Rendiconti
Accademia Nazionale delle Scienze detta dei XL
Memorie di Matematica
108° (1990), Vol. XIV, fasc. 3, pagg. 17-56

ADA BOTTARO ARUFFO (*)

Maggiorazioni funzionali (**)

RIASSUNTO. — In questo lavoro è presa in esame una generalizzazione della «maggiorazione integrale» considerata da Berliocchi e Lasry in [BL]. Di questa condizione generalizzata sono studiate diverse proprietà nonché le sue attinenze con la condizione di Nagumo. Essa stessa è poi utilizzata per ottenere risultati relativi agli operatori di Nemytskii e al Calcolo delle Variazioni.

Functional Estimations

SUMMARY. — In this work we consider a generalization of the «integral estimation» introduced by Berliocchi and Lasry in [BL]; we study some properties of this generalized condition and its connections with Nagumo's condition. This condition is also used to obtain results on Nemytskii's operators and in Calculus of Variations.

INTRODUZIONE

Siano Z insieme, $\mathcal{R} \subset 2^Z$, $A \subset \{a: D_a \subset Z \to [-\infty, +\infty[\text{ funzioni}\}$. Si considera la seguente condizione su coppie di funzioni (g, b), ove $g: D_g \subset Z \to [-\infty, +\infty[$ e $b: D_b \subset Z \to]-\infty, +\infty]$:

esista $Z_0 \subset Z$ con $Z \setminus Z_0 \in \mathcal{R}$ e per ogni $\varepsilon > 0$

esista $a_\varepsilon \in A$ per cui

$$b(z) < a_\varepsilon(z) + \varepsilon g(z) \quad \text{per ogni } z \in D_b \cap D_g \cap D_{a_\varepsilon} \cap Z_0 .$$

Tale condizione, se si considerano $Z = T \times X$, $\mathcal{R} = \{S \times X: S \in \mathfrak{L}, \mu(S) = 0\}$ (ove $\mathfrak{L}$ è una σ-algebra su T, $\mu: \mathfrak{L} \to [0, +\infty]$ è una misura, X è un insieme), $A = \{a: T \times X \to [-\infty, +\infty[\text{ funzioni}:$

$$0 < a(\cdot, x) - a(\cdot, x') \in \mathfrak{L}^1(\mu, R) \text{ per ogni } x, x' \in X\},$$

(*) Indirizzo dell'Autrice: Dipartimento di Matematica dell'Università di Genova; via L. B. Alberti 4, 16132 Genova.

(**) Memoria presentata il 12 ottobre 1989 da Giuseppe Scorza Dragoni, uno dei XL.

ISSN-0392-4106

costituisce un'estensione sia del concetto di « maggiorazione integrale » considerato da Berliocchi e Lasry ([BL] (Cap. III, § 1, Definizione 1), a cui si rimanda anche per le ragioni che hanno indotto ad introdurre tale condizione (commenti in fondo all'articolo)), sia di una condizione considerata da Cesari e Suryanarayana ([CS], (G2) (β)) (cfr. Osservazioni 1.2 c) e d)).

Si studiano varie proprietà di questa condizione, anche nel caso in cui $Z = T \times X$, $\mathcal{R} = \{S \times X : S \in \mathfrak{L},\ \mu(S) = 0\}$, X e μ come sopra ed in relazione ad alcune classi A (legate a spazi $\mathfrak{L}^s(\mu, \boldsymbol{R})$ od a spazi di funzioni misurabili o limitate o costanti od a valori in $\boldsymbol{R}$ oppure costituite da funzioni nulle, il cui dominio abbia tutte le sezioni appartenenti ad un fissato sottoinsieme di 2^X), ottenendo risultati (Teoremi 1.6, 1.8 e 1.12) che permettono, fra l'altro, uno studio dei legami della condizione introdotta con la condizione di Nagumo (Osservazioni 1.7 a), 1.10 e 1.13 b)).

Altre proprietà della condizione introdotta saranno studiate in [BA6], [BA7], [BA8] e [BA9].

Alcuni dei risultati del presente lavoro, di [BA6], [BA7], [BA8] e [BA9] sono legati a risultati di [BA3], di [BA4] e di [BA5].

In [BA3] e in [BA4] si mostra come le « maggiorazioni integrali » siano legate all'ipotesi di Nemytskii ([BA4], Osservazione 2.4) ed alla continuità degli operatori di Nemytskii ([BA3], Teoremi 3.7 e 3.9 e [BA4], Teoremi 2.0 e 2.1). In [BA5] si lega invece la « maggiorazione integrale » a problemi di calcolo delle variazioni, generalizzando così fra l'altro alcuni risultati di Berliocchi e Lasry ([BL], Cap. IV).

Anche in [Ba], ove si provano risultati di calcolo delle variazioni, è utilizzata la « maggiorazione integrale ».

Desidero ringraziare il Prof. J. P. Cecconi, che ha discusso con me i risultati del presente lavoro.

§ 0. - Notazioni e preliminari

0.0 Notazioni: Sia Z spazio vettoriale topologico su $\boldsymbol{R}$. Allora Z' indica il duale continuo di Z, $w(Z)$ indica la topologia debole su Z indotta dalla dualità con Z'; se Z è uno spazio normato su $\boldsymbol{R}$ allora $|z|_Z$ indica la norma in Z di $z \in Z$, $s(Z)$ indica la topologia forte su Z, $S_Z(a, r) = \{z \in Z : |z - a|_Z < r\}$ $(a \in Z,\ r > 0)$ e $(Z_\infty, \zeta(Z))$ indica lo spazio topologico tale che $Z_\infty = Z \cup \{\infty\}$ $(\infty \notin Z)$, $\zeta(Z) = s(Z) \cup \{Z_\infty \setminus C : C$ chiuso e limitato di $Z\}$; se T ed S sono insiemi, $\mathfrak{L}$ è una σ-algebra su T e $\mathcal{M}$ è una σ-algebra su S, $\mathfrak{L} \times \mathcal{M}$ indica la più piccola σ-algebra su $T \times S$ che contiene la classe $\{A \times B : A \in \mathfrak{L},\ B \in \mathcal{M}\}$; se $E \in \mathfrak{L}$, $\mathfrak{L}|_E$ indica la σ-algebra indotta su E da $\mathfrak{L}$; se $I \subset \boldsymbol{R}$ è un intervallo, si indica con $\mathfrak{L}(I)$ la σ-algebra di Lebesgue su I. Se E, F sono insiemi, $G \subset E$, $D \subset E \times F$, allora 2^E indica l'insieme delle parti di E; se $f : E \to F$ è un'applicazione, allora $f|_G$ indica la restrizione di f a G e, se $H \supset f(G)$, allora $f_{G,H} : G \to H$ indica l'applicazione tale che $f_{G,H}(x) = f(x)$ per ogni $x \in G$; se K

un insieme e $k\colon E \to K$ è un'applicazione, allora $(f, k)\colon E \to F \times K$ indica l'applicazione tale che $(f, k)(x) = (f(x), k(x))$ per ogni $x \in E$; $\mathrm{id}_E\colon E \to E$, $\mathrm{pr}_E\colon E \times F \to E$ e $\mathrm{pr}^F\colon E \times F \to F$ indicano le applicazioni tali che $\mathrm{id}_E(x) = x$ per ogni $x \in E$, $\mathrm{pr}_E(x, y) = x$ e $\mathrm{pr}^F(x, y) = y$ per ogni $(x, y) \in E \times F$; $D_x = \{y \in F\colon (x, y) \in D\}$ per ogni $x \in E$, $D^y = \{x \in E\colon (x, y) \in D\}$ per ogni $y \in F$;

$$\mathfrak{G}(E) = \{g\colon D_g \subset E \to [-\infty, +\infty[\text{ funzioni}\},$$
$$\mathfrak{K}(E) = \{h\colon D_h \subset E \to]-\infty, +\infty] \text{ funzioni}\};$$

se $g \in \mathfrak{G}(E)$, allora $\hat{g}$ indica l'elemento di $H(E)$ per il quale risulta

$$D_{\hat{g}} = \{x \in D_g\colon g(x) > -\infty\} \cup (E \setminus D_g),$$

$\hat{g}(x) = g(x)$ se $x \in D_g$ è tale che $g(x) > -\infty$, $\hat{g}(x) = +\infty$ se $x \in E \setminus D_g$. Siano V, U spazi vettoriali topologici su $\boldsymbol{R}$, localmente convessi in dualità; φ^* indica la coniugata di Fenchel (rispetto alla dualità di V con U) di una funzione $\varphi\colon V \to [-\infty, +\infty]$ e φ^{**} indica la coniugata di Fenchel (rispetto alla dualità di U con V) di φ^* (se si omette chi è U, si intende che sia $U = V'$). Se (Z, ζ) è uno spazio topologico, $E \subset Z$, allora $\zeta|_E$ indica la topologia indotta su E da ζ, $\overline{E}^{\zeta}$ e $\overset{\circ}{E}{}^{\zeta}$ indicano rispettivamente la chiusura e l'interno di E secondo ζ (si omette «ζ» se non ci sono confusioni), $B(\zeta)$ indica la σ-algebra di Borel su (Z, ζ), $s\zeta$ indica la topologia sequenziale relativa a ζ (cioè la topologia su Z i cui chiusi sono gli insiemi sequenzialmente chiusi in ζ). Si conviene inoltre che sia $\sup \emptyset = -\infty$ e $\inf \emptyset = +\infty$.

