Rendiconti
Accademia Nazionale delle Scienze detta dei XL
Memorie di Matematica
108° (1990), Vol. XIV, fasc. 7, pagg. 107-120

WALTER FRATTAROLO (*)

Un problema di omogeneizzazione con vincoli sul gradiente, per funzionali variazionali (**).

RIASSUNTO. — Si determinano le condizioni atte ad assicurare la convergenza dei minimi di una successione di funzionali variazionali, con un vincolo oscillante sul gradiente; a tale scopo, è stato necessario individuare la rappresentazione esplicita del funzionale integrale limite. Il punto nuovo, rispetto a problemi analoghi già studiati, è la dipendenza esplicita dei funzionali dalla funzione, oltre che dal suo gradiente.

A Homogeneization Problem with Constraints on the Gradient, for Variational Functionals.

ABSTRACT. — We find conditions which can assure the convergence of minima of a sequence of variational functionals, with an oscillating constraint on the gradient; to that aim, it was necessary to find the explicit representation of the limit integral functional. The point here, with respect to analogous problems already studied, is the explicit dependence of the functionals on the function, besides on its gradient.

1. - INTRODUZIONE

Si consideri la seguente successione di valori

$$i_h(\vartheta) = \inf_{\substack{u \in \mathrm{Lip}_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^n) \\ u=0 \text{ su } \partial\Omega}} \left\{ \int_\Omega f(hx, u, Du)\, dx + \int_\Omega \vartheta(x) u(x)\, dx \right\} \tag{1}$$

con u sottoposta al vincolo addizionale $|Du| < \varphi(hx)$ in Ω, f e φ sono funzioni 1-periodiche in tutte le componenti della variabile x e ϑ è in $L^\infty(\Omega)$ e $\mathrm{Lip}_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^n)$ è l'insieme delle funzioni localmente lipschitziane su $\mathbf{R}^n$.

(*) Indirizzo dell'Autore: Università degli Studi di Salerno, Facoltà di Ingegneria, Dipartimento di Fisica, I-84100 Salerno.

(**) Memoria presentata il 19 febbraio 1990 da Mario Troisi, socio dell'Accademia.

ISSN-0392-4106

Varie indagini sono state compiute su un sussistere di un risultato di omogeneizzazione, sulla convergenza cioè per ogni $\theta \in L^\infty(\Omega)$ di $i_h(\theta)$ verso un valore $i_\infty(\theta)$ dato da

$$(2) \qquad i_\infty(\theta) = \inf_{\substack{u \in \mathrm{Lip}_{loc}(\mathbf{R}^n) \\ u = 0 \text{ su } \partial\Omega}} \left\{ \int_\Omega \omega(u, Du)\, dx + \int_\Omega \theta(x) u(x)\, dx \right\}$$

ove la funzione ω è definita dalla formula

$$(3) \qquad \omega(S, \xi) = \inf_{\mathcal{F}(\xi)} \left\{ \int_{[0,1]^n} f(x, s, Dv)\, dx \right\}$$

con

$$\mathcal{F}(\xi) = \{ v \in \mathrm{Lip}_{loc}(\mathbf{R}^n) : v(x) - \xi \cdot x \text{ 1-periodica}, \ |Dv| < \varphi \text{ q.o.} \}$$

(tale inf viene assunto uguale a $+\infty$ se $\mathcal{F}(\xi) = \emptyset$) (cf. [3]).

La risposta è risultata positiva nel caso in cui φ è limitata, verifica una opportuna minorazione ed f, non negativa, convessa in Dv, limitata sui limitati, non dipende dalla variabile x (cf. [10], [11]).

Nella presente nota indaghiamo sulla omogeneizzabilità del problema descritto nel caso in cui la funzione f dipende esplicitamente da tale variabile.

Sarà provato il sussistere del risultato di omogeneizzazione in opportune ipotesi di «lipschitzianità» della f nella variabile x (Teorema 2.8).

Il quadro di lavoro sarà costituito dalla teoria della Γ-convergenza (cf. [16]). Varie tecniche già sperimentate in tale contesto (cf. [10], [11], [4]) verranno opportunamente utilizzate ed adattate al caso in esame.

2. - Richiami e notazioni

Sarà utile nel seguito il seguente lemma elementare.

Lemma: Se $g: R^n \to R$ è 1-periodica in tutte le componenti e sta in $L^1([0, 1]^n)$, allora, posto $g_h(x) = g(hx)$ si ha

$$g_h \rightharpoonup \int_{[0,1]^n} g(y)\, dy \qquad \text{in } L^1(\Omega)$$

per ogni aperto Ω.

