La disuguaglianza segue facilmente da

$$f(u) + \frac{\lambda}{2} d^2(u, w) \leq f(v) + \frac{\lambda}{2} d^2(v, w).$$

Infatti, raggruppando i termini con f e dividendo per $d(v,u)$ si ottiene

$$\frac{f(u)-f(v)}{d(v,u)} \leq \frac{\lambda}{2}\,\frac{d^2(v,w)-d^2(u,w)}{d(u,v)} \leq \frac{\lambda}{2}(d(v,w)+d(u,w))$$

e basta far tendere v ad u.

Possiamo ora enunciare un risultato generale di esistenza e regolarità per la classe $GMM(\mathcal{F}, E, u_0)$ (vedi anche [21]).

Teorema 2.4: *Sia f come sopra e sia u_0 tale che $f(u_0) < +\infty$. Allora $GMM(\mathcal{F}, E, u_0)$ è non vuoto e contenuto in $AC_2([0,+\infty), E)$. Inoltre se $u \in GMM(\mathcal{F}, E, u_0)$ esistono una successione divergente $(\lambda_i) \subset (1,+\infty)$ ed una funzione descrescente $g(t)$ tali che*

1) *$u_{\lambda_i}(\lambda_i t)$ converge a $u(t)$ e $f(u_{\lambda_i}(\lambda_i t))$ converge a $g(t)$ per ogni $t \geq 0$;*

2) *per ogni intervallo $[s,t] \subset [0,+\infty)$ si ha*

$$\frac{1}{2}\int_s^t |u'(\tau)|^2\,d\tau + \frac{1}{2}\int_s^t \overline{|\nabla f|}^2(u(\tau))\,d\tau \leq g(s)-g(t) \tag{2.13}$$

ove si è posto

$$\overline{|\nabla f|}(u) := \inf\left\{\liminf_{k\to+\infty} |\nabla^- f|(u_k) : u_k \to u,\ f(u_k) \leq f(u_0)\right\}.$$

La dimostrazione si basa principalmente su due lemmi.

Lemma 2.5: *Fissato $u \in E$ tale che $f(u) < +\infty$, indichiamo con u_σ un minimo del funzionale $v \mapsto \mathcal{F}(\sigma^{-1}, v, u)$. Si ha allora la stima*

$$\frac{d^2(u_{\sigma_0}, u)}{2\sigma_0} + \frac{1}{2}\int_0^{*\sigma_0} \frac{d^2(u_\sigma, u)}{\sigma^2}\,d\sigma \leq f(u) - f(u_{\sigma_0})$$

ove $\int^*$ indica l'integrale esterno.

Dimostrazione: Poniamo

$$\psi(\sigma) := \inf\left\{f(v) + \frac{1}{2\sigma}d^2(v,u)\right\}$$

ed osserviamo che ψ è una funzione decrescente di σ. Inoltre $\psi(\sigma)$ non supera $f(u)$ e converge a $f(u)$ per $\sigma \to 0^+$. Infatti

$$d^2(u_\sigma, u) \leq 2\sigma\psi(\sigma) \leq 2\sigma f(u)$$

quindi $u_\sigma \to u$ per $\sigma \to 0^+$. Dalla disuguaglianza $\psi(\sigma) \geq f(u_\sigma)$ e dalla semicontinuità inferiore di f segue la convergenza di $\psi(\sigma)$ a $f(u)$.

La disuguaglianza da dimostrare può allora essere riscritta nel seguente modo

$$\psi(\sigma_0) - \psi(0^+) \leq -\frac{1}{2} \int_0^{\sigma_0} \frac{d^2(u_\sigma, u)}{\sigma^2}\, d\sigma .$$

Fissato un punto σ di derivabilità per ψ abbiamo

$$\psi'(\sigma) = \lim_{h \to 0^+} \frac{\psi(\sigma + h) - \psi(\sigma)}{h} \leq$$

$$\leq \liminf_{h \to 0^+} h^{-1} \left[f(u_\sigma) + \frac{1}{2(\sigma + h)} d^2(u_\sigma, u) - f(u_\sigma) - \frac{1}{2\sigma} d^2(u_\sigma, u) \right] = -\frac{1}{2\sigma^2} d^2(u_\sigma, u) .$$

Per integrazione otteniamo

$$\psi(\sigma_0) - \psi(0^+) \leq \psi(\sigma_0^-) - \psi(0^+) = D\psi((0, \sigma_0)) \leq$$

$$\leq \int_0^{\sigma_0} \psi'(\sigma)\, d\sigma \leq -\frac{1}{2} \int_0^{\sigma_0} \frac{d^2(u_\sigma, u)}{\sigma^2}\, d\sigma . \quad \blacksquare$$

L'introduzione dell'integrale esterno nel Lemma 2.5 è dovuta al fatto che, in questa generalità, non si hanno informazioni sulla misurabilità dell'applicazione $\sigma \mapsto d(u_\sigma, u)$.

LEMMA 2.6: *Sia (f_k) una successione di funzioni descrescenti ed equilimitate su $[0, +\infty)$. Esiste allora una sottosuccessione f_{k_h} convergente puntualmente a g su $[0, +\infty)$.*

DIMOSTRAZIONE: Con un procedimento diagonale possiamo trovare una sottosuccessione f_{k_h} che converge puntualmente a m su Q^+. Estendiamo m per monotonia ponendo

$$m(t) = \sup \{ m(s) : s \in Q,\ 0 \leq s \leq t \}$$

per ogni $t \geq 0$ e sia E l'insieme al più numerabile di discontinuità di m. Estraendo se necessario un'altra sottosuccessione possiamo supporre che f_{k_h} converga puntualmente anche su E. Verifichiamo ora che $g_k(t) := f_{k_h}(t)$ converge puntualmente su $[0, +\infty)$. Fissato $t \in [0, +\infty)$, la convergenza in t è ovvia se $t \in E$; in caso contrario abbiamo

$$\limsup_{k \to +\infty} g_k(t) \leq \inf_{s \in Q,\ s > t} \limsup_{k \to +\infty} g_k(s) = \inf_{s \in Q,\ s > t} m(s) = m(t)$$

ed analogamente

$$\liminf_{k \to +\infty} g_k(t) \geq \sup_{s \in Q,\ s < t} \liminf_{k \to +\infty} g_k(s) = \sup_{s \in Q,\ s < t} m(s) = m(t) . \quad \blacksquare$$

DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA 2.4: Osserviamo che $f(u_\lambda(k)) \leq f(u_0)$ per la monotonia di $k \mapsto f(u_l(k))$. Quindi per k fissato la successione $u_\lambda(k)$ è relativamente compatta in E.

Con un procedimento diagonale possiamo trovare una successione divergente $(\lambda_i) \subset C(1, +\infty)$ tale che $u_{\lambda_i}(\lambda_i, t)$ converge in E ad un certo limite $u(t)$ per ogni $t \in Q$.

Passando se necessario ad una sottosuccessione possiamo anche supporre, grazie al Lemma 2.6, che le funzioni $g_i(t) := f(u_{\lambda_i}([\lambda_i t]))$ convergano puntualmente ad una certa funzione g su $[0, +\infty)$.

Nel corso della dimostrazione ci sarà utile fare un raccordo diverso da quello costante a tratti. Precisamente, indichiamo con $J_\sigma(u)$ un minimo del funzionale $v \mapsto \mathcal{F}(\sigma^{-1}, v, u)$ e poniamo

$$u_\lambda(t) = J_{(t-[t])/\lambda}(u) \qquad t \in ([t], [t]+1). \tag{2.14}$$

Si osservi che, in base alle considerazioni fatte nella dimostrazione del Lemma 2.5 sull'andamento a zero di $\psi(\sigma)$, il raccordo fatto nella (2.14) è continuo a destra. Dal Lemma 2.5 con $\sigma_0 = \lambda^{-1}$ segue

$$\frac{\lambda}{2} d^2(u_\lambda(k+1), u_\lambda(k)) + \frac{1}{2} \int_0^{+\lambda^{-1}} \frac{d^2(J_\sigma(u_\lambda(k)), u_\lambda(k))}{\sigma^2}\, d\sigma \leq f(u_\lambda(k)) - f(u_\lambda(k+1)).$$

Osservando che $J_\sigma(u_\lambda(k)) = u_\lambda(k + \lambda\sigma)$ e facendo il cambiamento di variabili $\tau = \lambda\sigma$ si ottiene

$$\begin{aligned} &\frac{\lambda}{2} d^2(u_\lambda(k+1), u_\lambda(k)) + \\ &\qquad + \frac{\lambda}{2} \int_0^{+1} \frac{d^2(u_\lambda(k+\tau), u_\lambda(k))}{\tau^2}\, d\tau \leq f(u_\lambda(k)) - f(u_\lambda(k+1)). \end{aligned} \tag{2.15}$$

Osserviamo inoltre che per la (2.12) vale la disuguaglianza

$$|\nabla^- f|^2(u_\lambda(t)) \leq \frac{\lambda^2}{(t-k)^2} d^2(u_\lambda(t), u_\lambda(k)) \qquad \forall t \in (k, k+1)$$

quindi la (2.15) implica

$$\frac{\lambda}{2} d^2(u_\lambda(k+1), u_\lambda(k)) + \frac{1}{2\lambda} \int_k^{+k+1} |\nabla^- f|^2(u_\lambda(\tau))\, d\tau \leq f(u_\lambda(k)) - f(u_\lambda(k+1)).$$

Sommando per k da l a $m-1$ otteniamo infine

$$\begin{aligned} &\sum_{i=l}^{m-1} \frac{\lambda}{2} d^2(u_\lambda(k+1), u_\lambda(k)) + \\ &\qquad + \frac{1}{2\lambda} \int_l^{+m} |\nabla^- f|^2(u_\lambda(\tau))\, d\tau \leq f(u_\lambda(l)) - f(u_\lambda(m)). \end{aligned} \tag{2.16}$$

Siano ora $w_i(t) := u_{\lambda_i}(\lambda_i t)$ e siano s_i le funzioni C^1 a tratti determinate dalle condizioni

$s_i(0) = 0$ e

$$s_i'(t) = d(u_{\lambda_i}(k+1), u_{\lambda_i}(k)) \qquad \forall t \in (k, k+1).$$

Si noti che se E fosse una spazio vettoriale allora s_i sarebbe proprio la lunghezza d'arco della poligonale associata a $u_{\lambda_i}(k)$. Definiamo infine $\sigma_i(t) := s_i(\lambda_i t)$. Tenuto conto di queste posizioni, possiamo riscrivere la (2.16) nel seguente modo

$$\frac{\lambda_i}{2}\int_l^m |s_i'(\tau)|^2\, d\tau + \frac{1}{2\lambda_i}\int_l^{+m} |\nabla^- f|^2(w_i(\lambda_i^{-1}\tau))\, d\tau \leq f(u_{\lambda_i}(l)) - f(u_{\lambda_i}(m)).$$

Scelto un intervallo $[s, t] \subset [0, +\infty)$ e posto $l = [\lambda_i s]$, $m = [\lambda_i t]$, cambiando variabili otteniamo (maggiorando e minorando le parti intere)

$$(2.17) \qquad \frac{1}{2}\int_s^{t-\lambda_i^{-1}} |\sigma_i'(\tau)|^2\, d\tau + \frac{1}{2}\int_s^{+t-\lambda_i^{-1}} |\nabla^- f|^2(w_i(\tau))\, d\tau \leq$$

$$\leq f(u_{\lambda_i}([\lambda_i s])) - f(u_{\lambda_i}([\lambda_i t])).$$

Scegliendo $s = 0$ e t arbitrariamente grande si vede che la successione $|\sigma_i'|^2$ è dunque limitata in $L^2(0, +\infty)$. Osserviamo anche che vale la seguente proprietà di «equicontinuità» (usiamo la disuguaglianza $d(J_\sigma(u), u) \leq \sqrt{2\sigma f(u_0)}$)

$$(2.18) \qquad d(w_i(t), w_i(s)) \leq$$

$$\leq d(u_{\lambda_i}([\lambda_i t]), u_{\lambda_i}([\lambda_i s])) + d(u_{\lambda_i}([\lambda_i t]), u_{\lambda_i}(\lambda_i t))\, d(u_{\lambda_i}([\lambda_i s]), u_{\lambda_i}(\lambda_i s)) \leq$$

$$\leq s_i([\lambda_i t]) - s_i([\lambda_i s]) + 2\sqrt{2f(u_0)\lambda_i^{-1}} \leq$$

$$\leq \left(\int_{[\lambda_i s]}^{[\lambda_i t]} |s_i'(\tau)|^2\, d\tau\right)^{1/2} \sqrt{[\lambda_i t] - [\lambda_i s]} + 2\sqrt{2f(u_0)\lambda_i^{-1}} \leq$$

$$\leq \sqrt{2f(u_0)}\sqrt{t - s + \lambda_i^{-1}} + 2\sqrt{2f(u_0)\lambda_i^{-1}}$$

per ogni $[s, t] \subset [0, +\infty)$. È facile vedere che la (2.18) porta all'esistenza del limite puntuale delle funzioni w_i non solo su Q^+ ma su tutto $[0, +\infty)$. Detto u il limite puntuale di w_i e γ un limite debole di σ_i' (si estrae se necessario un'altra successione) passando al limite nella (2.17) otteniamo

$$\frac{1}{2}\int_s^t \gamma^2(\tau)\, d\tau + \frac{1}{2}\int_s^t \overline{|\nabla^- f|}^2(u(\tau))\, d\tau \leq g(s) - g(t).$$

D'altro canto dalla seconda linea della (2.18) segue

$$d(w_i(t), w_i(s)) \leq \int_s^{t+\lambda_i^{-1}} \sigma_i'(\tau)\, d\tau + 2\sqrt{2f(u_0)\lambda_i^{-1}}$$

e per passaggio al limite

$$d(u(s), u(t)) \leq \int_s^t \gamma(\tau)\, d\tau .$$

Dal Teorema 2.1(2) ricaviamo $\gamma \geq |u'|$ quasi ovunque e quindi la tesi. ■

Se rafforziamo le ipotesi su f, richiedendo la semicontinuità inferiore della pendenza ed una proprietà debole di continuità, si può concludere che $g = f(u)$ e la velocità di discesa $|u'|$ uguaglia la pendenza:

Teorema 2.7: *Nelle ipotesi del teorema precedente, supponiamo che* $|\nabla^- f|$ *coincida con* $\overline{|\nabla f|}$ *e valga la seguente proprietà di continuità:*

$$(2.19) \qquad u_h \to u, \qquad \sup_{h \in N} (f(u_h) + |\nabla^- f|(u_h)) < +\infty \Rightarrow f(u_h) \to f(u) .$$

Allora per ogni $u \in GMM(\mathcal{F}, E, u_0)$ *si ha* $g(t) = f(u(t))$ *e* $|\nabla^- f|(u(t)) = |u'(t)|$ *per quasi ogni* $t \geq 0$. *Infine,* g *è assolutamente continua in* $[0, +\infty)$.