0.1 Definizione: Siano $\mathfrak{L}$ σ-algebra su T, (X, ϱ) spazio topologico, $f\colon T \to X$. Allora f si dice $\mathfrak{L}$-misurabile se $f^{-1}(A) \in \mathfrak{L}$ per ogni $A \in \varrho$.

0.2 Definizione: Uno spazio suslíniano è uno spazio S topologico T_2 tale che esistano uno spazio P metrico completo e separabile e un'applicazione φ continua e surgettiva, $\varphi\colon P \to S$.

0.3 Definizione: Siano $\mathfrak{L}$ σ-algebra su T, $\mu\colon \mathfrak{L} \to [0, +\infty]$ misura, $q \in [1, \infty]$. Allora si indica con $\mathfrak{L}^q(\mu)$ [risp. $L^q(\mu)$] lo spazio delle [risp. lo spazio delle (classi di equivalenza di)] applicazioni $\chi\colon T \to [-\infty, +\infty]$ che siano $\mathfrak{L}$-misurabili e tali che, se $T_\chi = \{t \in T\colon \chi(t) \in \boldsymbol{R}\}$, si abbia $\mu(T \setminus T_\chi) = 0$ e

$$t \in T_\chi \mapsto |\chi(t)|^q \in \boldsymbol{R} \text{ sia sommabile se } 1 < q < \infty,$$
$$t \in T_\chi \mapsto |\chi(t)| \in \boldsymbol{R} \text{ sia essenzialmente limitata se } q = \infty;$$

se $A \subset [-\infty, +\infty]$, allora si indica con $\mathfrak{L}^q(\mu, A) \subset \mathfrak{L}^q(\mu)$ [risp. $L^q(\mu, A) \subset L^q(\mu)$] l'insieme delle [risp. l'insieme delle (classi di equivalenza di)] funzioni $a\colon T \to [-\infty, +\infty]$ di $\mathfrak{L}^q(\mu)$ [risp. $L^q(\mu)$] tali che $a(t) \in A$ per ogni [risp. q.o.] $t \in T$.

0.4 Teorema: Siano $\Psi_n: \boldsymbol{R} \to [-\infty, +\infty]$ funzioni $(n \in \boldsymbol{N})$ tali che $\lim_{x \to +\infty} \Psi_n(x) = +\infty$ per ogni $n \in \boldsymbol{N}$. Allora esiste $\Psi: \boldsymbol{R} \to [0, +\infty[$ funzione tale che

$$\lim_{x \to +\infty} \Psi(x) = +\infty ,$$

per ogni $n \in \boldsymbol{N}$ esista $x_n \in \boldsymbol{R}$ per cui

$$\Psi(x) < \Psi_n(x) \quad \text{se } x > x_n .$$

Dimostrazione: Sia $\Phi: \boldsymbol{R} \to [0, +\infty]$ tale che

$$\Phi(x) = \begin{cases} \sup\left\{b \in \boldsymbol{Z}_+ : \min\left\{\Psi_i(x) : i \in \{0, \dots, b-1\}\right\} > b\right\} & \text{se } \Psi_0(x) > 1 \\ 0 & \text{se } \Psi_0(x) < 1 . \end{cases}$$

Allora, tenendo conto del fatto che

$$\min\left\{\Psi_i(x) : i \in \{0, \dots, n\}\right\} \geq \min\left\{\Psi_i(x) : i \in \{0, \dots, n+1\}\right\}$$

per ogni $x \in \boldsymbol{R}$ e per ogni $n \in \boldsymbol{N}$,

se $k \in \boldsymbol{N}$ e se $x_k \in \boldsymbol{R}$ è tale che

$$\min\left\{\Psi_i(x) : i \in \{0, \dots, k\}\right\} > k+1 \quad \text{per ogni } x > x_k ,$$

risulta che

(0.4.0) $\quad k+1 < \Phi(x) < \Psi_k(x) \quad$ per ogni $x > x_k$,

(0.4.1) $\quad k+1 < \Phi(x) < \Psi_k(x) \quad$ per ogni $x > x_k$ per il quale $\Phi(x) < +\infty$,

ove le ultime diseguaglianze di (0.4.0) e (0.4.1) si possono provare così per ogni $x > x_k$:

se $\Phi(x) < +\infty$ allora

$$\Phi(x) = \max\left\{b \in \boldsymbol{Z}_+ : \min\left\{\Psi_i(x) : i \in \{0, \dots, b-1\}\right\} > b\right\}$$

e pertanto, visto che $\Phi(x) - 1 > k$, si ha

$$\Phi(x) < \min\left\{\Psi_i(x) : i \in \{0, \dots, \Phi(x)-1\}\right\} < \Psi_k(x) ;$$

se $\Phi(x) = +\infty$ allora, dalla definizione di Φ, se $b \in \boldsymbol{Z}_+$, $b > k+1$, risulta

$$b < \min\left\{\Psi_i(x) : i \in \{0, \dots, b-1\}\right\} < \min\left\{\Psi_i(x) : i \in \{0, \dots, k\}\right\} < \Psi_k(x)$$

e pertanto $\Psi_k(x) = +\infty$.

Basta ora considerare $\Psi: \boldsymbol{R} \to [0, +\infty]$ tale che

$$\Psi(x) = \min\{\Phi(x), \vartheta(x)\} \quad \text{per ogni } x \in \boldsymbol{R},$$

ove $\vartheta: \boldsymbol{R} \to [0, +\infty[$ è una funzione tale che $\lim_{x \to +\infty} \vartheta(x) = +\infty$ (ad esempio $\vartheta(x) = |x|$ per ogni $x \in \boldsymbol{R}$).

0.5 Teoremia: Siano $E \subset \boldsymbol{R}$, $\varphi: E \to]-\infty, +\infty]$ funzione e sia

$$\varphi_E: \boldsymbol{R} \to]-\infty, +\infty], \quad \varphi_E(\tau) = \begin{cases} \varphi(\tau) & \text{se } \tau \in E \\ +\infty & \text{se } \tau \in \boldsymbol{R} \setminus E. \end{cases}$$

Allora:

a) se φ è debolmente crescente, risulta che $(\varphi_E)^{**}|_E$ è debolmente crescente;

b) se $\sup E = +\infty$, se φ ammette una minorante affine e se

$$\lim_{\tau \to +\infty} \frac{\varphi(\tau)}{\tau} = +\infty, \tag{0.5.0}$$

risulta che

(0.5.1) esiste $\alpha: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ funzione affine strettamente crescente, $\alpha|_E \leq \varphi$ e

$$\lim_{\tau \to +\infty} \frac{(\varphi_E)^{**}(\tau)}{\tau} = +\infty;$$

c) se $\inf E = -\infty$, se φ ammette una minorante affine e se

$$\lim_{\tau \to -\infty} \frac{\varphi(\tau)}{\tau} = 0, \tag{0.5.2}$$

si ha che

$$\lim_{\tau \to -\infty} \frac{(\varphi_E)^{**}(\tau)}{\tau} = 0;$$

d) se $\inf E = -\infty$, $\sup E = +\infty$, se valgono (0.5.0) e (0.5.2) e se φ è inferiormente limitata sui sottoinsiemi limitati di E, si ha che φ ammette una minorante affine;

e) se E è un intervallo illimitato a destra, se φ è strettamente crescente e se vale (0.5.1), risulta che $(\varphi_E)^{**}|_E$ è strettamente crescente.

Dimostrazione: *a*), *b*) e *c*) Se $\varphi = +\infty$ (cosa che può verificarsi solo per *a*) e per *b*)) la tesi è ovvia. Si supponga allora $\varphi \not\equiv +\infty$. Per [ET] (Cap. I, Definizione 3.2 e Proposizione 4.1), si ha che

$$(\varphi_E)^{**}(\tau) = \sup\{\alpha(\tau): \alpha: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R} \text{ affine}, \alpha|_E \leq \varphi\} \quad \text{per ogni } \tau \in \boldsymbol{R} \tag{0.5.3}$$

e quindi per provare *a*), *b*) e *c*) basta provare che nelle rispettive ipotesi valgono rispettivamente i tre seguenti fatti:

(0.5.4) $\sup\{\alpha(\tau)\colon \alpha\colon \boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$ affine, $\alpha|_E\leq\varphi\} = \sup\{\alpha(\tau)\colon \alpha\colon \boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$ funzione affine e debolmente crescente, $\alpha|_E\leq\varphi\}$ per ogni $\tau\in E$,

(0.5.5) esiste $\gamma_0>0$ tale che per ogni $\delta>\gamma_0$ esista $b_\delta\in\boldsymbol{R}$ per cui

$$\delta\tau+b_\delta\leq\varphi(\tau) \quad \text{per ogni } \tau\in E,$$

(0.5.6) se $\tau_0\in E$ è tale che $\varphi(\tau_0)\in\boldsymbol{R}$ si ha che

$$(\varphi_E)^{**}(\tau)\leq\varphi(\tau_0) \quad \text{per ogni } \tau\in\,]-\infty,\tau_0]$$

e, se $(\varphi_E)^{**}$ non è costante, esiste $\eta_0>0$ tale che per ogni $\delta\in\,]0,\eta_0[$ esista $b_\delta\in\boldsymbol{R}$ per cui

$$\delta\tau+b_\delta\leq\varphi(\tau) \quad \text{per ogni } \tau\in E.$$

Si proverà dapprima che, nelle ipotesi di *a*), vale (0.5.4).