Con il simbolo $C^0(\Omega)$ denoteremo la topologia indotta su $C^0(\mathbf{R}^n)$ dalla metrica estesa (a valori anche $+\infty$)

$$d_1(u, v) = \sup_{x \in \Omega} |u(x) - v(x)|$$

con il simbolo $C_0^0(\Omega)$ la topologia indotta su $C^0(\mathbf{R}^n)$ dalla metrica estesa

$$d_0(u, v) = \begin{cases} \sup\limits_{x \in \Omega} |u(x) - v(x)|, & u - v = 0 \text{ su } \partial\Omega, \\ +\infty & \text{altrimenti}. \end{cases}$$

Definizione: Sia (X, τ) uno spazio topologico che verifica il primo assioma di numerabilità e sia F_h una successione di funzionali da X a R. Diremo che

$$\Gamma(\tau^-) \limsup_{\substack{h \to +\infty \\ y \to x}} F_h(y) = F'(x)$$

se sono soddisfatte le due condizioni seguenti:

(a) per ogni successione convergente a x

$$\limsup_{h \to +\infty} F_h(x_h) > F'(x);$$

(b) esiste una successione $(x_h)_N$ convergente ad x tale che

$$\limsup_{h \to +\infty} F_h(x_h) = F'(x).$$

La definizione di $F''(x) = \Gamma(\tau^-) \liminf\limits_{\substack{h \to +\infty \\ y \to x}} F_h(y)$ è data da (a) e (b) sostituendo limsup con liminf. Infine diremo che

$$\Gamma(\tau^-) \lim_{\substack{h \to +\infty \\ y \to x}} F_h(y) = F(x)$$

se $F'(x) = F''(x) = F(x)$.

3. - Risultati preliminari

Si indichi con G_0 la classe delle funzioni $g\colon R_x^n \times R_w^n \to R$ non negative, misurabili rispetto ad x, convesse in w e tali che $g(x, w) < \sigma(|w|)$ con σ limitata sui limitati. Sia φ una funzione da R^n in R_0^+ misurabile, 1-periodica, limitata da una costante M e che verifichi per un ϑ opportuno compreso tra 0 e $\frac{1}{2}$

$$0 < m < \varphi(x) \qquad \forall x \in [0, 1]^n \sim [\tfrac{1}{2} - \vartheta, \tfrac{1}{2} + \vartheta]^n.$$

Sia $\varphi_h(x) = \varphi(hx)$; si ponga allora

(4) $$\mathcal{F}(\xi) = \{u \in \mathrm{Lip}_{loc}(\mathbf{R}^n) \colon u(x) - \xi \cdot x \text{ 1-periodica, in tutte le variabili;} \\ |Du(x)| < \varphi(x) \text{ q.o.}\},$$

(5) $$K = \{\xi \in \mathbf{R}^n \colon \mathcal{F}(\xi) \neq \emptyset\}.$$

Grazie alla Proposizione 4.1 di [11], $\mathring{K} \neq \emptyset$ inoltre K è chiuso.

Sia inoltre, se $g \in G_\sigma$

$$(6) \qquad \omega(\xi) = \begin{cases} \min\limits_{v \in \mathcal{A}^1(\xi)} \int\limits_{]0,1[^n} g(x, Dv(x))\, dx\,, & \text{se } \xi \in K\,, \\ +\infty & \text{altrimenti}\,. \end{cases}$$

Sia g_h una successione in G_σ. Porremo allora per ogni $u \in \mathrm{Lip}_{loc}(\mathbf{R}^n)$

$$G^{\prime}(u, \Omega) = \Gamma(C^\infty(\Omega)^-) \limsup_{\substack{h \to +\infty \\ v \to u}} G_h(v, \Omega)\,,$$

$$G^{\prime\prime}(u, \Omega) = \Gamma(C^\infty(\Omega)^-) \liminf_{\substack{h \to +\infty \\ v \to u}} G_h(v, \Omega)\,,$$

ove

$$G_h(v, \Omega) = \begin{cases} \int\limits_\Omega g_h(x, Dv(x))\, dx\,, & \text{se } |Dv| < \eta_h \text{ q.o.}\,, \\ +\infty\,, & \text{altrimenti}\,. \end{cases}$$

Se esiste il Γ-limite lo denoteremo con $G(u, \Omega)$.

Si ponga ancora per ogni $u \in \mathrm{Lip}_{loc}(R^n)$

$$G_\omega(u, \Omega) = \begin{cases} \int\limits_\Omega \omega(Du(x))\, dx\,, & \text{se } Du \in K \text{ q.o.}\,, \\ +\infty\,, & \text{altrimenti}\,. \end{cases}$$

Avremo bisogno nel seguito di raffinamenti tecnici di alcuni risultati di [11].

Lemma 3.1: Sia $\{g_h\}$ in G_σ. Se u è in $\mathrm{Lip}_{loc}(R^n)$ e Ω è un aperto lipschitziano stellato limitato e $Du \in K$ q.o., allora $G^{\prime\prime}(u, \Omega) < +\infty$.