Dimostrazione: Sia w_i la successione costruita nel Teorema 2.4. Grazie alla (2.17) ed al lemma di Fatou abbiamo

$$\int_0^{+\infty} \liminf_{i \to +\infty} |\nabla^- f|^2(w_i(t))\, dt < +\infty .$$

Detto $\mathcal{T}$ l'insieme dei punti di derivabilità di g tali che il lim inf sopra è finito, fissiamo $t \in \mathcal{T}$ e scegliamo w_{i_k} tale che

$$\lim_{k \to +\infty} |\nabla^- f|^2(w_{i_k}(t)) = \liminf_{i \to +\infty} |\nabla^- f|^2(w_i(t)) < +\infty .$$

La proprietà di continuità (2.19) implica

$$g(t) = \lim_{i \to +\infty} f(w_i(t)) = \lim_{k \to +\infty} f(w_{i_k}(t)) = f(u(t)) .$$

Dalla (2.12) segue

$$(2.20) \qquad \frac{1}{2}\int_s^t |u'(\tau)|^2\, d\tau + \frac{1}{2}\int_s^t |\nabla f|^2(u(\tau))\, d\tau \leq f(u(s)) - f(u(t))$$

per ogni intervallo $[s, t] \subset [0, +\infty)$ i cui estremi appartengono a $\mathcal{T}$. Dimostriamo ora la

disuguaglianza

$$g(s) - g(t) \leq \int_s^t |\nabla^- f|(u(\tau))|u'(\tau)|\, d\tau \tag{2.21}$$

per ogni intervallo $[s, t] \subset [0, +\infty)$ tale che g è continua in s ed in t. Fissato infatti $t \in \mathcal{T}$ di derivabilità per u si ha, per una opportuna successione infinitesima (h_n)

$$-g'(t) = \lim_{h \to 0^+} \frac{g(t) - g(t+h)}{h} = \lim_{n \to +\infty} \frac{f(u(t)) - f(u(t+h_n))}{h_n} =$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{f(u(t)) - f(u(t+h_n))}{d(u(t), u(t+h_n))} \frac{d(u(t+h_n), u(t))}{h_n} \leq |\nabla^- f|(u(t))|u'(t)| .$$

La funzione $g(t)$ è decrescente, quindi a variazione limitata. La stima su scritta sulla derivata prima di g segue per integrazione dalla disuguaglianza (si ricordi che g è continua in s e in t)

$$g(s) - g(t) \leq -\int_t^s g'(\tau)\, d\tau \tag{2.22}$$

che non è in generale una uguaglianza a causa del fatto che la derivata nel senso delle distribuzioni di g potrebbe non essere assolutamente continua. Da (2.20) e (2.21) si ricava

$$\frac{1}{2}\int_s^t |u'(\tau)|^2\, d\tau + \frac{1}{2}\int_s^t |\nabla^- f|^2(u(\tau))\, d\tau \leq \int_s^t |\nabla^- f|(u(\tau))|u'(\tau)|\, d\tau$$

quindi $|\nabla^- f|(u(\tau)) = |u'(\tau)|$ quasi ovunque in ogni intervallo i cui estremi appartengono a $\mathcal{T}$. Essendo il complementare di $\mathcal{T}$ trascurabile e dovendo valere l'uguaglianza nella (2.22) la tesi segue. ■

La (2.19) è ad esempio soddisfatta dalle funzioni convesse e semicontinue inferiormente in spazi di Hilbert. Scelti infatti $p_k \in \partial f(u_k)$ di norma equilimitata, dalla disuguaglianza

$$f(u) \geq f(u_k) + \langle p_k, u - u_k \rangle$$

si deduce che il limite superiore di $f(u_k)$ non supera $f(u)$. L'altra disuguaglianza segue dalla semicontinuità inferiore di f.

3. - Movimenti minimizzanti di frontiere

In questo capitolo vediamo come sia possibile applicare la teoria dei movimenti minimizzanti allo studio dell'evoluzione di frontiere secondo la curvatura media. Come

vedremo più avanti questo tipo di evoluzione corrisponde dal punto di vista euristico alle curve di «massima pendenza» del funzionale perimetro del bordo di un insieme. In questo problema manca sia la struttura vettoriale dello spazio ambiente sia la differenziabilità della funzione (il perimetro) che si vuol far decrescere.

Per impostare matematicamente questo problema ci sarà necessario introdurre un certo numero di nozioni legate alla teoria geometrica della misura. Per questo motivo articoleremo questo capitolo in un certo numero di sottosezioni.

3.1. *Insiemi di perimetro finito in* R^n.

Il requisito minimo richiesto dai movimenti minimizzanti è l'esistenza dei minimi $u_k(k+1)$. Per garantirla è necessario lavorare in un ambiente dotato di buone proprietà di compattezza. Nel caso dell'evoluzione di frontiere tale ambiente è costituito dagli insiemi di *perimetro finito* o di Caccioppoli, che ora andiamo a definire.

DEFINIZIONE 3.1: Sia $u \in L^1(R^n)$; diremo che u è una *funzione a variazione limitata* in R^n se esiste una misura vettoriale $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_n)$ avente variazione finita in R^n tale che

$$\int_{R^n} u \frac{\partial \xi}{\partial x_i}\, dx = -\int_{R^n} \xi\, d\mu_i \qquad \forall \xi \in C_0^1(R^n),\ i = 1, \ldots, n.$$

La misura μ è univocamente determinata dalla formula su scritta e verrà indicata con Du. Se $u = \chi_E$ è una funzione a variazione limitata diremo che E è un *insieme di perimetro finito* in R^n; la formula di integrazione per parti diventa allora

$$\int_E \frac{\partial \xi}{\partial x_i}\, dx = -\int_{R^n} \xi\, D_i \chi_E \qquad \forall \xi \in C_0^1(R^n),\ i = 1, \ldots, n.$$

Indicheremo inoltre con $\mathcal{P}$ la classe degli insiemi aventi perimetro finito in R^n.

Se $E \in \mathcal{P}$ e $C \subset R^n$ è un insieme di Borel, definiamo anche *perimetro di E in C* il numero

$$P(E, C) := |D\chi_E|(C)$$

e scriveremo $P(E)$ per $P(E, R^n)$.

Ricordiamo che la *variazione* di una misura vettoriale μ è la misura σ-additiva definita da

$$|\mu|(C) := \sup\left\{\sum_{i=1}^{\infty} |\mu(C_i)| : C_i \in B(R^n),\ \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i = C,\ \ C_i \text{ a due a due disgiunti}\right\}$$

e che, grazie al teorema di rappresentazione di Riesz (vedi ad esempio [25], cap. 1) lo spazio delle misure vettoriale μ aventi variazione finita in Ω aperto di R^n si identifica con il duale di $C_0(\Omega, R^n)$ (la chiusura, nella norma del sup, delle funzioni continue a

supporto compatto). Inoltre il numero $|Du|(\Omega)$ coincide con la norma del funzionale lineare

$$g \mapsto \sum_{i=1}^{n} \int_{R^n} g_i \, d\mu_i \qquad g \in C_0(\Omega, R^n)$$

associato a μ. In termini distribuzionali possiamo dire che una funzione u ha variazione limitata se e solo se la derivata della distribuzione indotta da u è rappresentabile mediante l'integrazione rispetto ad una misura μ. Naturalmente tutte le funzioni u di classe C^1 tali che $\nabla u \in L^1(R^n)$ hanno variazione limitata in R^n e

$$Du(C) = \int_C \nabla u \, dx, \qquad |Du|(C) = \int_C |\nabla u| \, dx, \qquad \forall C \in B(R^n).$$

Nel caso di un insieme E avente frontiera C^1 a tratti la formula di Gauss-Green implica

$$D_i \chi_E(B) = \int_{B \cap \partial E} \nu_i \, d\sigma \qquad \forall B \in B(R^n)$$

ove $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_n)$ è la normale interna a ∂E e σ è l'elemento d'area $(n-1)$-dimensionale sul bordo di E, definito mediante le carte locali. Si ha quindi

$$P(E, C) = \sigma(\partial E \cap C).$$

Vedremo in seguito che queste formule si estendono in qualche modo anche al caso generale $E \in \mathcal{P}$.

Enunciamo ora tre fondamentali risultati che consentono di impostare problemi di minimo in $\mathcal{P}$. La metrica naturale in $\mathcal{P}$ è data dalla distanza in L^1 delle funzioni caratteristiche

$$\delta(E, F) := \int_{R^n} |\chi_E - \chi_F| \, dx = |E \Delta F|$$

ove $\Delta(E, F) = (F \setminus E) \cup (E \setminus F)$ è la differenza simmetrica di E e F. Osserviamo che, come per le funzioni L^p, non distinguiamo due insiemi E, F tali che $|E \Delta F| = 0$.

Teorema di compattezza: *Dati R, $C > 0$, la classe*

$$\mathcal{P}_{R,C} := \{E \in \mathcal{P} : |E \setminus B_R| = 0, \ P(E) \leq C\}$$

è compatta nella topologia indotta da δ.

Dimostrazione: Per il teorema di Fréchet-Kolmogorov (vedi [3], pag. 72) applicato alle funzioni caratteristiche di insiemi di $\mathcal{P}_{R,C}$ basta dimostrare che

$$\lim_{h \to 0} \delta(E + h, E) = 0$$

uniformemente al variare di E in $\mathcal{P}_{R,C}$. La proprietà di uniforme continuità delle traslazioni segue dalla disuguaglianza

$$\delta(E+h,E) \leq |h|P(E) \qquad \forall E \in \mathcal{P} \tag{3.1}$$

e dal fatto che il perimetro è limitato in $\mathcal{P}_{R,C}$. Per dimostrare la (3.1) incominciamo col verificare che

$$\int_{R^n} |u(x+h)-u(x)|\,dx \leq |h| \int_{R^n} |\nabla u|\,dx \tag{3.2}$$

per ogni $u \in C^1(R^n)$. Si ha infatti

$$|u(x+h)-u(x)| = \left| \int_0^1 \langle \nabla u(x+th), h\rangle\,dt \right| \leq |h| \int_0^1 |\nabla u|(x+th)\,dt\,.$$

Integrando ambo i membri ed usando il teorema di Fubini otteniamo

$$\int_{R^n} |u(x+h)-u(x)|\,dx \leq |h| \int_0^1 \int_{R^n} |\nabla u|(x+th)\,dx\,dt = \int_{R^n} |\nabla u|(x)\,dx\,.$$

Approssimiamo ora $u = \chi_E$ per convoluzione: posto $u_\varepsilon := u * \varrho_\varepsilon$ per un opportuno nucleo di convoluzione ϱ_ε è facile verificare (vedi ad esempio [27], cap. 6) che $u_\varepsilon \in C^\infty(R^n)$ e

$$\nabla u_\varepsilon(x) = \int_{R^n} \varrho_\varepsilon(x-y)\,D\chi_E(y)$$

quindi integrando ed usando il teorema di Fubini-Tonelli (vedi anche la (3.12) e l'esercizio 8) si ottiene

$$\int_{R^n} |\nabla u_\varepsilon|\,dx \leq \int_{R^n}\int_{R^n} \varrho_\varepsilon(x-y)\,d|D\chi_E|(y)\,dx = |D\chi_E|(R^n). \tag{3.3}$$

La (3.1) segue allora facilmente da (3.2) e (3.3) facendo tendere ε a zero. ■

Teorema di semicontinuità: *Sia $\Omega \subset R^n$ aperto. Il funzionale*

$$u \mapsto |Du|(\Omega)$$

è $L^1_{loc}(\Omega)$-semicontinuo inferiormente nella classe delle funzioni a variazione limitata in R^n. In particolare $E \mapsto P(E,\Omega)$ è $L^1_{loc}(\Omega)$-semicontinuo inferiormente in $\mathcal{P}$.

Dimostrazione: Usando la densità di C_0^1 si ha

$$|Du|(\Omega) = \sup\left\{\sum_{i=1}^{n} g_i \, d\mu_i : g \in C_0(\Omega, R^n),\ |g| \leq 1\right\} =$$

$$= \sup\left\{\int_{R^n} u \operatorname{div} g \, dx : g \in C_0^1(\Omega, R^n),\ |g| \leq 1\right\}.$$

Dato che ognuno dei funzionali

$$u \mapsto \int_{R^n} u \operatorname{div} g \, dx \qquad g \in C_0^1(\Omega, R^n)$$

è continuo nella topologia $L^1_{loc}(\Omega)$ la tesi segue. ■

Teorema di confronto: *Per ogni $E \in \mathcal{P}$ ed ogni convesso chiuso $C \subset R^n$ si ha*

$$P(E \cap C) \leq P(E)$$

con uguaglianza se e solo se $|E \setminus C| = 0$.

Esercizio 5: Verificare che le condizioni

$$u_h \in C^1(R^n) \cap L^1(R^n), \qquad \lim_{h \to +\infty} |u_h - \chi_E| \, dx = 0, \qquad \sup_{h \in N} \int_{R^n} |\nabla u_h| \, dx < +\infty$$

implicano $E \in \mathcal{P}$ (usare il teorema di Banach-Alaoglu, vedi ad esempio [3] Teorema III.15).

Esercizio 6: Verificare che se $E \in \mathcal{P}$, Ω è un aperto connesso allora $P(E, \Omega) = 0$ se e solo se $|\Omega \cap E| = 0$ o $|\Omega \setminus E| = 0$ (usare le approssimanti per convoluzione).

Esercizio 7: Dalla semicontinuità del perimetro e dalla (3.3) dedurre

$$P(E \cup F) \leq P(E) + P(F). \tag{3.4}$$

Dimostrazione del teorema di confronto: Usando il fatto che ogni convesso chiuso è intersezione di una famiglia al più numerabile di semispazi ed il teorema di semicontinuità del perimetro ci riduciamo subito al caso in cui $C = H$ sia un semispazio chiuso. Sia ν la normale interna ad H e sia

$$\pi(x) = \begin{cases} x & \text{se } \langle x, \nu \rangle > 0\,; \\ x - \langle x, \nu \rangle \nu & \text{se } \langle x, \nu \rangle \leq 0\,; \end{cases}$$

la proiezione ortogonale su H. Osserviamo che $J\pi = Id$ oppure $J\pi = I - \nu \otimes \nu$; in ogni caso $|pJ\pi| \leq |p|$ per ogni vettore p di R^n, come è facile verificare. Definiamo in modo analogo la proiezione π' sul semispazio chiuso opposto ad H e fissiamo un semispazio

aperto L contenente H. Dette u_ε le approssimanti per convoluzione di $u := \chi_E$ abbiamo

$$P(E) \geq \int_{\mathbf{R}^n} |\nabla u_\varepsilon|\, dx \geq \int_L |\nabla(u_\varepsilon \circ \pi)|\, dx + \int_{\mathbf{R}^n \setminus \bar{L}} |\nabla(u_\varepsilon \circ \pi')|\, dx .$$

Usando l'Esercizio 5 (le funzioni $u_\varepsilon \circ \pi$ sono lipschitziane in $\mathbf{R}^n$ e di classe C^1 in $\mathbf{R}^n \setminus \partial H$ ma possono essere a loro volta approssimate da funzioni C^1) ed il fatto che $u_\varepsilon \circ \pi$ (risp. $u_\varepsilon \circ \pi'$) converge a $\chi_{E \cap H}$ (risp. $\chi_{E \setminus H}$) otteniamo

$$P(E) \geq P(E \cap H, L) + P(E \setminus H, \mathbf{R}^n \setminus \bar{L}) = P(E \cap H) + P(E, \mathbf{R}^n \setminus \bar{L}) .$$

Facendo tendere L ad H otteniamo

$$P(E) \geq P(E \cap H) + P(E, \mathbf{R}^n \setminus H) .$$

La disuguaglianza è quindi dimostrata. Se valesse l'uguaglianza avremmo $P(E, \mathbf{R}^n \setminus H) = 0$ e quindi $|E \setminus H| = 0$ per l'Esercizio 6 (si ricordi che E ha misura finita).