Se $\inf E=-\infty$ e se $\alpha\colon \boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$ è una funzione affine strettamente decrescente, non è vero che $\alpha|_E\leq\varphi$, poichè se $\tau_0\in E$ è tale che $\varphi(\tau_0)<+\infty$ si ha che $\varphi(\tau)<\varphi(\tau_0)$ per ogni $\tau\in\,]-\infty,\tau_0]\cap E$, mentre $\lim_{\tau\to-\infty}\alpha(\tau)=+\infty$. Pertanto in questo caso

$$\{\alpha\colon \boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R} \text{ funzioni affini: } \alpha|_E\leq\varphi\} =$$

$$=\{\alpha\colon \boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R} \text{ funzioni affini e debolmente crescenti: } \alpha|_E\leq\varphi\}$$

e quindi vale (0.5.4).

Se invece $\inf E>-\infty$ e se $\alpha\colon \boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$ è una funzione affine strettamente decrescente tale che $\alpha|_E\leq\varphi$, allora basta considerare $\alpha_0\colon \tau\in\boldsymbol{R}\mapsto\sup_E\alpha$; si ha infatti che α_0 è una funzione affine e debolmente crescente,

$$\alpha_0|_E\geq\alpha|_E \quad \text{e} \quad \alpha_0|_E\leq\varphi$$

(quest'ultimo fatto si ottiene tenendo conto della debole crescenza di φ).

Dunque anche in questo caso vale (0.5.4).

Se ora valgono le ipotesi di *b*), da (0.5.0) segue che per ogni $\delta>0$ esiste $\tau_\delta\in E\cap[0,+\infty[$ tale che

$$\varphi(\tau)>\delta\tau \quad \text{per ogni } \tau\in E\cap[\tau_\delta,+\infty[$$

e, se $\lambda,\mu\in\boldsymbol{R}$ sono tali che

$$\lambda\tau+\mu\leq\varphi(\tau) \quad \text{per ogni} \quad \tau\in E,$$

basta considerare $\gamma_0 > \lambda \vee 0$, $b_\delta = ((\lambda - \delta)\tau_\delta + \mu) \wedge 0$ $(\delta > \gamma_0)$ per verificare (0.5.5): infatti se $\delta > \gamma_0$ e se $\tau \in E \cap [\tau_\delta, +\infty[$ si ha che

$$\delta\tau + b_\delta \leq \delta\tau < \varphi(\tau)$$

e se $\tau \in E \cap]-\infty, \tau_\delta[$, tenendo conto che

$$\delta\tau_\delta + b_\delta < \delta\tau_\delta + (\lambda - \delta)\tau_\delta + \mu = \lambda\tau_\delta + \mu \text{ e che } \delta > \lambda,$$

si ha che

$$\delta\tau + b_\delta < \lambda\tau + \mu \leq \varphi(\tau).$$

Valgano le ipotesi di *c*); da (0.5.2) segue che per ogni $\delta > 0$ esiste $\tau_\delta \in E \cap$ $\cap\,]-\infty, 0]$ tale che

$$\varphi(\tau) > \delta\tau \quad \text{per ogni } \tau \in E \cap]-\infty, \tau_\delta]$$

e, se $\lambda, \mu \in \boldsymbol{R}$ sono tali che

$$\lambda\tau + \mu \leq \varphi(\tau) \quad \text{per ogni } \tau \in E,$$

per (0.5.2) si ottiene che $\lambda \geq 0$; pertanto, se $\tau_0 \in E$ è tale che $\varphi(\tau_0) \in \boldsymbol{R}$ e se $\alpha\colon \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ è una funzione affine, $\alpha|_E \leq \varphi$, risulta che

$$\alpha(\tau) < \alpha(\tau_0) \leq \varphi(\tau_0) \quad \text{per ogni } \tau \in]-\infty, \tau_0]$$

e quindi da (0.5.3) si deduce che

$$(\varphi_E)^{**}(\tau) \leq \varphi(\tau_0) \quad \text{per ogni } \tau \in]-\infty, \tau_0]$$

ed è così soddisfatta la prima parte di (0.5.6). Ora, se $(\varphi_E)^{**}$ non è costante, esiste una minorante affine strettamente crescente per φ; siano allora in tal caso $\lambda_0, \mu_0 \in \boldsymbol{R}$, con $\lambda_0 > 0$, tali che

$$\lambda_0\tau + \mu_0 \leq \varphi(\tau) \quad \text{per ogni } \tau \in E;$$

considerando $\eta_0 = \lambda_0$, $b_\delta = ((\lambda_0 - \delta)\tau_\delta + \mu_0) \wedge 0$ $(0 < \delta < \eta_0)$, è verificata anche la seconda parte di (0.5.6), visto che se $0 < \delta < \eta_0$ e se $\tau \in E \cap]-\infty, \tau_\delta[$ si ha che

$$\delta\tau + b_\delta \leq \delta\tau < \varphi(\tau)$$

e se $\tau \in E \cap [\tau_\delta, +\infty[$, tenendo conto che

$$\delta\tau_\delta + b_\delta < \delta\tau_\delta + (\lambda_0 - \delta)\tau_\delta + \mu_0 = \lambda_0\tau_\delta + \mu_0 \text{ e che } \delta < \lambda_0,$$

si ha che

$$\delta\tau + b_\delta < \lambda_0\tau + \mu_0 \leq \varphi(\tau).$$

d) Basta tener conto del fatto che da (0.5.0) e da (0.5.2) segue l'esistenza di $\tau_1 \in E \cap]-\infty, 0]$ e di $\tau_2 \in E \cap [0, +\infty[$ tali che

$$\varphi(\tau) > \tau \quad \text{per ogni } \tau \in E \cap (]-\infty, \tau_1] \cup [\tau_2, +\infty[)$$

e allora

$$\tau + \left(\left(\inf_{s \in [\tau_1, \tau_2]} \varphi - \tau_2 \right) \wedge 0 \right) \leq \varphi(\tau) \quad \text{per ogni } \tau \in E .$$

e) Per *a*) risulta che $(\varphi_E)^{**}|_E$ è debolmente crescente. Tenendo anche conto della convessità di $(\varphi_E)^{**}$, se per assurdo esistono $\tau_1, \tau_2 \in E$, $\tau_1 \neq \tau_2$ tali che $(\varphi_E)^{**}(\tau_1) = (\varphi_E)^{**}(\tau_2)$, risulta che esiste E_0 intervallo, $E_0 \subset E$ tale che $\mathring{E}_0 \neq 0$, $\inf E_0 = \inf E$, $\inf E \in E_0$ se $\inf E \in E$, $(\varphi_E)^{**}(\tau) = (\varphi_E)^{**}(\tau_1)$ per ogni $\tau \in E_0$. Sia ora $\tau_0 \in \mathring{E}_0$; allora $\varphi(\tau_0) > (\varphi_E)^{**}(\tau_1)$ per la stretta crescenza di φ; inoltre, se α è come in (0.5.1), per (0.5.3) si ha che

$$\alpha(\tau_0) \leq (\varphi_E)^{**}(\tau_0) = (\varphi_E)^{**}(\tau_1)$$

e pertanto esiste $\sigma_0 > \tau_0$ tale che $\alpha(\sigma_0) = \varphi(\tau_0)$; si consideri ora $\alpha_0 : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ affine tale che

$$\alpha_0(\tau_0) = (\varphi_E)^{**}(\tau_1), \qquad \alpha_0(\tau_0) < \alpha_0(\sigma_0) < \alpha(\sigma_0) = \varphi(\tau_0) .$$

Allora $\alpha_0|_{[\sigma_0, +\infty[} \leq \alpha|_{[\sigma_0, +\infty[}$, α_0 è strettamente crescente e quindi

$$\alpha_0|_{[\sigma_0, +\infty[} \leq \varphi , \qquad \alpha_0|_{[\tau_0, \sigma_0]} < \alpha_0(\sigma_0) < \varphi(\tau_0) \leq \varphi|_{[\tau_0, \sigma_0]} ,$$

$$\alpha_0|_{E \cap]-\infty, \tau_0]} \leq \alpha_0(\tau_0) = (\varphi_E)^{**}(\tau_1) \leq (\varphi_E)^{**}|_E \leq \varphi .$$

Pertanto $\alpha_0 \leq \varphi$; ma d'altra parte

$$\alpha_0|_{[\tau_0, \sup E]} > (\varphi_E)^{**}|_{[\tau_0, \sup E]} ,$$

il che è assurdo.

0.6 Osservazione: Colgo l'occasione per correggere l'enunciato del Teorema 4.8 di [BA1] (che sarà utilizzato nell'Osservazione 1.7 *a*) del presente lavoro), che appare senza l'ipotesi di pseudo-metrizzabilità sullo spazio (Z, ζ). Il fatto che tale ipotesi non fosse sopprimibile era già stato fatto osservare in [BA1] attraverso il successivo esempio 4.9 *a*); tuttavia successivamente mi sono accorta che essa poteva essere abbondantemente rilassata in modo da permettere ad esempio a Z di essere uno spazio di Banach su $\boldsymbol{R}$ con duale Z' separabile ed a ζ di essere la topologia $\sigma(Z)$; fornisco pertanto nei prossimi numeri i dettagli di tale estensione.