Dimostrazione: Sia Ω stellato rispetto all'origine e sia per $0 < \tau < 1$

$$u_{\tau,\varepsilon}(x) = \varepsilon^{-n} \int\limits_{R^n} \psi_\varepsilon(y) u_\tau(x - y)\, dy$$

ove $\psi \in C^\infty$, $\psi \geq 0$, $\mathrm{spt}(\psi) \subset \{x : |x| < 1\}$ e $\int\limits_{R^n} \psi\, dx = 1$ con

$$u_\tau(x) = u(\tau x)\,, \qquad \text{e} \qquad x \in \frac{\Omega}{\tau} = \left\{x : x = \frac{y}{\tau},\ y \in \Omega\right\}.$$

Allora grazie al Lemma 3.3 di [10], $Du_{\tau,\varepsilon} \in K^\varepsilon$ per ogni $x \in \Omega/\tau$, $\varepsilon < \varepsilon(\tau)$. Si ha allora ([11], formula 3.3)

$$G^{\prime\prime}(u_{\tau,\varepsilon}, \Omega) < C \operatorname{meas}(\Omega) < +\infty\,.$$

Al limite per $\varepsilon \to 0$ e poi per $\tau \to 1^-$ si ha per le proprietà di semicontinuità di G'

$$G'(u, \Omega) < +\infty .$$

Teorema 3.2: Sia g_k una successione di funzioni in G_θ. Esistono allora una sottosuccessione $\{h_k\}$ ed una funzione di Borel $\bar{g}_\infty$: $R_x \times R_\xi^n \to R_0^+$ convessa in ξ, limitata, tali che, posto

$$\bar{G}(u, \Omega) = \begin{cases} \int_\Omega \bar{g}_\infty(x, Du)\, dx , & \text{se } Du(x) \in K \text{ q.o.} , \\ +\infty , & \text{altrimenti} , \end{cases}$$

si ha per ogni $u \in \mathrm{Lip}_{loc}(R^n)$ e per ogni aperto stellato lipschitziano limitato

$$\Gamma(C^0(\Omega)^-) \lim_{\substack{k \to +\infty \\ v \to u}} G_{h_k}(v, \Omega) = \bar{G}(u, \Omega) .$$

Inoltre per ogni u nulla su $\partial\Omega$ si ha

$$\Gamma(C_0^0(\Omega)^-) \lim_{\substack{k \to +\infty \\ v \to u}} G_{h_k}(v, \Omega) = \bar{G}(u, \Omega) .$$

Dimostrazione: Grazie alle Proposizioni 3.4 e 5.1 di [11], esiste una sottosuccessione $\{h_k\}$ ed una funzione di Borel $\bar{g}_\infty$: $R_x \times R_\xi^n \to R_0^+$ convessa in ξ, limitata, tale che posto per ogni Ω aperto limitato di R^n

$$\bar{G}'_-(u, \Omega) = \sup_{\Omega' \subset\subset \Omega} \Gamma(C^0(\Omega)^-) \liminf_{\substack{k \to +\infty \\ v \to u}} G_{h_k}(v, \Omega') ,$$

$$\bar{G}''_-(u, \Omega) = \inf_{\Omega' \subset\subset \Omega} \Gamma(C^0(\Omega)^-) \limsup_{\substack{k \to +\infty \\ v \to u}} G_{h_k}(v, \Omega') ,$$

si ha per ogni aperto limitato Ω e per ogni $u \in \mathrm{Lip}_{loc}(R^n)$

$$\bar{G}'_-(u, \Omega) = \bar{G}''_-(u, \Omega) = \bar{G}(u, \Omega)$$

ove

$$\bar{G}(u, \Omega) = \begin{cases} \int_\Omega \bar{g}_\infty(x, Du)\, dx , & \text{se } Du \in K \text{ q.o.} , \\ +\infty , & \text{altrimenti} . \end{cases}$$

Per concludere la dimostrazione occorre verificare che se Ω è un aperto stellato lipschitziano allora $\bar{G}'_-(u, \Omega)$ e $\bar{G}''_-(u, \Omega)$ coincidono esattamente con il

$$\Gamma(C^0(\Omega)^-) \lim_{\substack{k \to +\infty \\ v \to u}} G_{h_k}(v, \Omega) .$$

Poichè ovviamente, data la monotonia crescente dei G_h rispetto ad Ω, si ha

$$\bar{G}^{\Gamma}_{-}(u, \Omega) < \Gamma(C^{\alpha}(\Omega)^{-}) \liminf_{\substack{h \to +\infty \\ v \to u}} G_h(v, \Omega)$$

se $Du \notin K$ su Ω q.o., risulta $\bar{G}^{\Gamma}_{-}(u, \Omega) = +\infty$, da cui segue subito l'identità cercata.

Basterà allora provare, sotto l'ipotesi addizionale $Du \in K$ q.o. su Ω, la disuguaglianza

$$\bar{G}^{\Gamma}_{-}(u, \Omega) > \Gamma(C^{\alpha}(\Omega)^{-}) \limsup_{\substack{h \to +\infty \\ v \to u}} G_h(v, \Omega) .$$

Ma in tal caso grazie al Lemma 3.1 si ha che $G^{\alpha}(u, \Omega) < +\infty$, quindi la quantità al secondo membro è finita e la disuguaglianza cercata segue allora subito dal Lemma 3.2 di [11].

Per provare l'ultima osservazione basterà dimostrare che

$$\Gamma(C^{\alpha}_{0}(\Omega)^{-}) \lim_{\substack{h \to +\infty \\ v \to u}} G_h(v, \Omega) = \Gamma(C^{\alpha}(\Omega)^{-}) \lim_{\substack{h \to +\infty \\ v \to u}} G_h(v, \Omega)$$

si osservi allora innanzitutto che il $\Gamma(C^{\alpha}(\Omega)^{-})$ limite è sempre inferiore al $\Gamma(C^{\alpha}_{0}(\Omega)^{-})$ limite inferiore, quindi se $Du \notin K$ q.o., essendo il primo $+\infty$ anche il secondo non sarà finito.