Supponiamo ora che $P(E \cap C) = P(E)$. Fissato un semispazio H contenente C, ci basta vedere che $|E \setminus H| = 0$. A tale scopo osserviamo che

$$P(E \cap H) \leq P(E), \qquad P(E \cap H) \geq P(E \cap H \cap C) = P(E \cap C)$$

quindi $P(E \cap H) = P(E)$. Per quanto visto prima, deve essere $|E \setminus H| = 0$. ■

Usando questi tre risultati si ottiene subito il

Teorema 3.1: *Sia $S = \mathcal{P}$, $E_0 \in \mathcal{P}$ limitato e poniamo*

$$\mathcal{F}(\lambda, E, F) = P(E) + \frac{\lambda(n-1)}{2n\omega_n} \delta^2(E, F) . \tag{3.5}$$

Allora $GMM(\mathcal{F}, \mathcal{P}, E_0) \neq \emptyset$ e

$$GMM(\mathcal{F}, \mathcal{P}, E_0) \subset AC_2([0, +\infty), \mathcal{P}) .$$

Dimostrazione: Basta osservare che, detto C un convesso compatto che contiene E_0, grazie al teorema di confronto si ha

$$\inf_{E \in \mathcal{P}} \mathcal{F}(\lambda, E, E_0) = \inf_{E \in \mathcal{P},\, E \subset C} \mathcal{F}(\lambda, E, E_0)$$

ed il secondo inf è un minimo per i teoremi di compattezza e semicontinuità. Allo stesso modo $E_\lambda(k) \subset C$ implica $E_\lambda(k+1) \subset C$ in quanto

$$\inf_{E \in \mathcal{P}} \mathcal{F}(\lambda, E, E_\lambda(k)) = \min_{E \in \mathcal{P},\, E \subset C} \mathcal{F}(\lambda, E, E_\lambda(k)) .$$

Quindi i movimenti minimizzanti hanno luogo nell'insieme

$$\mathcal{P}_C := \{E \in \mathcal{P} : E \subset C\}$$

e si applica il Teorema 2.4 con $E = \mathcal{P}_C$ e f uguale al perimetro. ■

Sfortunatamente l'evoluzione di frontiere ottenuta nel Teorema 3.1 non è per «curvatura media» ma per curvatura «massima», come mostra il seguente esempio. L'idea è che, dovendo perdere o guadagnare del volume per ridurre o aumentare l'insieme E_0, conviene concentrare la variazione di volume nella regione dove la curvatura è massima.

Esempio: Sia $n = 2$ e $E_0 = B_2((-3, 0)) \cup B_1((1, 0))$. Allora per λ abbastanza grande si ha (non daremo una dimostrazione rigorosa di questo)

$$\min_E \mathcal{F}(\lambda, E, E_0) = \min_{r \leq 1,\ R \leq 2} \mathcal{F}(\lambda, B_R((-3, 0)) \cup B_r((1, 0)), E_0)\,.$$

La funzione $\phi(r, R)$ su scritta vale

$$2\pi(r + R) + \frac{\lambda\pi}{4}\left[(1 - r^2) + (4 - R^2)\right]^2$$

ed ha minimo per $R = 2$ e r soddisfacente l'equazione $\lambda r(1 - r^2) = 2$ (si osservi che $1 - r \sim \lambda^{-1}$). Iterando il procedimento di minimo e poi facendo tendere λ a $+\infty$ si trova che l'unico elemento $E(t) \in MM(\mathcal{F}, \mathcal{P}, E_0)$ è dato da $B_{R(t)}((-3, 0)) \cup \cup B_{r(t)}((1, 0))$ con

$$r(t) = \begin{cases} \sqrt{1 - 2t} & \text{se } t \in [0, 1/2]; \\ 0 & \text{se } t \geq 1/2; \end{cases} \qquad R(t) = \begin{cases} 2 & \text{se } t \in [0, 1/2]; \\ \sqrt{5 - 2t} & \text{se } t \in [1/2, 5/2]; \\ 0 & \text{se } t \geq 5/2\,. \end{cases}$$

Quindi la sfera piccola si contrae fino a scomparire e solo a questo punto la sfera grande inizia a contrarsi. Questo tipo di evoluzione è quindi fortemente non locale.

3.2. *Il funzionale di Almgren-Taylor-Wang.*

L'idea di Almgren-Taylor-Wang è stata quella di pesare in modo opportuno la variazione di area in modo da ottenere esattamente l'evoluzione per curvatura media. Il peso giusto risulta essere la funzione distanza dal bordo di $E_\lambda(k)$. Prima di definire il loro funzionale diamo una definizione di bordo per insiemi misurabili che sia invariante rispetto al passaggio ad un insieme equivalente.

Definizione 3.2: Dato $E \subset \mathbf{R}^n$ misurabile poniamo

$$\partial E := \{x \in \mathbf{R}^n : 0 < |E \cap B_\varrho(x)| < \omega_n \varrho^n \ \ \forall \varrho > 0\}\,.$$

È facile verificare che ∂E è chiuso e $\partial E = \partial E'$ se $|E \Delta E'| = 0$.

Usando la proprietà (3.4) si possono costruire insiemi di perimetro finito E tali che ∂E ha misura positiva (vedi [19], esempio 1.10). Per avere un bordo «$(n-1)$-dimensionale» sarà necessario rinunciare alle nozioni puntuali o topologiche e fare ricorso a $D\chi_E$ (vedi la prossima sezione). Dall'Esercizio 6 segue

$$P(E, B_\varrho(x)) = 0 \Leftrightarrow |B_\varrho(x) \cap E|\,|B_\varrho(x) \setminus E| = 0$$

quindi ∂E coincide col supporto della misura $|D\chi_E|$.

Definizione 3.3: Il funzionale di Almgren-Taylor-Wang è definito da

$$\mathcal{F}(\lambda, E, F) := P(E) + \lambda \int_{E \Delta F} \operatorname{dist}(x, \partial F)\, dx$$

per $\lambda > 1$ e $E, F \in \mathcal{P}$.

D'ora in poi con la notazione $\mathcal{F}$ faremo sempre riferimento al funzionale su definito e supporremo che $n \geq 2$. Osserviamo che i teoremi di compattezza, semicontinuità e confronto garantiscono anche in questo caso l'esistenza di minimi di $E \mapsto F(\lambda, E, F)$ per ogni insieme F misurabile e limitato.

La penalizzazione

$$\int_{E \Delta F} \operatorname{dist}(x, \partial F)\, dx$$

essendo non simmetrica è ben lungi dall'essere una distanza. Se minimizzassimo al posto del funzionale di Almgren il funzionale simmetrizzato

$$\mathcal{F}^*(\lambda, E, F) := P(E) + \lambda \int_{E \Delta F} [\operatorname{dist}(x, \partial F) + \operatorname{dist}(x, \partial E)]\, dx$$

troveremmo

$$\inf_E \mathcal{F}^*(\lambda, E, F) = \min_E \mathcal{F}(\lambda, E, F).$$

Questo segue dal fatto che per ogni $\varepsilon > 0$ ed ogni $E \in \mathcal{P}$ esiste $E_\varepsilon \in \mathcal{P}$ tale che

$$P(E_\varepsilon) \leq P(E) + \varepsilon, \qquad \delta(E_\varepsilon, E) < \varepsilon, \qquad \operatorname{dist}(x, \partial E_\varepsilon) \leq \sqrt{n}\,\varepsilon \quad \forall x \in \mathbf{R}^n .$$

Basta infatti aggiungere o sottrarre ad E una collezione numerabile di sferette centrate in εZ^n e far sì che la serie delle potenze $(n-1)$-sime dei raggi sia piccola. La (3.4) consente di stimare il perimetro di E_ε.

I due principali risultati dimostrati in [1] sono i seguenti

TEOREMA 3.2: *Supponiamo che E_0 sia un insieme limitato con frontiera di classe C^∞. Allora*

(1) *esiste $T > 0$ ed una famiglia $\{E(t)\}_{0 \leq t < T}$ di insiemi tale che $E(0) = E_0$ e le frontiere di $E(t)$, di classe C^∞, si evolvono secondo la curvatura media;*

(2) *se $\{E(t)\}_{0 \leq t < T}$ è una famiglia di insiemi le cui frontiere sono di classe C^∞ e si evolvono secondo la curvatura media allora ogni $F(t) \in GMM(\mathcal{F}, \mathcal{P}, E_0)$ coincide con $E(t)$ in $[0, T)$.*

La dimostrazione del Teorema 3.2 è molto tecnica: l'idea consiste nel vedere gli insiemi E_t per tempi piccoli come deformati dell'insieme E_0 per opportune deformazioni $\Phi(x, t)$. Poi si dimostra l'esistenza di soluzioni dell'equazione parabolica non lineare in Φ che corrisponde all'evoluzione di $E(t)$ secondo la curvatura media.

Grazie alla proprietà (2) possiamo considerare gli elementi $F(t)$ appartenti a $GMM(\mathcal{F}, \mathcal{P}, E_0)$ come una «evoluzione in senso generalizzato» che coincide con quella classica finchè tutto è regolare ma ha il pregio di essere definita anche dopo la comparsa di singolarità. Altre definizioni deboli sono state considerate in letteratura (vedi [1], [12], [20], [26]) ed il confronto tra esse è per certi aspetti ancora incompleto.

Sulla regolarità nel tempo degli elementi di $GMM(\mathcal{F}, \mathcal{P}, E_0)$ vale il

TEOREMA 3.3: *Sia E_0 un insieme misurabile e limitato tale che $|\partial E_0| = 0$. Allora $GMM(\mathcal{F}, \mathcal{P}, E_0)$ è non vuoto ed ogni $E(t) \in GMM(\mathcal{F}, \mathcal{P}, E_0)$ soddisfa la condizione di Hölder*

$$\delta(E(s), E(t)) \leq (\Gamma + D)P(E_0)|s - t|^{1/(n+1)} \qquad \forall s, t \in [0, +\infty), \quad |s - t| < 1$$

con Γ dipendente solo da n e D uguale al diametro del più piccolo convesso contenente E_0.

Usando la variazione prima dell'area cerchiamo ora di giustificare la scelta del funzionale $\mathcal{F}$. Sia E un minimo del funzionale $F \mapsto \mathcal{F}(\lambda, F, E_0)$, prendiamo un punto $x \notin \partial E_0$ e supponiamo che ∂E sia di classe C^1 in un intorno di x. Dato che x non appartiene a ∂E_0, sostituendo se necessario E_0 con un insieme equivalente possiamo trovare un $r > 0$ tale che $\partial E \cap B_r(x)$ è di classe C^1 e $E_0 \cap B_r(x) = \emptyset$ oppure $E_0 \supset B_r(x)$.

Supponiamo che valga la prima possibilità. Allora E minimizza il funzionale

$$\mathcal{G}(F) := P(F, B_r(x)) + \lambda \int_{F \cap B_r(x)} \operatorname{dist}(y, \partial E_0)\, dy$$

rispetto a variazioni di E relativamente compatte in $B_r(x)$, vale a dire

$$E \Delta F \subset\subset B_r(x) \Rightarrow \mathcal{G}(E) \leq \mathcal{G}(F).$$

Questo problema di minimo è ben noto nella letteratura (vedi [22]) e può essere

usato (sostituendo $\lambda \operatorname{dist}(\cdot, \partial E)$ con g) per trovare un'insieme la cui curvatura media H soddisfa la condizione $\langle H, \nu \rangle = -g$.

Scelto infatti un campo di vettori $g \in C_0^1(B_r(x), \mathbf{R}^n)$ e posto $\Phi_t(g) := x + tg(x)$ abbiamo che per t abbastanza piccolo Φ_t è un diffeomorfismo C^1 di $B_r(x)$ in sè che coincide con l'identità vicino a $\partial B_r(x)$. Poniamo

$$E_t := \Phi_t(E) \cap B_r(x) \qquad \sigma(y) := \operatorname{dist}(y, \partial E_0).$$

Dato che la funzione σ è lipschitziana e quindi differenziabile quasi ovunque in $\mathbf{R}^n$ e dato che la formula di Gauss-Green continua a valere per campi vettoriali lipschitziani (per approssimazione con campi C^1) otteniamo

$$\int_{E_t} \sigma\, dy = \int_E \sigma(\Phi_t) |\det J\Phi_t(y)|\, dy = \int_E [\sigma + t\langle \nabla\sigma, g\rangle + o(t)][1 + t \operatorname{div} g + o(t)]\, dy =$$

$$= \int_E \sigma\, dy + t \int_E \operatorname{div}(\sigma g)\, dy + o(t) = \int_E \sigma\, dy - \int_{\partial E} \sigma\langle g, \nu\rangle\, d\mathcal{H}^{n-1}.$$

D'altro canto la formula dell'area ed il teorema della divergenza ([25], cap. 2) implicano

$$P(E_t, B_r(x)) = \mathcal{H}^{n-1}(\Phi_t(\partial E \cap B_r(x))) = \mathcal{H}^{n-1}(\partial E \cap B_r(x)) + t \int_{\partial E} \operatorname{div}^\tau g + o(t) =$$

$$= P(E, B_r(x)) - t \int_{\partial E} \langle g, H\rangle\, d\mathcal{H}^{n-1} + o(t)$$

ove H è il vettore curvatura media di ∂E. Mettendo insieme i due sviluppi asintotici e la condizione

$$\liminf_{t \to 0^+} \frac{\mathcal{G}(E_t) - \mathcal{G}(E)}{t} \geq 0$$

otteniamo

$$-\int_{\partial E} [\langle g, H\rangle + \lambda\sigma\langle g, \nu\rangle]\, d\mathcal{H}^{n-1} \geq 0.$$

Essendo il campo g arbitrario vale l'uguaglianza e $H = -\lambda\sigma\nu$. Ora possiamo pensare che H e ν siano per λ grande una buona approssimazione della curvatura media H_0 e della normale interna ν_0 di E_0; essendo H orientata in senso opposto alla normale interna ν abbiamo che H_0 punta verso l'esterno di E_0, in accordo col fatto che $E_0 \cap B_r(x) = \emptyset$ e l'insieme E è un «rigonfiamento» di E_0. Inoltre lo spostamento di E rispetto a E_0, rappresentato da σ, ha modulo uguale a $|H|\tau$, ove $\tau = \lambda^{-1}$ è il passo di discretizzazione temporale, in accordo col fatto che la «velocità» di moto deve essere uguale a $|H|$.

Analogamente, nel caso in cui $E_0 \supset B_r(x)$ si trova che E minimizza rispetto a pertur-

bazioni relativamente compatte in $B_r(x)$ il funzionale

$$\mathcal{G}(F) := P(F, B_r(x)) + \lambda \int_{B_r(x) \setminus F} \sigma(y)\, dy = P(F, B_r(x)) - \int_{F \cap B_r(x)} \sigma(y)\, dy + c$$

con c uguale all'integrale di σ su $B_r(x)$. Mediante deformazioni locali si ottiene quindi $H = \lambda\sigma\nu$. Questo caso corrisponde ad una «contrazione» di E dovuta al fatto che H_0 punta nella stessa direzione di ν_0.

3.3. *Misure di Hausdorff e struttura degli insiemi $E \in \mathcal{P}$.*

Definizione 3.2: Sia $k \in [0, n]$; la *misura di Hausdorff* k-dimensionale di un insieme $S \subset \boldsymbol{R}^n$ è definita da

$$\mathcal{H}^k(S) := \lim_{\delta \to 0^+} \mathcal{H}^k_\delta(S)$$

ove

$$\mathcal{H}^k_\delta(S) := \frac{\omega_k}{2^k} \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} (\operatorname{diam} S_i)^k : S \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} S_i,\ \operatorname{diam} S_i < \delta \right\}.$$

La costante $\omega_k > 0$ è definita arbitrariamente se k non è intero, vale 1 se $k = 0$ e vale la misura di Lebesgue della palla unitaria di $\boldsymbol{R}^k$ se $k > 0$ è intero.