Rileggendo la dimostrazione del Teorema 4.8 di [BA1] si può osservare che l'ipotesi su (Z, ζ) viene utilizzata soltanto per provare che:

(0.6.0) se $\varphi_n: T \to Z$ sono applicazioni $\mathfrak{L}$-misurabili $(n \in N)$,
se $\varphi: T \to Z$ è un'applicazione tale che
$\lim_{n \to \infty} \varphi_n(t) = \varphi(t)$ in ζ per ogni $t \in T$,
allora anche φ è $\mathfrak{L}$-misurabile
(per ogni insieme T e per ogni σ-algebra $\mathfrak{L}$ su T).

0.7 Teorema: Sia (Z, ζ) uno spazio topologico tale che

(0.7.0) per ogni $A \in \zeta$ esistano $B_k \in \mathfrak{B}(\zeta)$ $(k \in N)$ tali che

$$\bigcup_{k \in N} B_k^{\mathfrak{s}\zeta} = A, \quad \overline{B_k}^{\mathfrak{s}\zeta} \subset A \quad (k \in N);$$

allora (Z, ζ) verifica la condizione (0.6.0).

Dimostrazione: Siano $\mathfrak{L}$ σ-algebra su T, $\varphi_n: T \to Z$ $(n \in N)$ applicazioni $\mathfrak{L}$-misurabili e sia $\varphi(t) = \lim_{n \to \infty} \varphi_n(t)$ in ζ per ogni $t \in T$. Sia $A \in \zeta$. Allora risulta che:

$$\{t \in T: \varphi(t) \in A\} = \bigcup_{k \in N} \bigcup_{h \in N} \bigcap_{\substack{n \in N \\ n > h}} \{t \in T: \varphi_n(t) \in B_k\} \in \mathfrak{L},$$

ove l'uguaglianza si può dimostrare nel seguente modo: se $t \in T$ è tale che $\varphi(t) \in A$ allora per (0.7.0) esiste $k \in N$ tale che $\varphi(t) \in B_k^{\mathfrak{s}\zeta}$ e d'altra parte, essendo $\varphi(t)$ il limite in ζ della successione $(\varphi_n(t))_{n \in N}$, risulta che $\varphi(t)$ è il limite anche in $\mathfrak{s}\zeta$ della successione $(\varphi_n(t))_{n \in N}$ e pertanto esiste $h \in N$ tale che per $n \in N$, $n > h$ si abbia $\varphi_n(t) \in B_k^{\mathfrak{s}\zeta} \subset B_k$; viceversa se $t \in T$ è tale che esistano $k, h \in N$ tali che $\varphi_n(t) \in B_k$ per ogni $n \in N$, $n > h$ allora $\varphi(t) = \lim_{n \to \infty} \varphi_n(t) \in \overline{B_k}^{\mathfrak{s}\zeta} \subset A$ (per (0.7.0)).

0.8 Osservazione: Si noti che la condizione (0.7.0) per uno spazio topologico (Z, ζ) è implicata dalla seguente più semplice condizione:

(0.8.0) per ogni $A \in \zeta$ esistano $A_k \in \zeta$ $(k \in N)$ tali che

$$\bigcup_{k \in N} A_k = A \quad \text{e con } \overline{A_k}^{\mathfrak{s}\zeta} \subset A \quad (k \in N)$$

(infatti per verificare (0.7.0) basta considerare $B_k = A_k$ $(k \in N)$ e tenere conto che, essendo $\mathfrak{s}\zeta \supset \zeta$, risulta $B_k \in \mathfrak{s}\zeta$, $B_k \in \zeta \subset \mathfrak{B}(\zeta)$, $\overline{B_k}^{\mathfrak{s}\zeta} \subset \overline{B_k}^{\zeta} = \overline{A_k}^{\zeta} \subset A$ per ogni $k \in N$).

D'altra parte è facile verificare che, se (Z, ζ) è uno spazio topologico pseudo-metrizzabile, allora (Z, ζ) verifica (0.8.0) (e quindi anche (0.7.0)) e

che esistono spazi topologici (Z, ζ) che verificano (0.8.0), ma che non sono pseudo-metrizzabili.

Infatti se (Z, ζ) è uno spazio topologico, se d è una pseudo-distanza che induce la topologia ζ e se $\mathcal{A} \in \zeta$ basta considerare

$$\mathcal{A}_k = \left\{ z \in \mathcal{A} : d(z, Z \setminus \mathcal{A}) > \frac{1}{k+1} \right\} \quad \text{per ogni } k \in \boldsymbol{N}.$$

Viceversa basta considerare il seguente spazio topologico (Z, ζ):

$$Z = \{ f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R} \text{ funzioni} \},$$

$$\zeta = \Big\{ \{ f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R} : f(x_i) \in U_i \text{ per ogni } i \in \{1, \dots, n\} \} :$$

$$n \in \boldsymbol{Z}_+,\ x_1, \dots, x_n \in \boldsymbol{R},\ U_1, \dots, U_n \text{ aperti euclidei di } \boldsymbol{R} \Big\};$$

(Z, ζ) non è pseudo-metrizzabile in quanto non è a base numerabile di intorni. D'altra parte si proverà ora che (Z, ζ) verifica la condizione (0.8.0). Sia $\mathcal{A} \in \zeta$; allora esistono $n \in \boldsymbol{Z}_+$, $x_1, \dots, x_n \in \boldsymbol{R}$, $U_1, \dots, U_n$ aperti euclidei di $\boldsymbol{R}$ tali che $\mathcal{A} = \{ f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R} : f(x_i) \in U_i \text{ per ogni } i \in \{1, \dots, n\} \}$; sia d la distanza euclidea in $\boldsymbol{R}$, sia $U_{i,k} = \{ x \in U_i : d(x, \boldsymbol{R} \setminus U_i) > 1/(k+1) \}$ per ogni $i \in \{1, \dots, n\}$, $k \in \boldsymbol{N}$ e sia $\mathcal{A}_k = \{ f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R} : f(x_i) \in U_{i,k} \text{ per ogni } i \in \{1, \dots, n\} \}$ per ogni $k \in \boldsymbol{N}$. Risulta quindi che $\mathcal{A}_k \in \zeta$ per ogni $k \in \boldsymbol{N}$; inoltre $\bigcup_{k \in \boldsymbol{N}} \mathcal{A}_k = \mathcal{A}$: sia infatti $f \in \mathcal{A}$, allora esistono $k_1, \dots, k_n \in \boldsymbol{N}$ tali che $f(x_i) \in U_{i,k}$ se $k \geq k_i$ $(i \in \{1, \dots, n\})$ e pertanto $f \in \mathcal{A}_{\max\{k_1, \dots, k_n\}}$; infine per ogni $k \in \boldsymbol{N}$ si ha che $\overline{\mathcal{A}_k} \subset \mathcal{A}$ visto che

$$\{ f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R} : f(x_i) \in \overline{U_{i,k}} \text{ per ogni } i \in \{1, \dots, n\} \} =$$

$$= \bigcap_{i=1}^{n} \{ f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R} : f(x_i) \in \overline{U_{i,k}} \} = \bigcap_{i=1}^{n} (Z \setminus \{ f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R} : f(x_i) \in (\boldsymbol{R} \setminus U_{i,k})^{\circ} \})$$

è un chiuso di ζ contenente $\mathcal{A}_k$ e contenuto in $\mathcal{A}$.

0.9 Teorema: Sia (Z, ζ) uno spazio topologico tale che esistano $Z_M \in \mathcal{B}(\zeta)$, Z_M sequenzialmente chiuso in ζ $(M \in \boldsymbol{N})$ per cui $\bigcup_{M \in \boldsymbol{N}} Z_M = Z$ e per ogni ζ_n, $z \in Z$ $(n \in \boldsymbol{N})$ con $\zeta_n \to z$ esistano $M \in \boldsymbol{N}$ e $n_M \in \boldsymbol{N}$ tali che per $n \geq n_M$ sia $\zeta_n \in Z_M$; inoltre per ogni $M \in \boldsymbol{N}$ lo spazio topologico $(Z_M, \zeta|_{Z_M})$ verifichi la condizione (0.6.0). Allora (Z, ζ) verifica la condizione (0.6.0).

Dimostrazione: Siano $\mathfrak{C}$ σ-algebra su T, $\zeta_n : T \to Z$ $(n \in \boldsymbol{N})$ applicazioni $\mathfrak{C}$-misurabili e sia $\zeta(t) = \lim_{n \to \infty} \zeta_n(t)$ in ζ per ogni $t \in T$. Per ogni $M \in \boldsymbol{N}$ sia

$$T_M = \{ t \in T : \text{esista } k_M(t) \in \boldsymbol{N} \text{ per cui } \zeta_n(t) \in Z_M \text{ per ogni } n \geq k_M(t) \},$$

Allora

$$\bigcup_{M\in N} T_M = T \quad \text{e} \quad T_M = \bigcup_{k\in N} \bigcap_{\substack{n\in N \\ n\geq k}} \{t\in T: \xi_n(t)\in Z_M\} \in \mathfrak{L} \text{ per ogni } M\in N.$$

Inoltre $\xi(t)\in Z_M$ per ogni $t\in T_M$, poichè Z_M è sequenzialmente chiuso in ζ $(M\in N)$.