Si assuma pertanto $Du \in K$ q.o., e quindi $G^{\alpha}(u, \Omega) < +\infty$. Poichè il Lemma 3.1 di [11] è vero anche per i Γ-liminf e Γ-limsup relativi a sottosuccessioni $\{h_k\}$ di $\{h\}$, si ha subito l'asserto.

Vale inoltre il seguente

Teorema 3.3: Sia $g \in G_{\alpha}$ e risulti inoltre 1-periodica in tutte le componenti rispetto alla variabile x. Sia per ogni u in $\mathrm{Lip}_{\infty}(R^n)$

$$G_h(u, \Omega) = \begin{cases} \int_{\Omega} g(hx, Du)\, dx , & \text{se } |Du| < \varphi_h \text{ q.o.} , \\ +\infty & \text{altrimenti} . \end{cases}$$

Allora per ogni u in $\mathrm{Lip}_{\infty}(R^n)$ e per ogni aperto lipschitziano stellato limitato

$$\Gamma(C^{\alpha}(\Omega)^{-}) \lim_{\substack{h \to +\infty \\ v \to u}} G_h(v, \Omega) = G_{\alpha}(u, \Omega) .$$

Inoltre se $u = 0$ su $\partial\Omega$

$$\Gamma(C^{\alpha}_{0}(\Omega)^{-}) \lim_{\substack{h \to +\infty \\ v \to u}} G_h(v, \Omega) = G_{\alpha}(u, \Omega) .$$

Dimostrazione: Assegnata una successione $\{b_k\}$, esiste una sottosuccessione $\{b_{k_j}\}$ tale che grazie al Lemma 6.2 e alla Proposizione 5.1 di [11] si ha

$$G_u(u, \Omega) < \hat{G}'_-(u, \Omega) = \hat{G}''_-(u, \Omega)$$

si può allora concludere come nel Teorema 3.2 che

$$G_u(u, \Omega) = \Gamma(C_0(\Omega)^-) \lim_{\substack{j \to +\infty \\ v \to u}} G_{b_{k_j}}(v, \Omega) .$$

Grazie all'arbitrarietà di $\{b_k\}$ si può dedurre infine con un ragionamento di compattezza che

$$G_u(u, \Omega) = \Gamma(C^0(\Omega)^-) \lim_{\substack{k \to +\infty \\ v \to u}} G_k(v, \Omega) .$$

L'ultimo asserto non è nient'altro che il Lemma 3.1 di [11].

4. - Il risultato principale

In questa sezione supporemo sempre le seguenti ipotesi:

a) $\Omega \subset R^n$ è un aperto limitato lipschitziano stellato;

b) f: $R_x \times R_y \times R_z^n \to R^+$ è una funzione misurabile 1-periodica (in tutte le componenti) nella x, continua nella y, convessa nella z, limitata sui limitati, verificante inoltre le seguenti condizioni

$$|f(x, y_1, z) - f(x, y_2, z)| < \varrho(x, |y_1 - y_2|) \cdot \pi(|z|)$$

con ϱ: $R_x \times R^+ \to R^+$ 1-periodica (in tutte le componenti) e sommabile su $[0, 1]^n$ nella x e tale che $\varrho(x, \cdot)$ è crescente e $\lim_{t \to 0} \varrho(x, t) = 0$ q.o. in x; π: $R_+ \to R_+$ è crescente e limitata sui limitati;

c) φ: $R^n \to R^+$ è una funzione misurabile e 1-periodica (in tutte le componenti) limitata da una costante M e tale che per un opportuno ϑ con $0 < \vartheta < \frac{1}{2}$ si ha

$$0 < m \leq \varphi(x) \qquad \forall x \in [0, 1]^n \sim [\tfrac{1}{2} - \vartheta, \tfrac{1}{2} + \vartheta]^n$$

$\pi(\xi)$, K, ω sono definiti come in (4), (5), (3).

Si osservi che grazie alla periodicità della funzione ϱ e alla sua sommabilità, posto

$$\varrho_k(x, t) = \varrho(kx, t)$$

si ha che

$$\varrho_h(\cdot, t) \to \int_{[0,1]^n} \varrho(y, t)\, dy \qquad \text{in } L^1(\Omega)$$

per ogni aperto Ω.