Osservazione: È facile vedere già nel caso $k = 1$ che per avere una buona approssimazione della lunghezza di un insieme regolare S bisogna forzare i ricoprimenti S_i ad essere molto fini. Di qui la necessità di introdurre le cosiddette pre-misure di Hausdorff $\mathcal{H}^k_\delta$. Richiamiamo ora le principali proprietà delle misure di Hausdorff (vedi ad esempio [25], cap. 1).

Proposizione 3.4: *Le misure $\mathcal{H}^k$ sono σ-additive sugli insiemi di Borel, a valori in $[0, +\infty]$. Inoltre $\mathcal{H}^0$ è la misura che conta i punti e $\mathcal{H}^n = \mathcal{H}^n_\delta$ è la misura esterna di Lebesgue. Si ha inoltre che se k è intero e $S \in \boldsymbol{B}(\boldsymbol{R}^n)$ è contenuto in una varietà C^1 di dimensione k allora $\mathcal{H}^k(S)$ coincide con la misura k-dimensionale di S definita mediante le parametrizzazione locali. Infine vale l'implicazione*

$$\mathcal{H}^{k+\varepsilon}(S) > 0 \Rightarrow \mathcal{H}^k(S) = +\infty \tag{3.6}$$

per ogni $\varepsilon > 0$.

Grazie alla (3.6) è possibile definire la *dimensione di Hausdorff* di un insieme $S \subset \boldsymbol{R}^n$ ponendo

$$\mathcal{H} - \dim(S) := \inf\{t \geq 0 : \mathcal{H}^t(S) = 0\} = \sup\{t \geq 0 : \mathcal{H}^t(S) > 0\}.$$

In particolare

$$\mathcal{H} - \dim(S) \leq t \Leftrightarrow \mathcal{H}^{t+\varepsilon}(S) = 0 \quad \forall \varepsilon > 0 .$$

Un importante collegamento tra le misure di Hausdorff e gli insiemi di perimetro finito è dato dal teorema di struttura di De Giorgi. Dato $E \in \mathcal{P}$ definiamo *frontiera ridotta di* E l'insieme

$$\partial^* E = \left\{ x \in \partial E : \exists \nu(x) := \lim_{\varrho \to 0^+} \frac{D\chi_E(B_\varrho(x))}{|D\chi_E|(B_\varrho(x))} \text{ e } |\nu(x)| = 1 \right\}. \tag{3.7}$$

È facile vedere che $\partial^* E \in \mathcal{B}(\mathbf{R}^n)$ e ν è una funzione di Borel. Vale allora il

Teorema di struttura: *Per ogni insieme di Borel $C \subset \mathbf{R}^n$ si ha $|D\chi_E|(C) = \mathcal{H}^{n-1}(\partial^* E \cap C)$. Vale inoltre la formula di Gauss-Green generalizzata*

$$\int_E \frac{\partial g}{\partial x_i}\, dx = -\int_{\partial^* E} g \nu_i \, d\mathcal{H}^{n-1} \qquad \forall g \in C_0^1(\mathbf{R}^n), \ i = 1, \ldots, n .$$

ove $\nu(x)$ è definita in (3.7). Infine, per ogni $x \in \partial^* E$ gli insiemi

$$E_\varrho^x := \frac{E - x}{\varrho}$$

convergono in $L^1_{loc}(\mathbf{R}^n)$ al semispazio

$$E_0^x := \{ y \in \mathbf{R}^n : \langle y, \nu(x) \rangle \geq 0 \} . \tag{3.8}$$

Osservazione: Dal fatto che $P(E, B_\varrho(x)) = \varrho^{n-1} P(E_\varrho^x, B_1(0))$ e dalla semicontinuità del perimetro segue

$$\liminf_{\varrho \to 0^+} \frac{P(E, B_\varrho(x))}{\omega_{n-1} \varrho^{n-1}} \geq 1 \tag{3.9}$$

per ogni $x \in \partial^* E$. In realtà il liminf è un limite ([19], Teorema 3.8) e vale l'uguaglianza, ma a noi questo non servirà.

3.4. *Regolarità e stime di densità per i λ-minimi.*

Diremo che E è un *λ-minimo* se esiste E_0 misurabile, limitato e non vuoto tale che E minimizza $F \mapsto \mathcal{F}(\lambda, F, E_0)$.

Lemma 3.5: *Sia $x \in \mathbf{R}^n$ e $E \in \mathcal{P}$. Per quasi ogni $\varrho > 0$ esiste un insieme $E_\varrho \in \mathcal{P}$ tale che*

$E \Delta E_\varrho$ è disgiunto da $\mathbf{R}^n \setminus B_\varrho(x)$ e

$$P(E, \overline{B}_\varrho(x)) \leq \frac{\varrho[P(E, B_\varrho(x))]'}{n-1}.$$

Dimostrazione: L'idea è di costruire E_ϱ sostituendo in $B_\varrho(x)$ l'insieme E con il cono su $E \cap B_\varrho(x)$. Supponiamo per semplicità $x = 0$. Data $u \in C^1(\mathbf{R}^n)$ e posto

$$u_r(x) := \begin{cases} u(x) & \text{se } |x| \geq r; \\ u\left(\dfrac{rx}{|x|}\right) & \text{se } |x| < r; \end{cases}$$

abbiamo la stima

$$\int_{B_r} |\nabla u_r| \, dx = \int_0^r \left(\int_{\partial B_\varrho} |\nabla u_r| \, d\mathcal{H}^{n-1} \right) d\varrho \leq$$

$$\leq \int_0^r \left(\frac{\varrho}{r}\right)^{n-2} \int_{\partial B_r} |\nabla u| \, d\mathcal{H}^{n-1} \, d\varrho = \frac{r}{n-1} \int_{\partial B_r} |\nabla u| \, d\mathcal{H}^{n-1}. \tag{3.10}$$

Siano ora $u_\varepsilon = u * \varrho_\varepsilon$ le approssimanti di $u := \chi_E$; dato che

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_0^{+\infty} \left(\int_{\partial B_\varrho} |u_\varepsilon - \chi_E| \, d\mathcal{H}^{n-1} \right) d\varrho = 0$$

possiamo trovare una successione $(\varepsilon_h) \subset (0, +\infty)$ infinitesima tale che, posto $v_h := u_{\varepsilon_h}$, si abbia

$$\lim_{h \to +\infty} \int_{\partial B_\varrho} |v_h - \chi_E| \, d\mathcal{H}^{n-1} = 0 \tag{3.11}$$

per quasi ogni $\varrho > 0$. Scegliamo $\varrho > 0$ tale che vale (3.11) e tale che $\gamma(r) := P(E, B_r)$ è derivabile per $r = \varrho$; definiamo

$$E_\varrho := \left\{ x \in B_\varrho : \frac{\varrho x}{|x|} \in E \right\} \cup (E \setminus B_\varrho).$$

Ci serve ora la seguente proprietà delle approssimanti per convoluzione: per ogni insieme di Borel C ed ogni funzione a variazione limitata u si ha

$$\int_C |\nabla(u * \varrho_\varepsilon)| \, dx \leq |Du|(C_\varepsilon) \qquad \text{con } C_\varepsilon := \{x \in \mathbf{R}^n : \operatorname{dist}(x, C) \leq \varepsilon\}. \tag{3.12}$$

Usando la (3.10) e la (3.12) otteniamo

$$\frac{1}{\delta}\int_{\varrho}^{\varrho+\delta}\int_{B_r}|\nabla v_{b,r}|\,dx\,dr \leq \frac{1}{\delta}\int_{\varrho}^{\varrho+\delta}\frac{r}{n-1}\int_{\partial B_r}|\nabla v_b|\,d\mathcal{H}^{n-1}\,dr \leq$$

$$\leq \frac{\varrho+\delta}{\delta(n-1)}\int_{B_{\varrho+\delta}\setminus B_\varrho}|\nabla v_b|\,dx \leq \frac{\varrho+\delta}{(n-1)\delta}P(E,\overline{B}_{\varrho+\delta+\varepsilon_b}\setminus B_{\varrho-\varepsilon_b}) \leq$$

$$\leq \frac{\varrho+\delta}{(n-1)\delta}\left[\gamma(\varrho+\delta+2\varepsilon_b)-\gamma(\varrho-\varepsilon_b)\right].$$

Posto $\delta=\delta_b=\sqrt{\varepsilon_b}$, possiamo quindi trovare $r(b)\in(\varrho,\varrho+\delta_b)$ tali che

$$\limsup_{b\to+\infty}\int_{B_{r(b)}}|\nabla v_{b,r(b)}|\,dx \leq \frac{\varrho\gamma'(\varrho)}{n-1}. \tag{3.13}$$

Dato che $r(b)$ converge a ϱ è facile verificare che $u_{b,r(b)}$ converge a χ_{E_ϱ} in $L^1(R^n\setminus B_\varrho)$. Osserviamo anche che

$$\int_{B_\varrho}|v_{b,r(b)}-\chi_{E_\varrho}|\,dx \leq \int_{B_\varrho}|v_{b,\varrho}-\chi_{E_\varrho}|\,dx+\int_{B_\varrho}|v_{b,\varrho}-v_{b,r_b}|\,dx \leq$$

$$\leq \varrho\int_{\partial B_\varrho}|v_b-\chi_{E_\varrho}|\,d\mathcal{H}^{n-1}+\varrho\int_{\partial B_\varrho}|v_{b,\varrho}-v_{b,r(b)}|\,d\mathcal{H}^{n-1}(x)$$

e il primo addendo è infinitesimo per la (3.11). Per dimostrare che $u_{b,r(b)}$ converge a χ_{E_ϱ} anche in $L^1(B_\varrho)$ ci basta quindi verificare che anche il secondo addendo è infinitesimo. Si ha

$$\int_{\partial B_\varrho}|v_{b,\varrho}(x)-v_{b,r(b)}(x)|\,d\mathcal{H}^{n-1}(x) \leq \frac{r(b)}{\varrho}\int_{\partial B_\varrho}\int_{\varrho}^{r(b)}\left|\nabla v_b\left(\frac{tx}{\varrho}\right)\right|\,dt\,d\mathcal{H}^{n-1}(x) =$$

$$= \frac{r(b)}{\varrho}\int_{B_{\varrho+r(b)}\setminus B_\varrho}|\nabla v_b|\,dx \leq \frac{r(b)}{\varrho}\left[P(E,B_{\varrho+r(b)+2\varepsilon_b})-P(E,B_{\varrho-\varepsilon_b})\right] =$$

$$= \frac{r(b)}{\varrho}\left[\gamma(\varrho+r(b)+2\varepsilon_b)-\gamma(\varrho-\varepsilon_b)\right]$$

che è infinitesimo per la continuità di γ in ϱ.

Verifichiamo infine la stima del perimetro di E_ϱ in $\overline{B}_\varrho$: per $\eta > 0$ fissato si ha

$$\int_{B_{\varrho+\eta}} |\nabla u_{k,r(k)}|\,dx \leq \int_{B_{r(k)}} |\nabla u_{k,r(k)}|\,dx + \int_{B_{\varrho+\eta}\setminus B_{r(k)}} |\nabla u_k|\,dx \leq$$

$$\leq \int_{B_{r(k)}} |\nabla u_{k,r(k)}|\,dx + P(E, \overline{B}_{\varrho+\eta+\varepsilon_k} \setminus B_{r(k)-\varepsilon_k}).$$

Passando al limite per $k \to +\infty$ ed usando (3.13) otteniamo

$$P(E_\varrho, B_{\varrho+\eta}) \leq \frac{\varrho\gamma'(\varrho)}{n-1} + \gamma(\varrho+2\eta) - \gamma(\varrho).$$

Facendo tendere η a zero si ha la tesi. ■

Esercizio 8: Dimostrare la (3.12).

Stima di densità: *Esiste una costante $\beta > 0$ dipendente solo da n con la seguente proprietà: per ogni λ-minimo E ed ogni $x \in \partial E$ si ha*

$$0 < \varrho \leq (D\lambda)^{-1} \Rightarrow P(E, B_\varrho(x)) \geq \beta\varrho^{n-1}$$

ove $D - 1 > 0$ è il diametro del più piccolo convesso contenente E_0.

Dimostrazione: Sia E un minimo di $F \mapsto \mathcal{F}(\lambda, F, E_0)$. Per la scelta di D si ha $\operatorname{dist}(y, \partial E_0) \leq D$ per ogni $x \in \partial E$ ed ogni $y \in B_1(x)$.

Fissato $x \in \partial^* E$ consideriamo gli insiemi E_ϱ dati dal Lemma 3.5. Fissato un valore $\varrho \in (0, 1)$ per cui vale la tesi del Lemma 3.5, osserviamo che la derivabilità di $r \to P(E, B_r(x))$ per $r = \varrho$ implica $P(E, \partial B_\varrho(x)) = 0$. Inoltre

$$P(E, \mathbf{R}^n \setminus \overline{B}_\varrho(x)) = P(E_\varrho, \mathbf{R}^n \setminus \overline{B}_\varrho(x))$$

perchè $E \Delta E_\varrho$ è disgiunto da $\mathbf{R}^n \setminus \overline{B}_\varrho(x)$. Usando queste informazioni e la minimalità di E, confrontando $\mathcal{F}(\lambda, E, E_0)$ con $\mathcal{F}(\lambda, E_\varrho, E_0)$ otteniamo

$$P(E, B_\varrho(x)) \leq P(E_\varrho, \overline{B}_\varrho(x)) + D\lambda\omega_n\varrho^n \leq \frac{\varrho\left[P(E, B_\varrho(x))\right]'}{n-1} + D\lambda\omega_n\varrho^n. \tag{3.14}$$

Posto

$$h(t) := \frac{P(E, B_t(x))}{t^{n-1}} + D\lambda(n-1)\omega_n t$$

la disuguaglianza (3.14) implica $h'(t) \geq 0$ per quasi ogni $t \in (0, 1)$. Essendo h una funzione BV di una variabile (vedi [24], cap. 8) ed essendo la parte negativa della misura

Db maggiorata da

$$-(n-1)\frac{P(E, B_t(x))}{t^n}\mathcal{L}^1$$

e quindi assolutamente continua, dal fatto che $b' \geq 0$ deduciamo che b è crescente. Dalla (3.9) segue $b(0^+) \geq \omega_{n-1}$, quindi per $\varrho \in (0, 1)$ otteniamo $b(\varrho) \geq \omega_{n-1}$, vale a dire

$$P(E, B_\varrho(x)) + D\lambda(n-1)\omega_n \varrho^n \geq \omega_{n-1}\varrho^{n-1}.$$

Essendo $\partial^* E$ denso in ∂E otteniamo

$$P(E, B_\varrho(x)) + D\lambda(n-1)\omega_n \varrho^n \geq \omega_{n-1}\varrho^{n-1} \qquad \forall x \in \partial E, \ \varrho \in (0, 1).$$

Per $x \in \partial E$ e $D\lambda\omega_n(n-1)\varrho \leq \omega_{n-1}/2$ si ha $P(E, B_\varrho(x)) \geq \omega_{n-1}\varrho^{n-1}/2$. Se $\omega_{n-1} \geq 2(n-1)\omega_n$ (falsa per valori bassi di n) la tesi è soddisfatta; in caso contrario, posto $\gamma = \omega_{n-1}/(2(n-1)\omega_n) < 1$ otteniamo

$$P(E, B_\varrho(x)) \geq P(E, B_{\gamma\varrho}(x)) \geq \frac{\omega_{n-1}\gamma^{n-1}}{2}\varrho^{n-1}$$

per $x \in \partial E$ e $\varrho \in (0, (D\lambda)^{-1})$. ■

Lemma di Besicovitch: *Sia $E \subset \mathbf{R}^n$ limitato e $\varrho: E \to (0, +\infty)$. Esiste allora una famiglia al più numerabile $(x_i)_{i \in I} \subset E$ tale che*

$$E \subset \bigcup_{i \in I} B_{\varrho(x_i)}(x_i) \qquad \text{e} \qquad \operatorname{card}\{i \in I : x \in B_{\varrho(x_i)}(x_i)\} \leq \xi \qquad \forall x \in \mathbf{R}^n.$$

La costante ξ dipende solo dalla dimensione n.