Si mostrerà ora che

(0.9.0) ξ_{T_M,Z_M} è $\mathfrak{L}|_{T_M}$-misurabile (rispetto alla topologia $\zeta|_{Z_M}$ su Z_M) per ogni $M\in N$ e per ogni $k\in N$,

ove $T_{M,k} = \bigcap_{\substack{n\in N \\ n\geq k}} \{t\in T: \xi_n(t)\in Z_M\} \in \mathfrak{L}$ $(M, k\in N)$.

Siano M, $k\in N$. Allora, se $t\in T_{M,k}$, si ha che $\xi_{m+k}(t)\in Z_M$ per ogni $m\in N$ e $\xi(t) = \lim_{m\to\infty} \xi_{m+k}(t)$ in $\zeta|_{Z_M}$. Pertanto (0.9.0) segue dal fatto che $(Z_M, \zeta|_{Z_M})$ verifica (0.6.0) e dalla $\mathfrak{L}|_{T_{M,k}}$-misurabilità di $(\xi_{m+k})_{T_{M,k},Z_M}$ $(m\in N)$ (rispetto alla topologia $\zeta|_{Z_M}$ su Z_M) (quest'ultima si può provare nel seguente modo: se $A\in\zeta|_{Z_M}$ allora esiste $A'\in\zeta$ tale che $A = A'\cap Z_M$ e quindi

$$\left((\xi_{m+k})_{T_{M,k},Z_M}\right)^{-1}(A) = \xi_{m+k}^{-1}(A')\cap T_{M,k}\in\mathfrak{L} \quad (m\in N)\Big).$$

Sia ora $A\in\zeta$. Allora, tenendo conto del fatto che $\bigcup_{M,k\in N} T_{M,k} = T$, si ha che

$$\xi^{-1}(A) = \bigcup_{M,k\in N} (\xi^{-1}(A)\cap T_{M,k}) = \bigcup_{M,k\in N} (\xi^{-1}(A\cap Z_M)\cap T_{M,k}) \in \mathfrak{L},$$

ove l'appartenenza a $\mathfrak{L}$ dell'ultimo membro segue da (0.9.0), essendo $A\cap Z_M\in$ $\in\zeta|_{Z_M}$ per ogni $M\in N$.

0.10 Teorema: Sia (Z,ζ) uno spazio topologico tale che $(A,\zeta|_A)$ sia spazio di Lindelöf per ogni $A\in\zeta$ (cfr. [K], Cap. I, Definizione subito dopo il Teorema 15) e tale che esistano J insieme, (Z_j,ζ_j) spazi topologici che verificano la condizione (0.6.0) $(j\in J)$ e $\vartheta_j: Z\to Z_j$ applicazioni tali che ζ sia la topologia iniziale delle topologie ζ_j rispetto alle ϑ_j $(j\in J)$ (cfr. [Bo], Cap. I, § 2, Proposizione 4). Allora (Z,ζ) verifica la condizione (0.6.0).

Dimostrazione: Siano $\mathfrak{L}$ σ-algebra su T, $\xi_n: T\to Z$ $(n\in N)$ applicazioni $\mathfrak{L}$-misurabili e sia $\xi(t) = \lim_{n\to\infty} \xi_n(t)$ in ζ per ogni $t\in T$. Allora, essendo ϑ_j continue $(j\in J)$, risulta che $\vartheta_j\circ\xi_n$ sono $\mathfrak{L}$-misurabili per ogni $n\in N$, $j\in J$ e d'altra parte $(\vartheta_j\circ\xi)(t) = \lim_{n\to\infty} (\vartheta_j\circ\xi_n)(t)$ in ζ_j per ogni $t\in T$ $(j\in J)$; quindi $\vartheta_j\circ\xi$ è $\mathfrak{L}$-misurabile per ogni $j\in J$. Sia ora $A\in\zeta$. Allora, poichè ζ è la topologia iniziale delle topologie ζ_j rispetto alle ϑ_j $(j\in J)$, A è unione di aperti della se-

guente classe

$$\mathcal{A}=\left\{\bigcap_{i=0}^{k}\theta_{j_i}^{-1}(A_{j_i}):\ k\in\boldsymbol{N},\ j_i\in J,\ A_{j_i}\in\zeta_{j_i}\ (i=0,\dots,k)\right\}$$

ed, essendo $(A,\zeta|_A)$ spazio di Lindelöf, esistono $\mathcal{A}_m\in\mathcal{A}$ $(m\in\boldsymbol{N})$ tali che $A=\bigcup_{m\in N}\mathcal{A}_m$. Pertanto

$$\xi^{-1}(A)=\xi^{-1}\left(\bigcup_{m\in N}\mathcal{A}_m\right)=\bigcup_{m\in N}\xi^{-1}(\mathcal{A}_m)$$

e quindi per concludere basta provare che $\xi^{-1}(B)\in\mathfrak{L}$ per ogni $B\in\mathcal{A}$. Siano allora $k\in\boldsymbol{N}$, $j_i\in J$, $A_{j_i}\in\zeta_{j_i}$ $(i=0,\dots,k)$; risulta che

$$\xi^{-1}\left(\bigcap_{i=0}^{k}\theta_{j_i}^{-1}(A_{j_i})\right)=\bigcap_{i=0}^{k}\xi^{-1}(\theta_{j_i}^{-1}(A_{j_i}))=\bigcap_{i=0}^{k}(\theta_{j_i}\circ\xi)^{-1}(A_{j_i})\in\mathfrak{L}$$

e si conclude.

0.11 Osservazione: Oltre a quanto già notato nell'Osservazione 0.8, si può osservare che: esistono spazi (Z,ζ) topologici T_2 e non metrizzabili che verificano le ipotesi del Teorema 0.9; tali ipotesi sono verificate infatti da spazi (Z,ζ) per cui è già noto che vale la condizione (0.6.0), come ad esempio da spazi $(Z,w(Z))$ (Z spazio di Banach su $\boldsymbol{R}$ con Z' separabile, Z di dimensione infinita) (cfr. [BA2], Teorema 2.1), che sono T_2 e non sono metrizzabili.

È intanto ovvio che, se Z è uno spazio di Banach su $\boldsymbol{R}$ con Z' separabile, risulta $Z=\bigcup_{M\in N}\overline{S_s(0,M)}$, $\overline{S_s(0,M)}\in\mathfrak{B}(s(Z))=\mathfrak{B}(w(Z))$ (ove l'uguaglianza segue da a) del Teorema 1.0 di [BA2]), $\overline{S_s(0,M)}$ è chiuso in $w(Z)$ essendo chiuso in $s(Z)$ e convesso e quindi è anche sequenzialmente chiuso in $w(Z)$ e infine $(\overline{S_s(0,M)},w(Z)|_{\overline{S_s(0,M)}})$ è metrizzabile essendo Z' separabile $(M\in\boldsymbol{N})$ e quindi $(Z,w(Z))$ verifica le ipotesi del Teorema 0.9. D'altra parte, se Z è di dimensione infinita, $(Z,w(Z))$ non è metrizzabile, in quanto non è a base numerabile di intorni: infatti gli intorni di 0 in $w(Z)$ sono tutti non limitati per [R] (Cap. III, § 11) e pertanto, se si considerano $\mathfrak{U}=\{U$ intorni aperti di 0 in $w(Z)\}$, $\mathfrak{U}\times\boldsymbol{N}$ l'insieme diretto con l'ordinamento $(U,n)\geq(V,m)$ se $U\subset V$ e $n\geq m$, per ogni $(U,n)\in\mathfrak{U}\times\boldsymbol{N}$ esiste $z_{(U,n)}\in(Z\setminus\overline{S_s(0,n)})\cap U$ e risulta che

$$\lim_{(U,n)\in\mathfrak{U}\times N}z_{(U,n)}=0\ \text{ in } w(Z),\qquad \lim_{(U,n)\in\mathfrak{U}\times N}|z_{(U,n)}|_s=+\infty$$

per cui non esiste alcuna successione estratta da $(z_{(U,n)})_{(U,n)\in\mathfrak{U}\times N}$, mentre se $(Z,w(Z))$ fosse a base numerabile di intorni una tale estratta dovrebbe esistere.