Inoltre poichè $\lim_{t\to 0} \varrho(x, t) = 0$ e ϱ è decrescente in t, si ha subito (convergenza dominata)

$$\lim_{t\to 0} \int_{[0,1]^n} \varrho(y, t)\, dy = 0 .$$

Nel seguito porremo

$$f_h(x, y, z) = f(hx, y, z) , \qquad \varphi_h(x) = \varphi(hx) .$$

Per ogni u in $L^\infty_{loc}(R^n)$ e per ogni v in $\mathrm{Lip}_{loc}(R^n)$ definiamo

$$\phi_h(u, v, \Omega) = \begin{cases} \int_\Omega f_h(x, u, Dv)\, dx & \text{se } |Dv| < \varphi_h \text{ q.o.} , \\ +\infty , & \text{altrimenti} , \end{cases}$$

$$\phi'(u, v, \Omega) = \Gamma(C^0(\Omega)^-) \liminf_{\substack{h\to+\infty \\ w\to v}} \phi_h(u, w, \Omega) ,$$

$$\phi''(u, v, \Omega) = \Gamma(C^0(\Omega)^-) \limsup_{\substack{h\to+\infty \\ w\to v}} \phi_h(u, w, \Omega) ,$$

e, quando $\phi'(u, v, \Omega) = \phi''(u, v, \Omega)$:

$$\phi(u, v, \Omega) = \Gamma(C^0(\Omega)^-) \lim_{\substack{h\to+\infty \\ w\to v}} \phi_h(u, w, \Omega) .$$

Con i simboli ϕ'_0, ϕ''_0, ϕ_0 denoteremo le stesse quantità ma calcolate nella topologia $C^0_0(\Omega)$. Porremo inoltre

$$F_h(v, \Omega) = \phi_h(v, v, \Omega) ,$$

$$F'(v, \Omega) = \Gamma(C^0(\Omega)^-) \liminf_{\substack{h\to+\infty \\ w\to v}} F_h(w, \Omega) ,$$

$$F''(v, \Omega) = \Gamma(C^0(\Omega)^-) \limsup_{\substack{h\to+\infty \\ w\to v}} F_h(w, \Omega) ,$$

e, quando $F'(v, \Omega) = F''(v, \Omega)$:

$$F(v, \Omega) = \Gamma(C^0(\Omega)^-) \lim_{\substack{h\to+\infty \\ w\to v}} F_h(w, \Omega) .$$

Con i simboli F'_0, F''_0, F_0 denoteremo le stesse quantità ma calcolate nella topologia $C^0_0(\Omega)$.

LEMMA 4.1: Se $u \in L^\infty_{loc}(R^n)$ e $v \in \mathrm{Lip}_{loc}(R^n)$ i funzionali

$$u \to \phi'(u, v, \Omega), \qquad u \to \phi''(u, v, \Omega)$$

sono continui rispetto alla convergenza uniforme. Inoltre ϕ', ϕ'' risultano finiti se e solo se $Dv \in K$.

DIMOSTRAZIONE: Basterà considerare il caso relativo a ϕ' potendosi ragionare analogamente per ϕ''. Sia innanzitutto $Dv \in K$, $N = \sup_{x \in \Omega} |u|$ e L tale che

$$L > \sup\{f(x, y, z) : x \in \Omega, |y| < N, |z| < M\}.$$

Si ponga allora

$$T_h(w, \Omega) = \begin{cases} L \cdot \mathrm{mis}(\Omega) & \text{se } |Dw| < \varphi_h, \\ +\infty, & \text{altrimenti}, \end{cases}$$

per il Teorema 3.4 si ha

$$\Gamma(C^0(\Omega)^-) \lim_{\substack{h \to +\infty \\ w \to v}} T_h(w, \Omega) = T(v, \Omega)$$

ove

$$T(v, \Omega) = \begin{cases} L \cdot \mathrm{mis}(\Omega) & \text{se } Dv \in K, \\ +\infty, & \text{altrimenti}. \end{cases}$$

D'altro canto $T_h(v, \Omega) > \phi_h(u, v, \Omega)$ e pertanto $\phi'(u, v, \Omega) < T(v, \Omega)$ da cui segue $\phi'(u, v, \Omega) < +\infty$.

Siano $u_1 \in L^\infty_{loc}(R^n)$ e $\{v_h\}$ una successione di funzioni in $\mathrm{Lip}_{loc}(\mathbf{R}^n)$, tale che

$$|Dv_h| < \varphi_h \text{ q.o.}, \quad v_h \to v \text{ in } C^0(\bar{\Omega}) \text{ con } \liminf_{h \to +\infty} \phi_h(u_1, v_h, \Omega) = \phi'(u_1, v, \Omega).$$

Sia $u_2 \in L^\infty_{loc}(R^n)$ tale che $\operatorname{ess\,sup}_\Omega |u_1(x) - u_2(x)| < \varepsilon$. Allora

$$\phi'(u_2, v, \Omega) < \liminf_h \phi_h(u_2, v_h, \Omega) < \liminf_h \left(\phi_h(u_1, v_h, \Omega) + \int_\Omega \varrho(bx, \varepsilon)\, dx \cdot \pi(M)\right)$$

da cui

$$\phi'(u_2, v, \Omega) - \phi'(u_1, v, \Omega) < \mathrm{mis}(\Omega) \int_{(0,1)^n} \varrho(y, \varepsilon)\, dy$$

da ciò segue subito la continuità.