Corollario 3.6: *Per ogni λ-minimo E si ha*

$$\mathcal{H}^{n-1}(\partial E \setminus \partial^* E) = 0.$$

Dimostrazione: Sia $C = \partial E \setminus \partial^* E$ e sia A un aperto contenente C. Fissato $0 < \delta < (D\lambda)^{-1}$, per ogni $x \in C$ sia $\varrho(x)$ il minimo tra $\delta/2$ e la distanza di x da ∂A. Detta $(x_i)_{i \in I} \subset C$ la famiglia data dal lemma di Besicovitch, usando la stima di densità abbiamo

$$\frac{2^{n-1}}{\omega_{n-1}}\mathcal{H}^{n-1}_\delta(C) \leq \sum_{i \in I}[2\varrho(x_i)]^{n-1} \leq \frac{2^{n-1}}{\beta}\sum_{i \in I} P(E, B_{\varrho(x_i)}(x_i)) \leq \frac{2^{n-1}\xi}{\beta}P(E, A).$$

Facendo tendere δ a 0 ed usando la regolarità esterna delle misure di Radon (vedi ad esempio [24], Teorema 2.17) otteniamo $\beta\mathcal{H}^{n-1}(C) \leq \omega_{n-1}\xi P(E, C)$. D'altro canto, per il teorema di struttura di De Giorgi, $P(E, C) = 0$ perchè C è disgiunto da $\partial^* E$. ■

Grazie al Corollario 3.6, se E è un λ-minimo useremo d'ora in poi indifferentemente ∂E e $\partial^* E$ nel fare integrazioni rispetto a $\mathcal{H}^{n-1}$ e nel calcolo del perimetro.

Teorema di regolarità parziale: *Sia E un λ-minimo. Esiste un insieme chiuso $K \subset \partial E$ avente dimensione minore o uguale a $(n-8)$ (vuoto per $n < 8$ e discreto per $n = 8$) tale che $\partial E \setminus K$ è una varietà di classe $C^{2,\alpha}$ di dimensione $(n-1)$.*

Dimostrazione: Nel corso di questa dimostrazione adotteremo provvisoriamente il linguaggio e le notazioni della teoria delle correnti (vedi ad esempio [23], [25]). Bombieri ha dimostrato in [5] il seguente risultato: sia X una k-corrente intera in $\boldsymbol{R}^n$ e supponiamo che X sia un «quasi minimo» per l'area k-dimensionale, nel senso che esistono $\delta > 0$ ed una funzione $\omega(t) \geq 0$ infinitesima per $t \to 0$ tali che

$$M(X \llcorner K) \leq (1 + \omega(r)) M(X \llcorner K + Y)$$

tutte le volte che Y è una k-corrente intera senza bordo avente supporto contenuto in K e $\operatorname{diam}(K) \leq r < \delta$. Fissato $x \in \operatorname{supp} X$ supponiamo che X abbia nel punto x un cono tangente C tale che $\Theta_k(C, y) \geq \Theta_k(C, 0)$ per ogni $y \in C$ e che valga la condizione

$$\int_0^\delta \frac{\sqrt{\omega(r)}}{r}\, dr < +\infty .$$

Allora X coincide nell'intorno di x con la k-corrente associata al grafico di funzione di classe C^1 e avente molteplicità $\Theta_k(C, 0)$.

Nel nostro caso poniamo $k = (n-1)$ e verifichiamo che la k-corrente $X := \partial[E]$ associata ad E soddisfa la condizione di Bombieri con

$$\delta := \min\left\{\frac{n}{3D\lambda}, \frac{D}{2}\right\}, \qquad \omega(r) := \frac{3D\lambda}{n} r$$

ove $D/2$ è il diametro del più piccolo convesso chiuso C_0 contenente E_0. A tal scopo fissiamo Y senza bordo e avente supporto in K con $\operatorname{diam}(K) \leq r < \delta$. Possiamo supporre che C_0 e K si intersechino, altrimenti la disuguaglianza è ovvia.

Scelto $p \in K$ consideriamo il cono $Q := p \times Y$ e ricordiamo che $\partial Q = Y$ e ([25])

$$M(Q) \leq \frac{r}{n} M(Y) \leq \frac{r}{n}\left[M(X \llcorner K + Y) + M(X \llcorner K)\right].$$

Inoltre, dato che K e C_0 si intersecano e $\delta \leq D/2$ si ha $\operatorname{dist}(y, \partial E_0) \leq D$ su $E \cup \operatorname{supp}(Q)$.

Ogni n-corrente intera T in $\boldsymbol{R}^n$ corrisponde di fatto ad una funzione a variazione li-

mitata f a valori in $\mathbf{Z}$ e può quindi essere rappresentata ([25], cap. 6, Teorema 27.6) come una somma «senza cancellazioni»:

$$T = \sum_{i \geq 1} [\![A_i]\!] - \sum_{j \geq 1} [\![B_j]\!], \qquad M(T) = \sum_{i \geq 1} M([\![A_i]\!]) + \sum_{j \geq 1} M([\![B_j]\!]),$$

$$\partial T = \sum_{i \geq 1} \partial[\![A_i]\!] - \sum_{j \geq 1} \partial[\![B_j]\!], \qquad M(\partial T) = \sum_{i \geq 1} M(\partial[\![A_i]\!]) + \sum_{j \geq 1} M(\partial[\![B_j]\!]).$$

Gli insiemi A_i e B_j corrispondono ai livelli $\{f \geq i\}$ e $\{f \leq -j\}$ della corrispondente funzione f. Posto quindi

$$Q = \sum_{i \geq 1} [\![Q_i]\!] - \sum_{j \geq 1} [\![P_j]\!], \qquad [\![E]\!] + Q = \sum_{i \geq 1} [\![N_i]\!] - \sum_{j \geq 1} [\![M_j]\!]$$

confrontiamo l'insieme E con l'insieme $\bar{E} := N_1 = (E \setminus P_1) \cup Q_1$. Dato che

$$E \Delta \bar{E} \subset (Q_1 \setminus E) \cup (P_1 \cap E) \subset Q_1 \cup P_1$$

dalla minimalità di E e dal fatto che $\operatorname{dist}(\cdot, \partial E_0) \leq D$ su $\bar{E} \Delta E$ ricaviamo

$$M(X) \leq M(\partial[\![\bar{E}]\!]) + \lambda \int_{E \Delta \bar{E}} \operatorname{dist}(y, \partial E_0)\, dy \leq M(X + Y) + \lambda D M(Q).$$

Dato che Y ha supporto contenuto in K possiamo anche scrivere

$$M(X \llcorner K) \leq M(X \llcorner K + Y) + \lambda D M(Q).$$

Combinando questa disuguaglianza con la stima della massa di Q si ha

$$M(X \llcorner K) \leq M(X \llcorner K + Y) + \frac{r\lambda D}{n} [M(X \llcorner K + Y) + M(X \llcorner K)]$$

dalla quale, tenuto conto del fatto che $r \leq \delta$, segue subito la disuguaglianza voluta.

Dato che ([1], Teorema 3.9) in ogni punto di ∂E l'insieme dei coni tangenti è non vuoto ed è contenuto nella classe degli $E \in \mathcal{P}$ di area localmente minima ($\omega = 0$ e $\delta = +\infty$ nella definizione su scritta), e dato che ogni cono tangente coincide con un $(n-1)$-piano con per $n \leq 7$ ([25], appendice B), si conclude che ∂E è regolare per $n \leq 7$. Nel caso $n > 7$ il metodo di riduzione della dimensione delle singolarità di Federer (vedi ad esempio [25], Teorema A4) garantisce che l'insieme singolare ove non si ha la regolarità C^1 è discreto per $n = 8$ e di dimensione non superiore a $(n-8)$ per $n > 8$. Per la regolarità $C^{2,\alpha}$ vedi [1], Teorema 3.8. ■

3.5. *Hölderianità nel tempo di* $GMM(\mathcal{F}, \mathcal{P}, E_0)$.

Per ottenere la continuità nel tempo degli elementi di $GMM(\mathcal{F}, \mathcal{P}, E_0)$ (Teorema 3.3) è di fondamentale importanza il seguente teorema, che consente di confrontare la penalizzazione di Almgren-Taylor-Wang con la distanza in $\mathcal{P}$.

Confronto volume-distanza: *Sia $C \subset \mathbf{R}^n$ compatto e supponiamo che esistano $\theta > 0$ e $\tau > 0$ tali che*

$$\mathcal{H}^{n-1}(C \cap B_\varrho(x)) \geq \theta \varrho^{n-1} \qquad \forall x \in C,\ \varrho \in (0, \tau). \tag{3.15}$$

Allora per ogni $R > \tau$ ed ogni insieme di Borel $A \subset \mathbf{R}^n$ si ha

$$|A \setminus C| \leq \left[2\Gamma\left(\frac{R}{\tau}\right)^{n-1} \mathcal{H}^{n-1}(C)\right]^{1/2} \left(\int_A \operatorname{dist}(x, C)\, dx\right)^{1/2} + \frac{1}{R} \int_A \operatorname{dist}(x, C)\, dx \tag{3.16}$$

ove

$$\Gamma := 2^{2n+1} n \omega_n \xi \theta^{-1}$$

e ξ è la costante del lemma di Besicovitch.

Osserviamo che le frontiere dei λ-minimi hanno misura nulla e soddisfano la (3.15) con $\theta = \beta$ e $\tau = (\lambda D)^{-1}$, per la stima di densità ed il Corollario 3.6. Alla dimostrazione della disuguaglianza (3.16) verrà dedicato tutto il prossimo paragrafo. Vediamo invece subito la

Dimostrazione del Teorema 3.3: Fissato $\lambda > 1$ e $k \geq 1$, confrontando $\mathcal{F}(\lambda, E_\lambda(k), E_\lambda(k))$ con $\mathcal{F}(\lambda, E_\lambda(k+1), E_\lambda(k))$ si ottiene

$$\lambda \int_{E_\lambda(k) \Delta E_\lambda(k+1)} \operatorname{dist}(x, \partial E_\lambda(k))\, dx \leq P(E_\lambda(k)) - P(E_\lambda(k+1)).$$

Dal confronto volume-distanza con $A = E_\lambda(k+1) \Delta E_\lambda(k)$, $C = \partial E_\lambda(k)$, $\theta = \beta$ e $\tau = (D\lambda)^{-1}$ segue

$$\delta(E_\lambda(k+1), E_\lambda(k)) \leq \left[2\Gamma(RD\lambda)^{n-1} P(E_\lambda(k))\right]^{1/2} I_{k,\lambda} + \frac{1}{R} I_{k,\lambda}^2 \tag{3.17}$$

ove

$$\Gamma := 2^{2n+1} n \omega_n \xi \beta^{-1}, \qquad I_{k,\lambda} := \lambda^{-1/2} \sqrt{P(E_\lambda(k)) - P(E_\lambda(k+1))}.$$

Scelti ora interi $0 < l < m$ tali che $(m - l) < \lambda$, applicando la disuguaglianza (3.17) con

$$R = \frac{1}{D\lambda}\left(\frac{\lambda}{m-l}\right)^{1/(n+1)} > \frac{1}{D\lambda} = \tau$$

ed usando il fatto che $k \to P(E_\lambda(k))$ è decrescente otteniamo

$$\delta(E_\lambda(m), E_\lambda(l)) \leq \sum_{k=l}^{m-1} \delta(E_\lambda(k+1), E_\lambda(k)) \leq$$

$$\leq \left[2\Gamma\left(\frac{\lambda}{m-l}\right)^{(n-1)/(n+1)} P(E_0)\right]^{1/2} \sum_{k=l}^{m-1} I_{k,\lambda} + D\lambda\left(\frac{m-l}{\lambda}\right)^{1/(n+1)} \sum_{k=l}^{m-1} I_{k,\lambda}^2 .$$

Usando le disuguaglianze

$$\sum_{k=l}^{m-1} I_{k,\lambda} \leq \sqrt{m-l}\sqrt{\sum_{k=l}^{m-1} I_{k,\lambda}^2} = \sqrt{\frac{(m-l)}{\lambda}}\sqrt{[P(E_\lambda(m)) - P(E_\lambda(l))]} \leq \sqrt{\frac{P(E_0)(m-l)}{\lambda}}$$

si ha

$$\delta(E_\lambda(m), E_\lambda(l)) \leq \left[2\Gamma\left(\frac{\lambda}{m-l}\right)^{(n-1)/(n+1)} P(E_0)\right]^{1/2} \sqrt{P(E_0)}\left(\frac{m-l}{\lambda}\right)^{1/2} + \tag{3.18}$$

$$+ DP(E_0)\left(\frac{m-l}{\lambda}\right)^{1/(n+1)} = P(E_0)\left[\sqrt{2\Gamma} + D\right]\left(\frac{m-l}{\lambda}\right)^{1/(n+1)}.$$

Osserviamo ora che, per $t \geq 0$ fissato, i teoremi di compattezza e confronto garantiscono che la famiglia di insiemi $E_\lambda(\lambda t)$ è relativamente compatta in $\mathcal{P}$. Mediante un procedimento diagonale possiamo trovare una successione divergente $\lambda_i \subset (1, +\infty)$ tale che

$$\exists E(t) := \lim_{i \to +\infty} E_{\lambda_i}(\lambda_i t) \qquad \forall t \in Q^+ .$$

Dalla (3.18) con $m = [\lambda t]$, $l = [\lambda s]$ segue subito

$$\delta(E(t), E(s)) \leq P(E_0)\left[\sqrt{2\Gamma} + D\right](t-s)^{1/(n+1)}, \qquad \forall s, t \in Q^+, \quad 0 < s < t < s+1$$

(si osservi che per λ grande si ha $l > 0$ e $m - l < \lambda$). Essendo l'immagine di $E(t)$ relativamente compatta in $\mathcal{P}$ possiamo estendere univocamente $E(t)$ a $\boldsymbol{R}^+$ in modo che

$$\delta(E(t), E(s)) \leq P(E_0)\left[\sqrt{2\Gamma} + D\right](t-s)^{1/(n+1)}, \qquad \forall\, 0 < s < t < s+1. \tag{3.19}$$

Usando (3.18) e (3.19) è ora facile vedere che $E_\lambda(\lambda t) \to E(t)$ per ogni $t > 0$.