§ 1. - Maggiorazioni funzionali

1.0 Definizioni: Siano Z insieme, $\mathcal{R} \subset 2^Z$, $A \subset \mathfrak{G}(Z)$.

a) Si definisce

$$M(\mathcal{R}, Z, A) = \{(g, b) \in \mathfrak{G}(Z) \times \mathfrak{K}(Z) : \text{esista } Z_0 \subset Z \text{ con } Z \setminus Z_0 \in \mathcal{R}$$
$$\text{e per ogni } \varepsilon > 0 \text{ esista } a_\varepsilon \in A \text{ per cui}$$
$$b(\xi) < a_\varepsilon(\xi) + \varepsilon g(\xi) \text{ per ogni } \xi \in D_b \cap D_g \cap D_{a_\varepsilon} \cap Z_0\}.$$

Si noti che se $\bar{A} = \{b \in \mathfrak{G}(Z) : \text{esista } a_b \in A \text{ per cui } D_{a_b} \subset D_b,\ b(\xi) < a_b(\xi) \text{ per ogni } \xi \in D_{a_b}\}$, risulta che

$$M(\mathcal{R}, Z, A) = M(\mathcal{R}, Z, \bar{A})$$

(cfr. anche Osservazione 1.3 *f*)).

b) Se $\mathcal{M} \subset M(\mathcal{R}, Z, A)$, si dice che gli elementi di $\mathcal{M}$ equiappartengono a $M(\mathcal{R}, Z, A)$ se esiste $Z_0 \subset Z$ con $Z \setminus Z_0 \in \mathcal{R}$ tale che per ogni $(g, b) \in \mathcal{M}$ e per ogni $\varepsilon > 0$ esista $a_{\varepsilon,(g,b)} \in A$ per cui si abbia

$$b(\xi) < a_{\varepsilon,(g,b)}(\xi) + \varepsilon g(\xi) \quad \text{per ogni } \xi \in D_b \cap D_g \cap D_{a_{\varepsilon,(g,b)}} \cap Z_0.$$

Si noti che gli elementi di $\mathcal{M}$ equiappartengono a $M(\mathcal{R}, Z, A)$ se e solo se equiappartengono a $M(\mathcal{R}, Z, \bar{A})$ (ove $\bar{A}$ è come in *a*)).

1.1 Osservazioni: Siano Z, $\mathcal{R}$, A come nelle Definizioni 1.0. Siano

$$M_s(\mathcal{R}, Z, A) = \{(g, b) \in \mathfrak{G}(Z) \times \mathfrak{K}(Z) :$$
$$\text{per ogni } \varepsilon > 0 \text{ esistano } b_\varepsilon \in A \text{ e } Z_\varepsilon \subset Z \text{ per cui } Z \setminus Z_\varepsilon \in \mathcal{R} \text{ e}$$
$$b(\xi) < b_\varepsilon(\xi) + \varepsilon g(\xi) \text{ per ogni } \xi \in D_b \cap D_g \cap D_{b_\varepsilon} \cap Z_\varepsilon\};$$

$$M(Z, A) = \{(g, b) \in \mathfrak{G}(Z) \times \mathfrak{K}(Z) :$$
$$\text{per ogni } \varepsilon > 0 \text{ esista } c_\varepsilon \in A \text{ per cui}$$
$$b(\xi) < c_\varepsilon(\xi) + \varepsilon g(\xi) \text{ per ogni } \xi \in D_b \cap D_g \cap D_{c_\varepsilon}\}.$$

Allora:

a) Si ha:

$$M(\mathcal{R}, Z, A) \subset M_s(\mathcal{R}, Z, A)$$

e, se $\mathcal{R} \neq \emptyset$, si ha anche che:

$$M(Z, \mathcal{A}) \subset M(\mathcal{R}, Z, \mathcal{A}).$$

b) $M(Z, \mathcal{A}) = M(\{\emptyset\}, Z, \mathcal{A}) = M_a(\{\emptyset\}, Z, \mathcal{A})$.

c) Se $\mathcal{R}$ è un anello di sottoinsiemi di Z, esiste $B_{\mathcal{R},\mathcal{A}} \subset \mathfrak{P}(Z)$ tale che

$$M(Z, \mathcal{B}_{\mathcal{R},\mathcal{A}}) = M_a(\mathcal{R}, Z, \mathcal{A}) = M_a(\mathcal{R}, Z, \mathcal{B}_{\mathcal{R},\mathcal{A}})$$

e quindi da *a*) segue anche che:

$$M(Z, \mathcal{B}_{\mathcal{R},\mathcal{A}}) = M(\mathcal{R}, Z, \mathcal{B}_{\mathcal{R},\mathcal{A}}) = M_a(\mathcal{R}, Z, \mathcal{B}_{\mathcal{R},\mathcal{A}}).$$

d) Se $\mathcal{R}$ è un σ-anello e se

(1.1.0) $$a \vee b \in \bar{\mathcal{A}} \quad \text{per ogni } a, b \in A,$$

risulta che

$$M(\mathcal{R}, Z, \mathcal{A}) = M_a(\mathcal{R}, Z, \mathcal{A});$$

inoltre, anche se non vale (1.1.0), ogni (g, b) appartenente a $M_a(\mathcal{R}, Z, \mathcal{A})$ con g di segno costante appartiene anche a $M(\mathcal{R}, Z, \mathcal{A})$.

e) Anche se $\mathcal{R}$ è un σ-anello, può accadere che si abbia

$$M(\mathcal{R}, Z, \mathcal{A}) \subsetneq M_a(\mathcal{R}, Z, \mathcal{A}).$$

f) Anche se $\mathcal{R}$ è un σ-anello, può non esistere $\mathcal{B} \subset \mathfrak{P}(Z)$ tale che

$$M(Z, \mathcal{B}) = M(\mathcal{R}, Z, \mathcal{A}).$$

g) Se $\emptyset \in \mathcal{R}$, se $M(Z, \mathcal{A}) = M(\mathcal{R}, Z, \mathcal{A})$ e se $\mathcal{M} \subset M(\mathcal{R}, Z, \mathcal{A})$ allora gli elementi di $\mathcal{M}$ equiappartengono a $M(\mathcal{R}, Z, \mathcal{A})$.

Pertanto con la scelta della classe della Definizione 1.0 *a*) è possibile facilmente trasformare i risultati che si daranno per tale classe negli analoghi relativi alle due classi definite in questo numero (cfr. anche [BA6] (n. 1.4)).

Le verifiche di *a*) e di *b*) sono ovvie.

c) Considerando $\mathcal{B}_{\mathcal{R},\mathcal{A}} = \{b \in \mathfrak{P}(Z)$: esistano $Z_b \subset Z$ e $a_b \in A$ con $Z \setminus Z_b \in \mathcal{R}$ e $D_b = D_{a_b} \cap Z_b$, $a_b|_{D_b} = b\}$, risulta che:

$$M(Z, \mathcal{B}_{\mathcal{R},\mathcal{A}}) \subset M_a(\mathcal{R}, Z, \mathcal{A}) \subset M_a(\mathcal{R}, Z, \mathcal{B}_{\mathcal{R},\mathcal{A}}) \subset M(Z, \mathcal{B}_{\mathcal{R},\mathcal{A}});$$

infatti sia dapprima $(g, b) \in M(Z, \mathcal{B}_{\mathcal{R},\mathcal{A}})$, allora per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\varepsilon_\varepsilon \in \mathcal{B}_{\mathcal{R},\mathcal{A}}$

tale che

$$b(x) < c_\varepsilon(x) + \varepsilon g(x) \quad \text{per ogni } x \in D_b \cap D_g \cap D_{c_\varepsilon}$$

e, visto che $c_\varepsilon \in \mathcal{B}_{\mathcal{R},A}$, esistono $Z_\varepsilon \subset Z$ e $b_\varepsilon \in A$ con $Z \setminus Z_\varepsilon \in \mathcal{R}$ e $D_{c_\varepsilon} = D_{b_\varepsilon} \cap Z_\varepsilon$, $b_\varepsilon|_{D_{b_\varepsilon}} = c_\varepsilon$, per cui

$$b(x) < b_\varepsilon(x) + \varepsilon g(x) \quad \text{per ogni } x \in D_b \cap D_g \cap D_{b_\varepsilon} \cap Z_\varepsilon$$

e quindi $(g, b) \in M_d(\mathcal{R}, Z, A)$; la seconda inclusione segue facilmente, osservando che $A \subset \mathcal{B}_{\mathcal{R},A}$; infine sia $(g, b) \in M_d(\mathcal{R}, Z, \mathcal{B}_{\mathcal{R},A})$, allora per ogni $\varepsilon > 0$ esistono $b_\varepsilon \in \mathcal{B}_{\mathcal{R},A}$ e $Z_\varepsilon \subset Z$ con $Z \setminus Z_\varepsilon \in \mathcal{R}$ tali che

$$b(x) < b_\varepsilon(x) + \varepsilon g(x) \quad \text{per ogni } x \in D_b \cap D_g \cap D_{b_\varepsilon} \cap Z_\varepsilon$$

e, visto che $b_\varepsilon \in \mathcal{B}_{\mathcal{R},A}$, esistono $W_\varepsilon \subset Z$ ed $a_\varepsilon \in A$ con $Z \setminus W_\varepsilon \in \mathcal{R}$ e $D_{b_\varepsilon} = D_{a_\varepsilon} \cap W_\varepsilon$, $a_\varepsilon|_{D_{b_\varepsilon}} = b_\varepsilon$ e quindi $Z \setminus (Z_\varepsilon \cap W_\varepsilon) \in \mathcal{R}$ e se si considera $c_\varepsilon = a_\varepsilon|_{D_{a_\varepsilon} \cap (Z_\varepsilon \cap W_\varepsilon)}$ si ha che

$$c_\varepsilon \in \mathcal{B}_{\mathcal{R},A} \quad \text{e} \quad D_{c_\varepsilon} = D_{a_\varepsilon} \cap (Z_\varepsilon \cap W_\varepsilon) = D_{b_\varepsilon} \cap Z_\varepsilon,$$

per cui

$$b(x) < c_\varepsilon(x) + \varepsilon g(x) \quad \text{per ogni } x \in D_b \cap D_g \cap D_{c_\varepsilon}$$

e cioè $(g, b) \in M(Z, \mathcal{B}_{\mathcal{R},A})$.