Supponiamo ora che $Dv \notin K$. Allora $\phi'(u, v, \Omega) = +\infty$.
Si ponga infatti per ogni w in $\mathrm{Lip}_{loc}(\mathbb{R}^n)$

$$\Theta_h(w, \Omega) = \begin{cases} 0, & \text{se } |Dw| < \varphi_h, \\ +\infty, & \text{altrimenti}. \end{cases}$$

Allora per il Teorema 3.4.

$$\Gamma(C^0(\Omega)^-) \lim_{\substack{h \to +\infty \\ w \to v}} \Theta_h(w, \Omega) = \Theta(v, \Omega)$$

ove

$$\Theta(v, \Omega) = \begin{cases} 0, & \text{se } Dv \in K \text{ q.o.}, \\ +\infty, & \text{altrimenti}. \end{cases}$$

D'altro canto $\Theta(v, \Omega) \leq \phi_h(u, v, \Omega)$, quindi $\phi'(u, v, \Omega) \geq \Theta(v, \Omega)$ per ogni u e pertanto $\phi'(u, v, \Omega) = +\infty$.

Lemma 4.2: Per ogni $u \in \mathrm{Lip}_{loc}(\mathbb{R}^n)$ si ha

$$F'(u, \Omega) = \phi'(u, u, \Omega), \qquad F''(u, \Omega) = \phi''(u, u, \Omega),$$
$$F'_0(u, \Omega) = \phi'_0(u, u, \Omega), \qquad F''_0(u, \Omega) = \phi''_0(u, u, \Omega).$$

Dimostrazione: Proviamo la prima identità. Sia $F'(u, u, \Omega) < +\infty$ allora esiste $\{v_h\} \subset \mathrm{Lip}_{loc}(\mathbb{R}^n)$ con $|Dv_h| < \varphi_h$ q.o. e $v_h \to u$ in $C^0(\Omega)$ tale che

$$F'(u, \Omega) = \liminf_h F_h(v_h, \Omega) = \liminf_h \phi_h(v_h, v_h, \Omega).$$

Sia $\varepsilon_h = \sup_\Omega |u(x) - v_h(x)|$. Allora per ogni m

$$\phi'(u, u, \Omega) \leq \liminf_h \phi_h(u, v_h, \Omega) \leq \liminf_h \left(\pi(M) \int_\Omega g(hx, \varepsilon_m)\, dx + \phi_h(v_h, v_h, \Omega) \right) =$$
$$= F'(u, \Omega) + \left(\int_{[0,1]^n} g(y, \varepsilon_m)\, dy \right) \mathrm{mis}(\Omega).$$

Al limite per $m \to +\infty$ si ha

$$\phi'(u, u, \Omega) \leq F'(u, \Omega).$$

Ma allora $\phi'(u, u, \Omega) < +\infty$ e si ottiene allo stesso modo la disuguaglianza

$$F'(u, \Omega) \leq \phi'(u, u, \Omega).$$

Nel caso in cui $\phi'(u, v, \Omega) < +\infty$ si ragiona analogamente. Segue anche ovviamente che se $\phi'(u, v, \Omega) = +\infty$ allora $F'(u, \Omega) = +\infty$ e viceversa.

Le altre identità si provano in maniera analoga.

Lemma 4.3: La funzione ω verifica la seguente stima

$$|\omega(S_1, \xi) - \omega(S_2, \xi)| < \pi(M) \int_{[0,1]^n} \varrho(y, |S_1 - S_2|)\, dy .$$

Dimostrazione: Sia w tale che $|Dw| < \varphi$ q.o., $w - \xi \cdot x$ è 1-periodica e inoltre

$$\omega(S_2, \xi) = \int_{[0,1]^n} f(x, S_2, Dw)\, dx .$$

Allora

$$\omega(S_1, \xi) - \omega(S_2, \xi) < \omega(S_1, \xi) - \int_{[0,1]^n} f(x, S_2, Dw)\, dx <$$

$$< \int_{[0,1]^n} \{f(x, S_1, Dw) - f(x, S_2, Dw)\}\, dx < \int_{[0,1]^n} \varrho(y, |S_1 - S_2|)\, dy \cdot \pi(M) .$$

Si ponga per ogni u in $L^1_{loc}(\mathrm{R}^n)$

$$F_\omega(u, v, \Omega) = \begin{cases} \int_\Omega \omega(u, Dv)\, dx & \text{se } Dv \in K \text{ q.o.}, \\ +\infty, & \text{altrimenti}. \end{cases}$$

Lemma 4.4: Il funzionale $u \to F_\omega(u, v, \Omega)$ è continuo rispetto alla convergenza uniforme.

Dimostrazione: Se $Dv \in K$ q.o., la cosa segue subito dal Lemma 4.3. Se $Dv \notin K$ q.o. si ha allora identicamente $F_\omega(u, v, \Omega) = +\infty$.

Lemma 4.5: Se u è costante allora per ogni v in $\mathrm{Lip}_{loc}(\mathrm{R}^n)$

$$\phi(u, v, \Omega) = F_\omega(u, v, \Omega) .$$

Inoltre se $v = 0$ su $\partial\Omega$: $\phi_0(u, v, \Omega) = F_\omega(u, v, \Omega)$.