Per mostrare la continuità di E in 0 osserviamo che

$$\int_{E_\lambda(t) \Delta E_0} \operatorname{dist}(y, \partial E_0)\, dy \leq \frac{P(E_0)}{\lambda} \to 0$$

per $\lambda \to +\infty$. Dato che ∂E_0 è trascurabile gli insiemi $E_\lambda(1)$ convergono a E_0. Inoltre

$$\delta(E(t), E_0) \leq \delta(E(t), E_\lambda(\lambda t)) + \delta(E_\lambda(\lambda t), E_\lambda(1)) + \delta(E_\lambda(1), E_0) \leq$$

$$\leq \delta(E(t), E_\lambda(\lambda t)) + \delta(E_\lambda(1), E_0) + P(E_0)\left[\sqrt{2\Gamma} + D\right] t^{1/(n+1)}$$

quindi passando al limite per $\lambda \to +\infty$ otteniamo

$$\delta(E(t), E_0) \leq P(E_0)\left[\sqrt{2\Gamma} + D\right] t^{1/(n+1)}. \qquad \blacksquare$$

3.6. *Dimostrazione del confronto volume-distanza.*

Sia σ la funzione distanza da C. Essendo σ lipschitziana per il teorema di Rademacher esiste $\nabla\sigma(x)$ per quasi ogni $x \in \boldsymbol{R}^n$ (vedi ad esempio [25], cap. 2, Teorema 5.2).

Esercizio 9: Verificare che l'esistenza di $\nabla\sigma$ in $x \notin C$ implica l'esistenza di un unico $y \in C$ tale che $\sigma(x) = |x - y|$. Inoltre

$$\nabla\sigma(x) = \frac{x - y}{|x - y|}.$$

In particolare $|\nabla\sigma| = 1$ quasi ovunque in $\boldsymbol{R}^n \setminus C$.

Esercizio 10: Dimostrare che gli insiemi di livello $\{\sigma = t\}$ di una funzione distanza sono tutti trascurabili per $t > 0$.

Ricordiamo la *formula di co-area* ([25], cap. 2): per ogni funzione lipschitziana $g: \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}$ ed ogni funzione di Borel limitata $h: \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}$ si ha

$$\int_{\boldsymbol{R}^n} h\,|\nabla g|\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{\{g=r\}} h(x)\, d\mathcal{H}^{n-1}(x) \right) dr. \tag{3.20}$$

Applicando la formula di co-area con $g = \sigma$ e $h = \chi_L$ vediamo che la misura di un insieme di Borel L è uguale a

$$\int_0^{+\infty} f(r)\, dr$$

con $f(r) := \mathcal{H}^{n-1}(L \cap \{\sigma = r\})$. Si ha anche

$$\int_L \sigma(x)\, dx = \int_0^{+\infty} \left(\int_{L \cap \{\sigma = r\}} \sigma(x)\, d\mathcal{H}^{n-1}(x) \right) dr = \int_0^{+\infty} r f(r)\, dr.$$

Per confrontare questi due integrali ci serve il

LEMMA 3.7: *Sia $f \in L^\infty((0,R))$ e non negativa. Vale allora la disuguaglianza*

$$\int_0^R f(r)\,dr \leq \sqrt{2S}\left(\int_0^R rf(r)\,dr\right)^{1/2} \qquad \text{con } S := \operatorname{ess}-\sup_{(0,R)} f.$$

DIMOSTRAZIONE: Per omotetia non è restrittivo supporre che $S \leq 1$. La disuguaglianza diventa allora

$$\left(\int_0^R f(r)\,dr\right)^2 \leq 2\int_0^R rf(r)\,dr.$$

Le due funzioni sono entrambe nulle per $R = 0$; derivando ambo i membri abbiamo che la disuguaglianza è implicata da

$$2f(\varrho)\int_0^\varrho f(r)\,dr \leq 2\varrho f(\varrho) \qquad \text{per q.o. } \varrho \in (0,R). \qquad \blacksquare$$

Dal Lemma 3.7 otteniamo (posto $L = A \cap \sigma^{-1}(0,R)$)

$$|A \setminus C| = |A \cap \sigma^{-1}(0,R)| + |A \cap \sigma^{-1}([R,+\infty))| \leq \int_0^R f(r)\,dr + \frac{1}{R}\int_A \sigma(x)\,dx \leq$$

$$< \sqrt{2S}\left(\int_0^R rf(r)\,dr\right)^{1/2} + \frac{1}{R}\int_A \sigma(x)\,dx \leq \sqrt{2S}\left(\int_A \sigma(x)\,dx\right)^{1/2} + \frac{1}{R}\int_A \sigma(x)\,dx$$

per ogni $R > 0$. Per dimostrare la (3.16) è sufficiente quindi la seguente stima puntuale della misura degli insiemi di livello di σ, che consente di stimare S:

TEOREMA 3.8: *Siano C, τ, θ, Γ come nel confronto volume-distanza. Per ogni $R > \tau$ si ha*

$$\operatorname{ess}-\sup_{0<r<R} \mathcal{H}^{n-1}\{x : \operatorname{dist}(x,C) = r\} \leq \Gamma\left(\frac{R}{\tau}\right)^{n-1} \mathcal{H}^{n-1}(C). \tag{3.21}$$

DIMOSTRAZIONE: Si divide in tre passi. Osserviamo che le stime dei Passi 1 e 2 sono indipendenti dalla stima di densità di C. La dimostrazione del passo 1 qui riportata è diversa da quella data in [1] e sfrutta la semiconcavità del quadrato della funzione distanza. L'idea nel Passo 1 è di usare la formula di Gauss-Green nei sottolivelli della funzione distanza per stimare la variazione della misura degli insiemi di livello. Dato che la formula di coarea dà una stima sulla media integrale della misura degli insiemi di livello si ottiene nel Passo 2 una stima locale su queste misure. La stima locale è resa globale nel Passo 3 grazie al lemma di Besicovitch ed alla stima di densità.

Passo 1: Per ogni insieme compatto Σ esiste un insieme $\mathcal{T} \subset (0, +\infty)$ tale che $|(0, +\infty) \setminus \mathcal{T}| = 0$ e per ogni $R, S \in \mathcal{T}$ con $R < S$ si ha

$$\mathcal{H}^{n-1}(\varrho^{-1}(S)) - \mathcal{H}^{n-1}(\varrho^{-1}(R)) \leq \frac{n-1}{R} |\{R < \varrho < S\}|$$

con $\varrho := \operatorname{dist}(x, \Sigma)$. L'idea è quella di stimare la differenza delle due misure applicando la formula di Gauss-Green nel dominio $\{R < \varrho < S\}$.

Indichiamo con $E(t)$ gli insiemi $\{\varrho < t\}$; la formula di coarea di Fleming-Rishel ([19], Teorema 1.23) e la formula di coarea per funzioni lipschitziane danno

$$\int_0^{+\infty} \mathcal{H}^{n-1}(K \cap \partial^* E(t))\, dt = \int_K |\nabla \varrho|\, dx = \int_0^{+\infty} \mathcal{H}^{n-1}(K \cap \{\varrho = t\})\, dt\,,$$

per ogni compatto K. Dato che $\partial^* E(t) \subset \{\varrho = t\}$ per ogni t tale che $E(t) \in \mathcal{P}$ ne deduciamo

$$\mathcal{H}^{n-1}(\overline{B}_R \cap \{\varrho = t\} \setminus \partial^* E(t)) = 0 \qquad \text{per q.o. } t$$

per ogni $R > 0$, e in definitiva

$$\mathcal{H}^{n-1}(\{\varrho = t\} \setminus \partial^* E(t)) = 0 \tag{3.22}$$

per quasi ogni $t \geq 0$. Siano ora $\varrho_h := \varrho * \Phi_{\varepsilon_h}$ le approssimanti per convoluzione di ϱ in corrispondenza di una fissata successione ε_h tendente a 0 ed un fissato nucleo di convoluzione Φ. Sempre con un ragionamento basato sulla formula di coarea si verifica che la finitezza della serie

$$\sum_{h=1}^{\infty} \int_K |\nabla \varrho_h - \nabla \varrho|\, dx$$

per ogni compatto $K \subset \boldsymbol{R}^n$ (può essere ottenuta con una opportuna scelta di ε_h) implica

$$\lim_{h \to +\infty} \int_{\{\varrho = t\}} |\nabla \varrho_h - \nabla \varrho|\, d\mathcal{H}^{n-1} = 0 \tag{3.23}$$

per quasi ogni $t \geq 0$. Infine, detto L l'insieme dei punti di differenziabilità di ϱ, dal fatto che $\boldsymbol{R}^n \setminus L$ è trascurabile si deduce, sempre con la formula di coarea

$$\mathcal{H}^{n-1}(\{\varrho = t\} \setminus L) = 0 \tag{3.24}$$

per quasi ogni $t \geq 0$.

Vedremo che la disuguaglianza vale per R, S appartenenti all'insieme $\mathcal{T}$ di tutti i numeri $t > 0$ tali che $E(t) \in \mathcal{P}$ e valgono (3.22), (3.23), (3.24).

Per t tale che $E(t) \in \mathcal{P}$ indichiamo con n_t la normale interna generalizzata

a $E(t)$ definita in (3.7) ed osserviamo che $D\chi_{E(S)\setminus E(R)} = D\chi_{E(S)} - D\chi_{E(R)}$ perchè $E(R) \subset E(S)$.

Integrando il campo $\nabla\varrho_b$ otteniamo

$$(3.25) \qquad \int_{\partial^* E(R)} \langle \nabla\varrho_b, n_R(x)\rangle \, d\mathcal{H}^{n-1} - \int_{\partial^* E(S)} \langle \nabla\varrho_b, n_S(x)\rangle \, d\mathcal{H}^{n-1} = \int_{\{R<\varrho<S\}} \Delta\varrho_b .$$

Il primo membro per (3.23) e (3.24) converge per $b \to +\infty$ a

$$\int_{\{\varrho=R\}} \langle \nabla\varrho, n_R(x)\rangle \, d\mathcal{H}^{n-1} - \int_{\{\varrho=S\}} \langle \nabla\varrho, n_S(x)\rangle \, d\mathcal{H}^{n-1} .$$

Osserviamo ora che se $x \in \partial^* E(t) \cap L$, $p = \nabla\varrho(x)$ allora per la (3.8) deve essere $p = -\nu_t(x)$ (Esercizio 11). Per la (3.22) il limite del primo membro della (3.25) è quindi

$$\mathcal{H}^{n-1}(\{\varrho = S\}) - \mathcal{H}^{n-1}(\{\varrho = R\}) .$$

Esaminiamo ora il comportamento del secondo membro della (3.25). A tale scopo osserviamo che

$$\varrho^2(x) - |x|^2 = \min_{y\in\Sigma} |y-x|^2 - |x|^2 = \min_{y\in\Sigma} |y|^2 - 2\langle x, y\rangle$$

essendo estremo inferiore di funzioni affini è concava, quindi $\Delta(\varrho^2 - |x|^2) \leq 0$ nel senso delle distribuzioni. Scelta $\phi \in C_0^1(R^n \setminus \Sigma)$ e posto $\gamma = \phi/\varrho$ abbiamo

$$\int_{R^n} \varrho\Delta\phi \, dx = -\int_{R^n} \langle \nabla\varrho, \nabla\phi\rangle \, dx = -\int_{R^n} \varrho\langle \nabla\varrho, \nabla\gamma\rangle \, dx - \int_{R^n} |\nabla\varrho|^2 \gamma =$$

$$= -\frac{1}{2}\int_{R^n} \langle \nabla\varrho^2, \nabla\gamma\rangle \, dx - \int_{R^n} \gamma \, dx =$$

$$= -\frac{1}{2}\int_{R^n} \langle \nabla(\varrho^2 - |x|^2), \nabla\gamma\rangle \, dx + (n-1)\int_{R^n} \gamma \, dx \leq (n-1)\int_{R^n} \frac{\phi}{\varrho} \, dx .$$

Approssimando per convoluzione vediamo che le funzioni ϱ_b hanno una proprietà simile:

$$\int_{\Omega} \Delta\varrho_b \, dx = \lim_{\gamma\to 0^+} \int_{R^n} (\chi_\Omega * \Phi_\gamma)\Delta\varrho_b \, dx = \lim_{\gamma\to 0^+} \int_{R^n} \Delta(\chi_\Omega * \Phi_\gamma)\varrho_b \, dx =$$

$$= \lim_{\gamma\to 0^+} \int_{R^n} \Delta(\chi_\Omega * \Phi_\gamma * \Phi_{\varepsilon_b})\varrho \, dx \leq \lim_{\gamma\to 0^+} (n-1)\int_{R^n} (\chi_\Omega * \Phi_\gamma * \Phi_{\varepsilon_b})\varrho^{-1} \, dx =$$

$$= (n-1)\int_{R^n} \frac{\chi_\Omega * \Phi_{\varepsilon_b}}{\varrho} \, dx .$$

Passando al limite per $h \to +\infty$ si ha quindi

$$\limsup_{h \to +\infty} \int_{\{R < \varrho < S\}} \Delta \varrho_h \, dx \leq (n-1) \int_{\Omega} \frac{1}{\varrho} \, dx \leq \frac{n-1}{R} \, |\{R < \varrho < S\}| \, .$$

Passo 2: Siano ora ϱ, C come nell'enunciato del teorema e sia (q_h, r_h) una numerazione di $Q^n \times Q^+$. Dette $\Sigma_h := C \cap \overline{B}_{2r_h}(x_h)$ e σ_h le rispettive distanze, siano $\mathcal{T}_h$ dati dal passo 1. Si ha allora

$$\mathcal{H}^{n-1}(B_r(x) \cap \{\varrho = r\}) \leq 2^{2n+1} n \omega_n r^{n-1} \qquad \forall r \in \mathcal{T} := \bigcap_{h=1}^{\infty} \mathcal{T}_h$$

per ogni $x \in \mathbf{R}^n$ ed ogni $r > 0$. Fissiamo $r \in \mathcal{T}$ e $h \geq 1$ intero; applicando la formula di coarea (3.20) con $g = r_h / 2 \vee \sigma_h \wedge r_h$ e $h \equiv 1$ otteniamo

$$\int_{r_h/2}^{r_h} \mathcal{H}^{n-1}(\{g = t\}) \, dt \leq \left| \left\{ \frac{1}{2} r_h < \sigma_h < r_h \right\} \right| .$$

Esiste allora $R_h \in (r_h / 2, r_h) \cap \mathcal{T}_h$ tale che $\mathcal{H}^{n-1}(\{\sigma_h = R_h\}) \leq$ $\leq 2 r_h^{-1} \, |\{r_h / 2 < \sigma < r_h\}|$. Combinando questa stima col Passo 1 abbiamo

$$\mathcal{H}^{n-1}(\{\sigma_h = r\}) \leq \mathcal{H}^{n-1}(\{\sigma_h = R_h\}) + 2(n-1) r_h^{-1} \, |\{r_h / 2 < \sigma_h < r_h\}| \leq 2^{2n+1} n \omega_n r_h^{n-1} \, .$$

Ritornando a C abbiamo

$$\mathcal{H}^{n-1}(C \cap B_{2r_h}(x_h)) = \mathcal{H}^{n-1}(\Sigma_h \cap B_{2r_h}(x_h)) \leq 2^{2n+1} n \omega_n r_h^{n-1} \, .$$

Dato che h è arbitrario, per ogni palla $B_r(x)$ possiamo, approssimando x e r con razionali, dedurre la stessa disuguaglianza.