d) L'inclusione del primo membro nel secondo si ottiene considerando $Z_\varepsilon = Z_0$ per ogni $\varepsilon > 0$ (ove Z_0 è come nella Definizione 1.0 *a*)); viceversa sia $(g, b) \in M_d(\mathcal{R}, Z, A)$, basta allora considerare $Z_0 = \bigcap_{n \in \mathbf{Z}_+} (Z_{1/n} \cap Z_n)$ e per ogni $\varepsilon > 0$ un $n_\varepsilon \in \mathbf{Z}_+$ tale che $1/n_\varepsilon < \varepsilon < n_\varepsilon$ e una funzione $a_\varepsilon \in A$ tale che

$$D_{a_\varepsilon} \subset D_{b_{1/n_\varepsilon} \vee b_{n_\varepsilon}} = D_{b_{1/n_\varepsilon}} \cap D_{b_{n_\varepsilon}}, \quad (b_{1/n_\varepsilon} \vee b_{n_\varepsilon})|_{D_{a_\varepsilon}} < a_\varepsilon$$

(se g è non negativa $Z_0 = \bigcap_{n \in \mathbf{Z}_+} Z_{1/n}$, per ogni $\varepsilon > 0$ un $n_\varepsilon \in \mathbf{Z}_+$ tale che $1/n_\varepsilon < \varepsilon$ e $a_\varepsilon = b_{1/n_\varepsilon}$; se g è non positiva $Z_0 = \bigcap_{n \in \mathbf{Z}_+} Z_{-n}$, per ogni $\varepsilon > 0$ un $n_\varepsilon \in \mathbf{Z}_+$ tale che $\varepsilon < n_\varepsilon$ e $a_\varepsilon = b_{-n_\varepsilon}$) (ove $Z_{1/n}$, Z_{-n}, $b_{1/n}$, b_n $(n \in \mathbf{Z}_+)$ sono relativi all'appartenenza di (g, b) a $M_d(\mathcal{R}, Z, A)$).

e) Basta considerare $Z = \boldsymbol{R}$, μ la misura di Lebesgue su $\boldsymbol{R}$,

$$\mathcal{R} = \{N \in \mathfrak{L}(\boldsymbol{R}) : \mu(N) = 0\}, \quad d_\varepsilon : \boldsymbol{R} \to [0, +\infty[, \quad d_\varepsilon(x) = (-\varepsilon - 1)x \text{ se } x < 0,$$

$$d_\varepsilon(x) = (1 - \varepsilon)x \text{ se } x > 0, \quad x \neq \varepsilon, \quad d_\varepsilon(\varepsilon) = 0 \ (0 < \varepsilon < 1),$$

$$d_0 : [0, +\infty[\to [0, +\infty[, \quad d_0(x) = 0 \quad \text{per ogni } x \in [0, +\infty[,$$

$$A = \{d_\varepsilon : 0 < \varepsilon < 1\}, \quad g : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}, \quad b : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}, \quad g(x) = x, \quad b(x) = |x|$$

per ogni $x \in \boldsymbol{R}$.

Allora $(g, b) \in M_d(\mathcal{R}, Z, \mathcal{A}) \setminus M(\mathcal{R}, Z, \mathcal{A})$. Infatti

$$(1.1.1) \qquad |\xi| = \xi < (1-\varepsilon)\xi + \varepsilon\xi = d_\varepsilon(\xi) + \varepsilon\xi$$

per ogni $\xi \in [0, +\infty[\setminus \{\varepsilon\}$ $(0 < \varepsilon < 1)$,

$$|\xi| = \xi < \varepsilon\xi = d_0(\xi) + \varepsilon\xi \quad \text{per ogni } \xi \in [0, +\infty[\ (\varepsilon > 1),$$

$$|\xi| = -\xi < (-\varepsilon - 1)\xi + \varepsilon\xi = d_\varepsilon(\xi) + \varepsilon\xi$$

per ogni $\xi \in]-\infty, 0]$ $(0 < \varepsilon < 1)$

e pertanto scegliendo $Z_\varepsilon = \boldsymbol{R} \setminus \{\varepsilon\}$ e $b_\varepsilon = d_\varepsilon$ (se $0 < \varepsilon < 1$), $Z_\varepsilon = \boldsymbol{R}$ e $b_\varepsilon = d_0$ (se $\varepsilon > 1$) si ottiene che $(g, b) \in M_d(\mathcal{R}, Z, \mathcal{A})$. D'altra parte se per assurdo $(g, b) \in M(\mathcal{R}, Z, \mathcal{A})$ allora esiste $Z_0 \in \mathfrak{L}(\boldsymbol{R})$ tale che $\mu(\boldsymbol{R} \setminus Z_0) = 0$ e per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $a_\varepsilon \in \mathcal{A}$ tale che

$$|\xi| < a_\varepsilon(\xi) + \varepsilon\xi \quad \text{per ogni } \xi \in D_{a_\varepsilon} \cap Z_0 ;$$

in particolare, se $0 < \varepsilon < 1$, per ogni $\xi \in [0, 1[\cap Z_0$ si ha

$$|\xi| = \xi < a_\varepsilon(\xi) + \varepsilon\xi , \quad \text{da cui } a_\varepsilon(\xi) > (1-\varepsilon)\xi$$

e quindi $a_\varepsilon \in \{d_\sigma : 0 < \sigma < \varepsilon\}$, pertanto $D_{a_\varepsilon} = \boldsymbol{R}$ e per ogni $\xi \in]-\infty, 0] \cap Z_0$ si ha

$$|\xi| = -\xi < a_\varepsilon(\xi) + \varepsilon\xi , \quad \text{da cui } a_\varepsilon(\xi) > (-\varepsilon - 1)\xi$$

e allora $a_\varepsilon \in \{d_\sigma : \varepsilon \leq \sigma \leq 1\}$, per cui $a_\varepsilon = d_\varepsilon$ e quindi $a_\varepsilon(\varepsilon) = 0$, da cui

$$|\varepsilon| = \varepsilon < a_\varepsilon(\varepsilon) + \varepsilon \cdot \varepsilon = \varepsilon^2 \quad \text{per ogni } \varepsilon \in]0, 1[\cap Z_0 ,$$

il che è assurdo.

f) Siano Z, $\mathcal{R}$, $\mathcal{A}$ come in *e*). Esista $\mathcal{B} \subset \mathfrak{P}(Z)$ tale che

$$M(Z, \mathcal{B}) \supset M(\mathcal{R}, Z, \mathcal{A}) .$$

Allora, se

$$t_\sigma : \boldsymbol{R} \to [0, +\infty[, \quad t_\sigma(\xi) = d_\sigma(\xi) \text{ per ogni } \xi \in \boldsymbol{R} \setminus \{\sigma\} ,$$

$$t_\sigma(\sigma) = (1-\sigma)\sigma \ (0 < \sigma < 1) ,$$

$$t_0 : \boldsymbol{R} \to [0, +\infty] , \quad t_0(\xi) = +\infty \text{ per ogni } \xi < 0 ,$$

$$t_0(\xi) = d_0(\xi) \quad \text{per ogni } \xi > 0 ,$$

risulta che

$$(1.1.2) \qquad (0, t_\sigma) \in M(\mathcal{R}, Z, \mathcal{A}) \subset M(Z, \mathcal{B}) \quad \text{per ogni } \sigma \in [0, 1]$$

(considerando infatti $Z_\sigma = \{\sigma\}$ (se $\sigma \in]0, 1]$), $Z_\sigma = \emptyset$ (se $\sigma = 0$) si ottiene che

$$t_\sigma(\tau) \leq d_\sigma(\tau) + \sigma \cdot 0 \quad \text{per ogni } \tau \in (R \setminus \{\sigma\}) \cap D_{d_\sigma}$$

$(\sigma \in [0, 1])$.

Si proverà ora che da (1.1.2) segue che $(g, b) \in M(Z, \mathcal{B})$, ove (g, b) è come in e). Tale prova concluderà la dimostrazione, in quanto si è già visto in e) che $(g, b) \notin M(\mathcal{R}, Z, \mathcal{A})$.