Dimostrazione: Si ponga $f'(x, \tau) = f(x, s, \tau)$ e $f'_h(x, \tau) = f(hx, s, \tau)$. Sia allora per ogni w in $\mathrm{Lip}_{loc}(\mathrm{R}^n)$

$$F'_h(w, \Omega) = \begin{cases} \int_\Omega f'_h(x, Dw)\, dx , & \text{se } |Dw| < \varphi_h \text{ q.o.}, \\ +\infty, & \text{altrimenti}. \end{cases}$$

In virtù del Teorema 3.4 applicato alla successione $F'_h(u, \Omega)$, posto per ogni v

in $\mathrm{Lip}_{loc}(\mathbf{R}^n)$

$$F^*(v,\Omega)=\begin{cases}\int_\Omega \omega(S, Dw)\,dx\,, & \text{se } Dv\in K \text{ q.o.}\,,\\ +\infty\,, & \text{altrimenti}\,,\end{cases}$$

si ha

$$F^*(v,\Omega)=\Gamma(C^0(\Omega)^-)\lim_{\substack{k\to+\infty\\ \varepsilon\to 0}} F_k^\varepsilon(v,\Omega)$$

e dunque

$$F_\omega(u,v,\Omega)=\phi(u,v,\Omega)\,.$$

Inoltre se $u=0$ su $\partial\Omega$ si ha anche

$$\phi_0(u,v,\Omega)=F_\omega(u,v,\Omega)\,.$$

Lemma 4.6: Per ogni u in $L^\infty_{loc}(\mathbf{R}^n)$ costante a tratti su insiemi lipschitziani e per ogni v in $\mathrm{Lip}_{loc}(\mathbf{R}^n)$, $\phi(u,v,\Omega)$ esiste e si ha:

$$\phi(u,v,\Omega)=F_\omega(u,v,\Omega)\,.$$

Inoltre se $v=0$ su $\partial\Omega$, allora $\phi_0(u,v,\Omega)=F_\omega(u,v,\Omega)$.

Dimostrazione: Sia $\{b_k\}$ un'estratta di $\{b\}$ e si ponga

$$f_k(x,z)=f(b_k x, u(x), z)\,,$$

$$\bar F_k(v,\Omega)=\begin{cases}\int_\Omega f_k(x, Dv)\,dx\,, & \text{se } |Dv|<q_{k_n} \text{ q.o.}\,,\\ +\infty\,, & \text{altrimenti}\,.\end{cases}$$

Alla successione $\{f_k\}$ si può applicare il Teorema 3.3. Esiste allora un'estratta $\{b_{k_j}\}$ ed una funzione di Borel $\bar f_\omega\colon R^n_x+K\to R^+_0$ convessa in z e limitata tale che posto per ogni v in $\mathrm{Lip}_{loc}(\mathbf{R}^n)$

$$\bar F_\omega(v,\Omega)=\begin{cases}\int_\Omega \bar f_\omega(x, Dv)\,dx\,, & \text{se } Dv\in K \text{ q.o.}\,,\\ +\infty\,, & \text{altrimenti}\,,\end{cases}$$

si ha per ogni v in $\mathrm{Lip}_{loc}(\mathbf{R}^n)$ e per ogni aperto Ω stellato, lipschitziano

$$\Gamma(C^0(\Omega)^-)\lim_{\substack{j\to+\infty\\ \varepsilon\to 0}} \bar F_{k_j}(v,\Omega)=\bar F_\omega(v,\Omega)$$

e inoltre se $v=0$ su $\partial\Omega$

$$\Gamma(C^0_0(\Omega)^-)\lim_{\substack{j\to+\infty\\ \varepsilon\to 0}} \bar F_{k_j}(v,\Omega)=\bar F_\omega(v,\Omega)\,.$$

Se u è costante a tratti su insiemi lipschitziani si ha allora passando ai punti di Lebesgue e applicando il Lemma 4.5

$$f_\omega(x, \xi) = \omega(u(x), \xi)$$

e dunque per le funzioni costanti a tratti si ha

$$\bar{F}_\omega(v, \Omega) = F_\omega(u, v, \Omega) .$$

Si può allora concludere, essendo $\bar{F}_\omega$ indipendente dalla sottosuccessione $\{\delta_k\}$, che per le funzioni u costanti a tratti $\phi(u, v, \Omega)$ esiste per ogni v in $\mathrm{Lip}_{loc}(\mathbf{R}^n)$ e $\phi(u, v, \Omega) = F_\omega(u, v, \Omega)$ ed inoltre che se $v = 0$ su $\partial\Omega$: $\phi_0(u, v, \Omega) = F_\omega(u, v, \Omega)$.

Teorema 4.7: Per ogni u in $\mathrm{Lip}_{loc}(\mathbf{R}^n)$ esiste $F(u, \Omega)$ e risulta $F(u, \Omega) = F_\omega(u, u, \Omega)$.

Inoltre se $u = 0$ su $\partial\Omega$ esiste $F_0(u, \Omega)$ e $F_0(u, \Omega) = F_\omega(u, u, \Omega)$.

Dimostrazione: Segue subito dal Lemma 4.6 e dal Lemma 4.2.