Passo 3: Dimostriamo ora che per $r \in \mathcal{T}$ (quello dato dal Passo 2) valgono le disuguaglianze

$$\mathcal{H}^{n-1}(\{\varrho = r\}) \leq \begin{cases} \Gamma \mathcal{H}^{n-1}(C) & \text{se } 0 < r < \tau \, ; \\ \Gamma \left(\dfrac{r}{\tau} \right)^{n-1} \mathcal{H}^{n-1} C & \text{se } r \geq \tau \, ; \end{cases}$$

che implicano evidentemente la (3.21). Fissiamo $r > 0$ e consideriamo il ricoprimento di C formato dalle palle $\{B_r(x)\}_{x \in C}$. Per la (3.15) abbiamo

$$r^{n-1} \leq \frac{1}{\theta} \mathcal{H}^{n-1}(C \cap B_r(x)) \qquad \text{se } r < \tau$$

e

$$r^{n-1} \leq \frac{1}{\theta} \left(\frac{r}{\tau} \right)^{n-1} \mathcal{H}^{n-1}(C \cap B_r(x)) \qquad \text{se } r \geq \tau \, .$$

Grazie al lemma di Besicovitch possiamo ricoprire C con una famiglia (finita per compattezza) di palle $\{B_r(x_i)\}_{i \in I}$ tali che nessun punto di $\mathbb{R}^n$ appartiene a più di ξ palle della famiglia. È evidente che $\{\varrho = r\}$ è contenuto nell'unione delle palle $B_{2r}(x_i)$, in quanto ogni punto in tale insieme dista r da un punto di C e questo a sua volta dista meno di r da uno dei punti x_i. Usando allora il Passo 2 otteniamo

$$\mathcal{H}^{n-1}\{\varrho = r\} \leq \sum_{i \in I} \mathcal{H}^{n-1}(\{\varrho = r\}) \cap B_{2r}(x_i) \leq \sum_{i \in I} 2^{2n+1} n\omega_n r^{n-1}.$$

Se $r < \tau$ concludiamo ricordando la definizione di Γ e osservando che

$$\sum_{i \in I} 2^{2n+1} n\omega_n r^{n-1} \leq 2^{2n+1} n\omega_n \theta^{-1} \sum_{i \in I} \mathcal{H}^{n-1}(C \cap B_r(x_i)) \leq \frac{2^{2n+1} n\omega_n \xi}{\theta} \mathcal{H}^{n-1}(C).$$

Se invece $r \geq \tau$ si ha

$$\sum_{i \in I} 2^{2n+1} n\omega_n r^{n-1} \leq$$

$$\leq 2^{2n+1} n\omega_n \theta^{-1} \left(\frac{r}{\tau}\right)^{n-1} \sum_{i \in I} \mathcal{H}^{n-1}(C \cap B_r(x_i)) \leq \frac{2^{2n+1} n\omega_n \xi}{\theta} \left(\frac{r}{\tau}\right)^{n-1} \mathcal{H}^{n-1}(C). \quad \blacksquare$$

Appendice: soluzione degli esercizi

Esercizio 1: L'Esempio 1.1 è un caso particolare dell'Esempio 1.2.

Passo 1: Nel caso dell'Esempio 1.2 abbiamo

$$\lambda^{\beta-1} |u_\lambda(k+1) - u_\lambda(k)|^\beta \leq \beta\big[f(u_\lambda(k)) - f(u_\lambda(k+1))\big],$$

quindi usando il fatto che f è lipschitziana otteniamo

$$\big[\lambda |u_\lambda(k+1) - u_\lambda(k)|\big]^{\beta-1} \leq \beta \operatorname{Lip}(f).$$

Dalla definizione di $\bar{u}_\lambda$ si ricava

$$\operatorname{Lip}(\bar{u}_\lambda(\lambda t)) \leq \big[\beta \operatorname{Lip}(f)\big]^{1/(\beta-1)}.$$

Nel caso dell'Esempio 1.3 abbiamo per costruzione $\lambda |u_\lambda(k+1) - u_\lambda(k)| \leq 1$. Da questo si ricava facilmente $\operatorname{Lip}(\bar{u}_\lambda(\lambda t)) \leq 1$.

Infine, nel caso dell'Esempio 1.4 abbiamo

$$\lambda |u_\lambda(k+1) - u_\lambda(k)|^2 \leq 2 \int_k^{k+1} \left[f\left(u_\lambda(k), \frac{\tau}{\lambda}\right) - f\left(u_\lambda(k+1), \frac{\tau}{\lambda}\right)\right] d\tau.$$

Usando la lipschitzianità di f si ricava

$$\lambda |u_\lambda(k+1) - u_\lambda(k)| \leq 2\,\mathrm{Lip}(f)$$

quindi $\mathrm{Lip}(\tilde{u}_\lambda(\lambda t)) \leq 2\,\mathrm{Lip}(f)$.

Passo 2: Si ha

$$\|u_\lambda - \tilde{u}_\lambda\| = \sup_{k \in N} |u_\lambda(k+1) - u_\lambda(k)| \leq \sup_{t \geq 0} |\tilde{u}_\lambda(t+1) - \tilde{u}_\lambda(t)| =$$

$$= \sup_{t \geq 0} |\tilde{u}_\lambda(\lambda(t + \lambda^{-1})) - \tilde{u}_\lambda(\lambda t)| \leq \frac{L}{\lambda}$$

ove L è una costante reale che maggiora tutte le costanti di Lipschitz di $\tilde{u}_\lambda(\lambda t)$.

Passo 3: Supponiamo che $v_i(t) := \tilde{u}_{\lambda_i}(\lambda_i t)$ converga uniformemente sui compatti di $[0, +\infty)$ a u per una certa successione $\lambda_i \to +\infty$. Allora v_i' converge debolmente a u' in $L^1([0, +\infty); R^n)$. Per calcolare le derivate useremo la minimalità di $u_\lambda(k+1)$.

Nel caso dell'Esempio 1.2, ponendo $\lambda = \lambda_i$ e $k = [\lambda_i t]$ nell'equazione

$$\lambda^{\beta-1} |u_\lambda(k+1) - u_\lambda(k)|^{\beta-2} (u_\lambda(k+1) - u_\lambda(k)) = -\nabla f(u_\lambda(k+1))$$

e tenendo conto del fatto che

$$v_i'(t) = \lambda\big[u_\lambda([\lambda_i t] + 1) - u_\lambda([\lambda_i t])\big] \tag{1}$$

per quasi ogni t otteniamo

$$v_i'(t) = -|v_i'(t)|^{2-\beta} \nabla f(v_i(t + \lambda_i^{-1}))$$

per quasi ogni t. Prendendo i moduli di ambo i membri si ottiene la relazione

$$|v_i'|(t) = |\nabla f(v_i(t + \lambda_i^{-1}))|^{1/(\beta-1)},$$

quindi l'equazione sopra si scrive anche nella forma

$$v_i'(t) = -|\nabla f|(v_i(t))^{(2-\beta)/(\beta-1)} \nabla f(v_i(t + \lambda_i^{-1})).$$

Passando al limite per $i \to +\infty$ si ha

$$u'(t) = -|\nabla f|(u(t))^{(2-\beta)/(\beta-1)} \nabla f(u(t)).$$

Prendendo i moduli di ambo i membri e sostituendo l'espressione trovata per $|\nabla f|(u(t))$ si ha la (1.6).

Nel caso dell'Esempio 1.3 abbiamo che $u_\lambda(k+1)$ è soluzione del problema

$$\min\left\{f(v) : |v - u_\lambda(k)| \leq \frac{1}{\lambda}\right\}.$$

Dato che il gradiente di f non si annulla il minimo è assunto sul bordo della palla; per il

principio dei moltiplicatori di Lagrange abbiamo

$$\nabla f(u_\lambda(k+1)) = m(u_\lambda(k+1) - u_\lambda(k))$$

per un certo $m \in R$. Prendendo i moduli di ambo i membri si ottiene

$$|m| = \lambda |\nabla f(u_\lambda(k+1))|$$

quindi

$$\lambda[u_\lambda(k+1) - u_\lambda(k)] = \pm \frac{\nabla f(u_\lambda(k+1))}{|\nabla f|(u_\lambda(k+1))}. \tag{2}$$

Vediamo ora che, fissato un raggio $R > 0$, per $|u_\lambda(k)| \leq R$ e λ abbastanza grande va scelto il segno negativo. Infatti, sia $m > 0$ il minimo di $|\nabla f|$ sulla palla di raggio $R + 1$ e sia

$$M = \max\left\{\frac{1}{2}\langle D^2 f(u)\, p, p\rangle : p \in S^{n-1},\ \ |u| \leq R + 1\right\}.$$

Poniamo $p = \lambda(u_\lambda(k) - u_\lambda(k+1)) \in S^{n-1}$; dalla formula di Lagrange per il resto di Taylor abbiamo

$$f(u_\lambda(k)) - f(u_\lambda(k+1)) = \left\langle \nabla f(u_\lambda(k+1)), \frac{p}{\lambda}\right\rangle + \frac{1}{2\lambda^2}\langle D^2 f(\theta)p, p\rangle$$

per un certo vettore θ sul segmento congiungente $u_\lambda(k)$ a $u_\lambda(k+1)$. Se ora ci fosse il segno positivo nella (2), usando il fatto che $f(u_\lambda(k)) \geq f(u_\lambda(k+1))$ otterremmo

$$\lambda |\nabla f(u_\lambda(k+1))| \leq \frac{1}{2}\langle D^2 f(\theta)p, p\rangle$$

quindi una contraddizione se $\lambda m > M$.

Dalla (2) con il segno negativo e dalla (1) ricaviamo che, per $T > 0$ fissato, si ha

$$v_i'(t) = -\frac{\nabla f(v_i(t + \lambda_i^{-1}))}{|\nabla f|(v_i(t + \lambda_i^{-1}))}$$

per quasi ogni $t \in [0, T]$ ed $i \geq i_0$ dipendente solo da T. Passando al limite si trova che u soddisfa la (1.7) in $[0, T]$.

Nel caso dell'Esempio 1.4, ponendo $\lambda = \lambda_i$ e $k = [\lambda_i t]$ nell'equazione

$$\lambda(u_\lambda(k+1) - u_\lambda(k)) = -\int_k^{k+1} \nabla_u f\left(u_\lambda(k+1), \frac{\tau}{\lambda}\right) d\tau$$

e tenuto conto della (1) si ottiene

$$v_i'(t) = -\int_{[\lambda_i t]}^{[\lambda_i t]+1} \nabla_v f\left(v_i(t+\lambda_i^{-1}), \frac{\tau}{\lambda_i}\right) d\tau$$

per quasi ogni t. Passando al limite per $i \to +\infty$ ed usando la continuità di $(v, t) \mapsto \nabla_v f(v, t)$ si ottiene che u soddisfa il sistema $u'(t) = -\nabla_v f(u(t), t)$. ■

Esercizio 2: (a) A causa della simmetria di f il numero $u_\lambda(1)$ potrà essere positivo o negativo. Sempre per simmetria, è facile vedere che $u_\lambda(k)$ mantiene il segno di $u_\lambda(1)$. Ci basterà quindi dimostrare che se il segno di $u_\lambda(k)$ è positivo allora $u_\lambda(k)$ converge a v per $\lambda \to +\infty$. Osserviamo anche (Esercizio 1) che tutti i punti limite sono soluzioni del problema di Cauchy. Bisogna allora solo verificare che la soluzione costantemente nulla non può essere un punto limite. Otterremo questa informazione dando una stima dal basso di $u_\lambda(\lambda t)$.

Sia $\gamma = -f''$; osserviamo che γ è positiva e crescente in $(0, \pi/2]$ e i punti $u_\lambda(k)$ variano in questo intervallo. Sommando le equazioni di Eulero discrete ed usando la monotonia di $1/\gamma$ otteniamo

$$\frac{b}{\lambda} = \sum_{i=0}^{b-1} \frac{u_\lambda(i+1) - u_\lambda(i)}{\gamma(u_\lambda(i+1))} \leq \int_0^{u_\lambda(b)} \frac{1}{\gamma(s)}\, ds\,.$$

Se ora $u_\lambda(\lambda t)$ convergesse alla funzione nulla, ponendo $b = [\lambda]$ nella disuguaglianza sopra si avrebbe una contraddizione, a causa della integrabilità in senso improprio di $1/\gamma$ in $(0, \pi/2]$.

(b) (traccia) Poniamo

$$b_+(\lambda) = \min\left\{f(x) + \frac{\lambda}{2}x^2 : x \geq 0\right\} \qquad b_-(\lambda) = \min\left\{f(x) + \frac{\lambda}{2}x^2 : x \leq 0\right\}.$$

Detti $x_\lambda^\pm$ i minimi per $b_\pm$ si ha

$$\lambda x_\lambda^\pm + f'(x_\lambda^\pm) = 0$$

dalla quale segue facilmente che $\lambda |x_\lambda^\pm|^{1/2}$ converge a $3/2$ per $\lambda \to +\infty$. Per verificare che $\lambda \to x_\lambda^\pm$ sono funzioni continue basta verificare che l'equazione $\lambda = -f''(t)/t$ ha una ed una sola soluzione in $(0, \delta)$ e in $(-\delta, 0)$ per $\delta > 0$ abbastanza piccolo ed indipendente da λ. Facciamo ad esempio la verifica per $t > 0$: posto $g(t) = -f''(t)/t$ si trova

$$g'(t) = \frac{-3}{2t^2\sqrt{\sin t}}\left(\sin t \cos t - \frac{1}{2} t \cos^2 t\right) + \frac{1}{t^{3/2}} o(1)$$

quindi $g' < 0$ in un intorno destro dell'origine. Sfruttando ora il fatto che l'unico termi-

ne dispari di f è $\sin 1/v$ abbiamo

$$\sin\frac{1}{x_\lambda^+} > 0 \Rightarrow b_-(\lambda) < b_+(\lambda), \qquad \sin\frac{1}{x_\lambda^-} > 0 \Rightarrow b_+(\lambda) < b_-(\lambda).$$

Quindi per continuità vi sono valori arbitrariamente grandi di λ per cui $u_\lambda(1) > 0$ e valori arbitrariamente grandi per cui $u_\lambda(1) < 0$.

Si verifica poi, usando il fatto che la parte dispari di f è un infinitesimo del quarto ordine, che per $\lambda \geq \lambda_0$ ed ogni intero $k \geq 1$ il numero $u_\lambda(k+1)$ è concorde a $u_\lambda(k)$.

A questo punto con lo stesso ragionamento di (a) si vede che, essendo $1/|f'|$ integrabile in senso improprio in un intorno di 0, ogni elemento di $GMM(\mathcal{F}, \boldsymbol{R}, 0)$ non è costante e coincide con una delle due soluzioni di segno costante di $u' = -f'(u)$. Per quanto detto sopra, $MM(\mathcal{F}, \boldsymbol{R}, 0) = \emptyset$.

(c) Osserviamo che $f \in C^\infty(\boldsymbol{R} \setminus \{0\})$. Dato che le funzioni $\bar{u}_\lambda(\lambda t)$ sono equi-lipschitziane (esercizio 1), basterà dimostrare che ogni $u \in GMM(\mathcal{F}, S, 0)$ è identicamente nulla.

Dato che

$$f'(v) = \frac{1}{2} + \sin 2v \sin\frac{1}{v} - \frac{\sin^2 v}{v^2}\cos\frac{1}{v}$$

ogni intorno destro o sinistro di 0 contiene infiniti punti stazionari di f (basta calcolare f' nei punti $v \neq 0$ tali che $\sin 1/v = 0$). Il ragionamento dell'esercizio 1 mostra che u soddisfa l'equazione differenziale $u' = -f'(u)$ nell'aperto

$$A := \{t \in (0, +\infty) : u(t) \neq 0\}.$$

Supponiamo per assurdo che A sia non vuoto e sia $I = (a, b)$ una componente connessa di A. È allora chiaro che $u(a) = 0$ ed esiste $c \in I$ tale che $f'(u(c)) = 0$. Per il teorema di Cauchy-Lipschitz u dovrebbe coincidere con $u(c)$ in (a, c), assurdo.

Sarebbe interessante trovare stime esplicite sull'andamento a zero di $\|u_\lambda(\lambda t)\|$ per $\lambda \to +\infty$. ■

Esercizio 3: Per la monotonia di ∂f basta sommare le disuguaglianze

$$f(x_2) \geq f(x_1) + \langle p_1, x_2 - x_1\rangle \qquad f(x_1) \geq f(x_2) + \langle p_2, x_1 - x_2\rangle.$$

Per verificare che $\lambda(z - y) \in \partial f(y)$ basta osservare che

$$f(y + tv) + \frac{\lambda}{2}|y + tv - z|^2 \geq f(y) + \frac{\lambda}{2}|y - z|^2$$

per ogni $t \in (0, 1]$ ed ogni $v \in H$. Sviluppando i quadrati e dividendo per t si ha

$$\frac{f(y + tv) - f(y)}{t} + \lambda\langle v, y - z\rangle + O(t) \geq 0$$

quindi per convessità

$$f(y+v) - f(y) + \lambda\langle v, y - z\rangle + O(t) \geq 0 .$$

Al limite per $t \to 0$ si ha la tesi. ■

Esercizio 4: Se $w \in \partial f(u)$ si ha

$$\frac{1}{2}\int_{R^n} |\nabla v|^2\, dx \geq \frac{1}{2}\int_{R^n} |\nabla u|^2\, dx + \int_{R^n} w(v-u)\, dx \qquad \forall v \in H^{1,2}(R^n) .$$

Ponendo $v = u + \varepsilon\varphi$ con $\varphi \in C_0^1(R^n)$, sottraendo da ambo i membri $f(u)$, dividendo per $\varepsilon > 0$ e facendo tendere ε a zero si ottiene

$$\int_{R^n} \langle \nabla\varphi, \nabla u\rangle\, dx \geq \int_{R^n} w\varphi\, dx .$$

Essendo φ arbitraria vale l'uguaglianza e $w = -\Delta u$ nel senso delle distribuzioni. Se invece supponiamo che $w = -\Delta u$ nel senso delle distribuzioni, il procedimento appena visto mostra che

$$\liminf_{\varepsilon \to 0^+} \frac{f(u+\varepsilon\varphi) - f(u)}{\varepsilon} \geq \int_{R^n} w\varphi\, dx$$

che per convessità implica

$$f(u+\varphi) - f(u) \geq \int_{R^n} w\varphi\, dx .$$

Per densità si ottiene allora $w \in \partial f(u)$. ■

Esercizio 5: Indichiamo con $\mu^k := \nabla u_k \mathcal{L}^n$ le derivate nel senso delle distribuzioni di u_k. I funzionali

$$L_k(g) := \int_{R^n} \sum_{i=1}^{n} g_i\, d\mu_i^k$$

sono equilimitati nel duale di $C_0(R^n, R^n)$ che, essendo la chiusura di $C_c(R^n, R^n)$, è separabile. Per il teorema di Banach-Alaoglu una sottosuccessione L_{k_h} di L_k converge nella topologia debole * ad un funzionale

$$L(g) := \int_{R^n} \sum_{i=1}^{n} g_i\, d\mu_i$$

per una opportuna misura μ a variazione limitata in R^n. Passando al limite per $k \to +\infty$

nella formula di integrazione per parti

$$\int_{R^n} u_{h_k} \operatorname{div} g \, dx = -\int_{R^n} \sum_{i=1}^{n} g_i \, d\mu_i^h \qquad g \in C_0^1(R^n, R^n)$$

si trova $Du = \mu$. ■

Esercizio 6: Se $|\Omega \cap E| = 0$ oppure $|\Omega \setminus E| = 0$ si ha che la derivata nel senso delle distribuzioni $D\chi_E$ è nulla sui boreliani di Ω, quindi $P(E, \Omega) = 0$. Supponiamo viceversa che $P(E, \Omega) = 0$ e verifichiamo che la funzione

$$g(x) := \limsup_{\varrho \to 0^+} \frac{|E \cap B_\varrho(x)|}{\omega_n \varrho^n}$$

è localmente costante in Ω, quindi costante per la connessione di Ω. Fissato $x \in \Omega$ e $r > 0$ tale che $B_{2r}(x) \subset \Omega$, per ogni $\varepsilon < r$ le funzioni $u_\varepsilon := \chi_E * \varrho_\varepsilon$ sono di classe C^∞ in $B_r(x)$ e

$$\nabla u_\varepsilon(y) = \int_{R^n} \varrho_\varepsilon(y - z) D\chi_E(z) = 0 \qquad \forall y \in B_r(x)$$

a causa del fatto che $|D\chi_E|(B_{2r}(x)) = 0$. Quindi per ε piccolo le funzioni u_ε sono costanti in $B_r(x)$. Dato che successioni convergenti in L^1 hanno sottosuccessioni convergenti quasi ovunque, esiste una costante c tale che $\chi_E = c$ quasi ovunque in $B_r(x)$. Questo implica che $g \equiv c$ su $B_r(x)$. ■

Esercizio 7: Dati $E, F \in \mathcal{P}$ siano $u_\varepsilon := \chi_E * \varrho_\varepsilon$ e $v_\varepsilon := \chi_F * \varrho_\varepsilon$. Allora $w_\varepsilon := u_\varepsilon + v_\varepsilon - u_\varepsilon v_\varepsilon$ converge a $\chi_{E \cup F}$. Tenuto conto del fatto che u_ε, v_ε sono comprese tra 0 e 1 abbiamo

$$|\nabla w_\varepsilon| = |\nabla u_\varepsilon (1 - v_\varepsilon) + \nabla v_\varepsilon (1 - u_\varepsilon)| \leq |\nabla u_\varepsilon| + |\nabla v_\varepsilon|$$

quindi per l'esercizio precedente

$$P(E \cup F) \leq \liminf_{\varepsilon \to 0^+} \int_{R^n} |\nabla w_\varepsilon| \, dx \leq \limsup_{\varepsilon \to 0^+} \int_{R^n} |\nabla u_\varepsilon| \, dx +$$

$$+ \limsup_{\varepsilon \to 0^+} \int_{R^n} |\nabla v_\varepsilon| \, dx \leq P(E) + P(F). \quad ■$$

Esercizio 8. Dato che

$$\nabla(u * \varrho_\varepsilon)(x) = \int_{R^n} \varrho_\varepsilon(x - y) \, Du(y)$$

possiamo stimare l'integrale del gradiente nel seguente modo

$$\int_C |\nabla(u * \varrho_\varepsilon)|\, dx \leq \int_C \int_{R^n} \varrho_\varepsilon(x-y)\, |Du|(y)\, dx = \int_{R^n} \int_C \varrho_\varepsilon(x-y)\, dx\, |Du|(y) \leq |Du|(C_\varepsilon)$$

a causa del fatto che $\varrho_\varepsilon(x-y) = 0$ se $x \in C$ e $y \notin C_\varepsilon$. ■

Esercizio 9: Se σ è differenziabile in x, posto $p = \nabla\sigma(x)$ abbiamo

$$\sigma(x+z) = \sigma(x) + \langle p, z\rangle + o(|z|)$$

quindi

$$\sigma^2(x+z) = \sigma^2(x) + 2\sigma(x)\langle p, z\rangle + o(|z|).$$

Scelto $y \in C$ tale che $\sigma(x) = |x-y|$, dalla disuguaglianza $\sigma^2(x+z) \leq |x+z-y|^2$ deduciamo

$$|(x-y)+z|^2 \geq |x-y|^2 + 2|x-y|\langle p, z\rangle + o(|z|),$$

$$\langle x-y, z\rangle \geq \langle |x-y|p, z\rangle + o(|z|).$$

Deve quindi essere $x - y = p|x-y|$ e y è univocamente determinato da p. ■

Esercizio 10: Sia $\sigma(x) := \operatorname{dist}(x, \Sigma)$ e supponiamo per assurdo che $E := \{\sigma = t\}$ abbia misura positiva per un certo $t > 0$. In base all'esercizio precedente possiamo trovare $x \in E$ ove σ è differenziabile e E ha densità non nulla in x. Vediamo che queste due proprietà sono in contraddizione.

Supponiamo per semplicità $x = 0$ e poniamo $p := \nabla\sigma(0)$; dato $\delta > 0$ consideriamo il cono

$$C_\delta := \{y : |\langle y, p\rangle| \leq \delta|y|\}$$

ed osserviamo che per ϱ abbastanza piccolo deve essere $E \cap B_\varrho \subset C_\delta$. Infatti si ha

$$\left|\left\langle \frac{y}{|y|}, p\right\rangle\right| = \frac{|\sigma(y) - \sigma(0)|}{|y|} + \frac{o(|y|)}{|y|} = \frac{|\sigma(y) - t|}{|y|} + \frac{o(|y|)}{|y|}$$

quindi per $|y|$ abbastanza piccolo non può essere $\sigma(y) = t$ e $y \notin C_\delta$.

Abbiamo quindi

$$\limsup_{\varrho \to 0^+} \frac{|E \cap B_\varrho|}{\omega_n \varrho^n} \leq \limsup_{\varrho \to 0^+} \frac{|C_\delta \cap B_\varrho|}{\omega_n \varrho^n}$$

per ogni $\delta > 0$, contro il fatto che E non ha densità nulla in x (basta far tendere δ a 0). ■

Esercizio 11: Supponiamo che $0 \in \partial^* \{\sigma < t\}$ ed esista $\nabla\sigma(0)$. Posto $E := \{\sigma < t\}$,

per la (3.8) gli insiemi $E_\varrho := E/\varrho$ convergono in $L^1_{loc}(\mathbf{R}^n)$ alla caratteristica del semipiano

$$H := \{x \in \mathbf{R}^n : \langle x, \nu(0)\rangle \leq 0\}.$$

D'altro canto gli insiemi E_ϱ sono rappresentabili come $\{\sigma_\varrho < 0\}$ ove

$$\sigma_\varrho(x) := \frac{\sigma(\varrho x) - t}{\varrho}.$$

Le funzioni σ_ϱ convergono uniformemente sui compatti di $\mathbf{R}^n$ alla funzione $\sigma_0 := \langle \nabla\sigma(0), x\rangle$ per $\varrho \to 0^+$. Da questo si ricava facilmente che $H \subset \{\sigma_0 \leq 0\}$ a meno di insiemi di misura nulla. Infatti ogni palla chiusa $B \subset \{\sigma_0 > 0\}$ definitivamente non interseca E_ϱ, a causa della convergenza uniforme di σ_ϱ a σ_0. Dato che $|H \setminus \{\sigma_0 \leq 0\}| = 0$ deve essere $\nu(0) = -\nabla\sigma(0)$. ■

Notazioni

$[t]$	parte intera di t;	$\mathrm{Lip}(f)$	costante di Lipschitz di f;
S^k	sfera k-dimensionale in $\mathbf{R}^{k+1}$;	$\langle u, v\rangle$	prodotto scalare di u e v;
E'	duale di E;	χ_S	funzione caratteristica di S;
$\mathcal{B}(\Omega)$	Boreliani di Ω;	$\lvert E\rvert$	misura di Lebesgue di E;
$\mathcal{L}^n$	misura di Lebesgue in $\mathbf{R}^n$;	B_ϱ	palla di raggio ϱ in 0.

BIBLIOGRAFIA

[1] F. J. Almgren - J. Taylor - L. Wang, *Curvature driven flows: a variational approach*, di prossima pubblicazione su Siam J. Cont. Optim.(1994).

[2] L. Ambrosio - V. M. Tortorelli, *Approximation of functionals depending on jumps by elliptic functionals via Γ-convergence.*, Comm. Pure Appl. Math. 43 (1990), 999-1036.

[3] H. Brezis, *Analyse fonctionnelle.* Masson, Paris (1983).

[4] H. Brezis, *Opérateurs maximaux monotones et semi-groupes de contractions dans les espaces de Hilbert*, North-Holland Mathematical Studies, 5 (1973).

[5] E. Bombieri, *Regularity theory for almost minimal currents.*, Arch. Rational Mech. Anal., 78 (1982), 99-130.

[6] E. De Giorgi - A. Marino - M. Tosques, *Funzioni (p, q)-convesse*, Atti Accad. Naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur., 73 (1982), 6-14.

[7] E. De Giorgi - A. Marino - M. Tosques, *Problemi di evoluzione in spazi metrici e curve di massima pendenza*, Atti Accad. Naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur., 68 (1980), 180-187.

[8] E. De Giorgi, *New problems on minimizing movements*, in *Boundary Value Problems for PDE and Applications*, C. Baiocchi e J.L. Lions Eds, Masson,(1993), 81-98.

[9] M. De Giovanni - A. Marino - M. Tosques, *Evolution equations with lack of convexity*, Nonlinear Analysis TMA, 12 (1985), 1401-1443.

[10] Z. Denkowski - S. Migórski - S. Mortola, *Differential inclusions and minimizing movements*, Preprint SNS Pisa, n. 36 (1993).

[11] I. Ekeland - R. Temam, *Convex Analysis and Variational Problems*, North-Holland, Amsterdam (1976).

[12] L. C. Evans - J. Spruck, *Motion of level sets by mean curvature I*, J. Differential Geom., 33 (1991), 635-681.

[13] L. C. Evans - Spruck J.: *Motion of level sets by mean curvature II*. Trans. Amer. Mat. Soc., **330** (1992), 635-681.

[14] L. C. Evans - J. Spruck, *Motion of level sets by mean curvature III.*, J. Geom. Analysis, **2** (1992), 121-150.

[15] L. C. Evans - J. Spruck: *Motion of level sets by mean curvature IV*, J. Geom. Analysis, di prossima pubblicazione.

[16] I. Fonseca - M. A. Katsoulakis, *Minimizing movements and mean curvature evolution equations associated to a phase transition problem*, preprint Center for Nonlinear Analysis, 1994.

[17] U. Giannazza - G. Savaré, *Some results on minimizing movements*, Rend. Accad. Naz. Sci. XL, Mem. Mat., 112° (1994), 57-80.

[18] U. Giannazza - M. Gobbino - Savaré G., *Evolution problems and minimizing movements*, Preprint IAN Pavia n. 899, di prossima pubblicazione su Atti Accad. Naz. dei Lincei, Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. (1994).

[19] E. Giusti, *Minimal Surfaces and Functions of Bounded Variation*, Birkhäuser, Boston (1984).

[20] T. Ilmanen, *Convergence of the Allen-Cahn equation to the Brakke's motion by mean curvature*, Preprint.

[21] A. Marino - C. Saccon - M. Tosques, *Curves of maximal slope and parabolic variational inequalities with nonconvex constraints*, Ann. Sc. Norm. Sup., **4** (1989), 281-330.

[22] U. Massari, *Esistenza e regolarità delle ipersuperfici di curvatura media assegnata in R^n*, Arch. Rational Mech. Anal., **55** (1974), 357-382.

[23] F. Morgan, *Geometric Measure Theory—A Beginner's Guide*, Academic Press, Boston (1988).

[24] W. Rudin, *Real and Complex Analysis*, Mc Graw Hill (1969).

[25] L. Simon, *Lectures on Geometric Measure Theory*, in *Proceedings of the Centre for Mathematical Analysis*, Australian National University, Camberra (1983).

[26] H. M. Soner, *Ginzburg-Landau equation and motion by mean curvature, I: convergence*, Preprint CMU, 1993.

[27] K. Yosida, *Functional Analysis*, Springer-Verlag, Berlin (1980).

[28] W. P. Ziemer, *Weakly Differentiable Functions*, Springer-Verlag, Berlin (1989).

Direttore responsabile: Prof. A. Ballio - Autorizz. Trib. di Roma n. 7269 dell'8-12-1959
«Monograf» - Via Collamarini, 5 - Bologna