Teorema 4.8: Sotto le ipotesi $a)$, $b)$, $c)$ una sottosuccessione convergente $\{u_{\delta_k}\}$ di soluzioni dei problemi ($\theta \in L^\infty(\mathbf{R}^n)$)

$$\min_{\substack{u \in \mathrm{Lip}_{loc}(\mathbf{R}^n) \\ |Du| \leq \eta_k \text{ q.o.} \\ u = 0 \text{ su } \partial\Omega}} \left\{ \int_\Omega f_\delta(x, u(x), Du(x))\, dx + \int_\Omega \theta(x) u(x)\, dx \right\}$$

converge ad una soluzione di problema

$$\min_{\substack{Du \in K \text{ q.o.} \\ u = 0 \text{ su } \partial\Omega}} \left\{ \int_\Omega \omega(u(x), Du(x))\, dx + \int_\Omega \theta(x) u(x)\, dx \right\} .$$

Inoltre i valori minimi convergono al valore minimo.

Dimostrazione: Il teorema segue subito dal Teorema 4.7 e dal Corollario 2.4 di [16].

BIBLIOGRAFIA

[1] A. Bensoussan - J. L. Lions - G. Papanicolau, *Sur quelques phénomènes asymptotiques stationnaires*, C. R. Hebd. Séanc. Acad. Sci. Paris, 28-A (1975), 89-95.

[2] A. Bensoussan - J. L. Lions - G. Papanicolau, *Some asymptotic results for solution of variational inequalities with highly oscillating periodic coefficients* (to appear).

[3] A. Bensoussan - J. L. Lions - G. Papanicolau, *Asymptotic Analysis for Periodic Structures*, North-Holland, Amsterdam (1978).

[4] G. Buttazzo - G. Dal Maso, *Γ-limits of integral functionals*, J. Analyse Math., 37, n. 1 (1980), 145-185.

[5] L. Carbone, *Sur la Γ-convergence des intégrales du type de l'énergie à gradient borné*, J. Math. Pures Appl., 56 (1977), 79-84.

[6] L. Carbone, *D'intégrales sur fonctions avec des contraintes sur le gradient*, Commun. Partial Diff. Eqns, 2 (1977), 627-651.

[7] L. Carbone, *Sull'omogeneizzazione di un problema variazionale con vincoli sul gradiente*, Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat., 52 (1977), 10-14.

[8] L. Carbone, *Sur un problème d'homogénéisation avec des contraintes sur le gradient*, J. Math. Pures Appl., 58 (1979), 275-297.

[9] L. Carbone - C. Sbordone, *Some properties of Γ-limits of integral functionals*, Annali Mat. Pura Appl., 122 (1979), 1-60.

[10] L. Carbone - S. Salerno, *On a problem of homogenization with quickly oscillating constraints on the gradient*, J. Math. Analysis Applic., 90 (1982), 219-240.

[11] L. Carbone - S. Salerno, *Further results on a problem of omogenization with constraints on the gradient*, J. Analise Math., 44 (1984), 1-20.

[12] L. Carbone - S. Salerno, *Homogenization with unbounded constraints on the gradient*, Nonlinear Analysis, 9, n. 5 (1985), 431-444.

[13] J. Cioranescu - J. Saint-Jean-Paulin, *Homogenization in open sets with holes*, J. Math. Analysis Applic., 71 (1979), 590-607.

[14] G. Dal Maso - L. Modica, *On a general theory of variational functionals*, in *Topics in Functional Analysis* (1980/81), Scuola Normale Superiore Pisa (1981).

[15] E. De Giorgi, *Convergence problems for functionals and operators*, in *Proc. Int. Meeting on Recent Methods in Nonlinear Analysis*, Rome, May 8-12, 1978, Pitagora Ed., Bologna (1979).

[16] E. De Giorgi - T. Franzoni, *Su un tipo di convergenza variazionale*, Rend. Sem. Mat. Brescia, 3 (1979), 63-101.

[17] E. De Giorgi - G. Letta, *Une notion générale de convergence faible pour des fonctions croissantes d'ensemble*, Annali Scu. Norm. Sup. Pisa, 4 (1977), 61-99.

[18] N. Fusco, *Γ-convergenza multidimensionale*, Boll. Un. Mat. Ital., 16-B (1979), 74-86.

[19] P. Marcellini - C. Sbordone, *Homogenization of non uniformly elliptic operators*, Appl. Analysis, 8 (1978), 101-113.

[20] L. Modica, *Γ-convergence to minimal surfaces problem and global solution of $\Delta u = 2(u^3 - u)$*, in *Proc. Int. Meeting on Recent Methods in Nonlinear Analysis*, Rome, May 8-12, 1978, Pitagora Ed., Bologna (1979).

[21] E. Sanchez-Palencia, *Solutions périodiques par rapport aux variables d'espace et applications*, C. R. Hebd. Séanc. Acad. Sci. Paris, 271-A (1970), 1129-1132.

[22] C. Sbordone, *Su alcune applicazioni di un tipo di convergenza variazionale*, Annali Scuola Normale Superiore Pisa, Vol. II, (1974), 617-638.

[23] L. Tartar, *Cours Peccot au Collège de France*, Paris (1977).

[24] H. Whitney, *On totally differentiable functions*, Pacif. J. Math., 1 (1951), 143-199.

Direttore responsabile: Prof. A. Ballio - Autorizz. Trib. di Roma n. 7269 dell'8-12-1959
« Monografia » - Via Collamarini, 5 - Bologna