Da (1.1.2) segue che per ogni $\sigma \in [0, 1]$ e per ogni $\eta > 0$ esiste $\varepsilon_{\sigma,\eta} \in \mathcal{B}$ tale che

$$t_\sigma(\tau) < \varepsilon_{\sigma,\eta}(\tau) + \eta \cdot 0 = \varepsilon_{\sigma,\eta}(\tau) \quad \text{per ogni } \tau \in D_{\varepsilon_{\sigma,\eta}}$$

e d'altra parte da (1.1.1) e da come si sono definite $t_\sigma(\sigma)$ $(\sigma \in]0, 1])$ e $t_0|_{]-\infty, 0[}$ si ottiene che

$$b(\tau) = |\tau| < t_\sigma(\tau) + \varepsilon\tau = t_\sigma(\tau) + \varepsilon g(\tau) \quad \text{per ogni } \tau \in R \text{ (se } 0 < \varepsilon < 1),$$
$$b(\tau) = |\tau| < t_0(\tau) + \varepsilon\tau = t_0(\tau) + \varepsilon g(\tau) \quad \text{per ogni } \tau \in R \text{ (se } \varepsilon > 1),$$

da cui

$$b(\tau) = |\tau| < \varepsilon_{\sigma,1}(\tau) + \varepsilon g(\tau) \quad \text{per ogni } \tau \in D_{\varepsilon_{\sigma,1}} \quad (\text{se } 0 < \varepsilon < 1),$$
$$b(\tau) = |\tau| < \varepsilon_{0,1}(\tau) + \varepsilon g(\tau) \quad \text{per ogni } \tau \in D_{\varepsilon_{0,1}} \text{ (se } \varepsilon > 1)$$

e quindi $(g, b) \in M(Z, \mathcal{B})$.

g) Se $\mathcal{M} \subset M(\mathcal{R}, Z, \mathcal{A})$, allora $\mathcal{M} \subset M(Z, \mathcal{A})$ e quindi basta considerare $Z_\sigma = Z$ per ottenere verificata per $\mathcal{M}$ la condizione della Definizione 1.0 b).

1.2 Osservazioni: a) Nelle Definizioni 1.0 come insieme Z, come sottoinsieme $\mathcal{R}$ di 2^Z e come classe $\mathcal{A}$ sembra di particolare interesse scegliere $Z = T \times X$, $\mathcal{R} = \{S \times X : S \in \mathcal{S}\}$ (ove T e X sono insiemi, $\mathcal{S} \subset 2^T$) ed $\mathcal{A}$ una classe di funzioni indipendenti dalla seconda variabile, cioè una classe

$$(1.2.0) \quad \mathcal{A}(\mathcal{B}) = \{a : S_a \times X \subset T \times X \to [-\infty, +\infty[\text{ funzioni} : a(\cdot, x) = a(\cdot, x') \in \mathcal{B} \text{ per ogni } x, x' \in X\},$$

ove $\mathcal{B} \subset \mathfrak{G}(T)$; ad esempio saranno utilizzate anche nel seguito le seguenti classi:

i) $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}(\mathcal{B}_1)$, ove $\mathcal{B}_1 = \{b : T \to R \text{ funzioni}\}$,
$\mathcal{A}_2 = \mathcal{A}(\mathcal{B}_2)$, ove $\mathcal{B}_2 = \{b : T \to R \text{ funzioni limitate}\}$,

ii) $\mathcal{A}_m = \mathcal{A}(\mathcal{B}_m)$, ove $\mathcal{B}_m = \{b : T \to R \text{ funzioni } \mathfrak{L}\text{-misurabili}\}$
(essendo $\mathfrak{L}$ una σ-algebra su T, $\mu : \mathfrak{L} \to [0, +\infty]$ una misura, $\mathcal{S} = \{S \in \mathfrak{L} : \mu(S) = 0\}$ (si noti che, con tale scelta, $\mathcal{R}$ risulta essere un σ-anello)),

iii) $\mathcal{A}_s = \mathcal{A}\big(\{b: D_b \to [-\infty, +\infty[\text{ funzioni: } D_b \in \mathfrak{L},\ \mu(T \setminus D_b) = 0,$
$b \in \mathfrak{L}^p(\mu|_{\mathfrak{L}|_{D_b}}, [-\infty, +\infty[)\}\big)$
e $\mathcal{A}'_s = \mathcal{A}(\mathfrak{L}^p(\mu, \boldsymbol{R}))$ $(p \in [1, \infty])$ (essendo $\mathfrak{L}$, μ, $\mathcal{S}$ come in ii)).

b) Altre scelte interessanti, sempre riguardo alle Definizioni 1.0, sono le seguenti:

$\mathcal{A}_c = \{a: Z \to \boldsymbol{R} \text{ funzioni costanti}\}$,

$\mathcal{A}_{\mathcal{F}} = \{a: D_a \subset T \times X \to [0]: (D_a)_t \in \mathcal{F} \text{ per ogni } t \in T\}$
(ove Z, $\mathcal{R}$ sono come in *a*) e $\mathcal{F} \subset 2^X$),

$\mathcal{C}_{\mathcal{F}} = \{c: D_c \subset X \to [0]: D_c \in \mathcal{F}\}$
(ove $Z = X$, con X insieme, $\mathcal{R} = \{0\}$ e $\mathcal{F} \subset 2^X$).

c) Berliocchi e Lasry hanno definito «g maggiora integralmente b» quando, usando le notazioni della Definizione 1.0 *a*) e di *a*),

$$g: D_g \subset T \times X \to [0, +\infty[\,, \quad b: T \times X \to [0, +\infty]\,,$$

$(g, b) \in M\big(\{S \times X: S \in \mathfrak{L},\ \mu(S) = 0\},$
$T \times X,\ \mathcal{A}\big(\{b \in \mathfrak{L}^1(\mu, \boldsymbol{R}): b(t) \geqslant 0 \text{ per ogni } t \in T\}\big)\big)$

(si è utilizzata la notazione introdotta in *a*)) (tali autori consideravano $g: T \times X \to [0, +\infty]$: per rientrare nella Definizione 1.0 *a*) basta considerare $D_g = \{(t, x) \in T \times X: g(t, x) < +\infty\}$ e $g|_{D_g}: D_g \to [0, +\infty[$); a [BL] (Cap. III, § 1, esempi e proprietà elementari dopo la Definizione 1; commenti in fondo all'articolo) si rimanda per esempi e proprietà e per commenti sulla condizione di maggiorazione integrale; per analogia si dirà che «g maggiora integralmente b con potenza p» $(p \in [1, \infty])$ se $(g, b) \in M(\{S \times X: S \in \mathfrak{L},$ $\mu(S) = 0\},\ T \times X,\ \mathcal{A}_s)$ (cfr. Osservazione 1.3 *d*)).

d) In [CS], dati $a, b \in \boldsymbol{R}$, $(a_\eta)_{\eta > 0}$ con $a_\eta \in \mathfrak{L}^1(\mu_{a,b}, \boldsymbol{R})$ (ove $\mu_{a,b}$ è la misura di Lebesgue su $[a, b]$), $a_\eta(t) \geqslant 0$ per ogni $t \in [a, b]$, $T_0 \in \mathfrak{L}([a, b])$ con $\mu_{a,b}([a, b] \setminus T_0) = 0$, sono stati presi in considerazione sottoinsiemi $\mathcal{C}$ di

$\{(\eta, x)$: esistono $a_{(\eta,x)}, b_{(\eta,x)} \in [a, b]$ per cui $\eta \in \mathfrak{L}^1(\mu_{(a_{(\eta,x)}, b_{(\eta,x)})}, \boldsymbol{R})$,
$x \in AC([a_{(\eta,x)}, b_{(\eta,x)}], \boldsymbol{R}^n)$, $|x'(t)| \leqslant a_\eta(t) + \varepsilon\eta(t)$ per ogni $\varepsilon > 0$ e per ogni $t \in T_0\}$

(ove $\mu_{(\eta,x)}$ è la misura di Lebesgue su $[a_{(\eta,x)}, b_{(\eta,x)}]$) che possono essere ritrovati nel linguaggio della Definizione 1.0 *a*) e di *a*): esistono infatti T sottoinsieme di $\boldsymbol{R}$, $\mathfrak{L}$ σ-algebra su T, $\mu: \mathfrak{L} \to [0, +\infty]$ misura, X insieme, $\mathcal{A} \subset \mathfrak{B}(T \times X)$, $g \in \mathfrak{B}(T \times X)$, $b \in \mathcal{R}(T \times X)$, con

$$(g, b) \in M(\{S \times X: S \in \mathfrak{L}, \mu(S) = 0\}, T \times X, \mathcal{A})\,,$$

tali che

$$\mathcal{C} = \{(g(\cdot, y), k(\cdot, y)) : y \in X\}$$

(ove $k: D_g \to R^n$ è tale che $|(k(\cdot, y))'(t)| = h(t, y)$ per ogni $(t, y) \in D_g$). Una di tali scelte è la seguente: $T = [a, b]$, $\mathfrak{L}$ e μ rispettivamente la σ-algebra e la misura di Lebesgue su $[a, b]$, $X = \mathcal{C}$, $\mathcal{A} = \mathcal{A}(\{h \in \mathfrak{L}^1(\mu, R) : h(t) > 0$ per ogni $t \in T\})$ (si è utilizzata la notazione introdotta in a)),

$$D_g = D_h = \{(t, (\eta, x)) \in [a, b] \times \mathcal{C} : t \in [a_{(\eta,x)}, b_{(\eta,x)}]\},$$

$$g(t, (\eta, x)) = \eta(t), \quad h(t, (\eta, x)) = |x'(t)|, \quad k(t, (\eta, x)) = x(t)$$

per ogni $(t, (\eta, x)) \in D_g$.

e) In [C] (Definizione 35.1) si considera un concetto che per certi aspetti è più generale della maggiorazione funzionale, poichè non si considerano solo spazi di funzioni e per altri è più restrittivo, poichè sono confrontati elementi non negativi di uno stesso spazio vettoriale ordinato e sono considerati come classi $\mathcal{A}$ solo coni convessi.

f) Si noti che, se Z, $\mathcal{R}$, $\mathcal{A}$ sono come nelle Definizioni 1.0 e se $Z = T \times X$, con T e X insiemi, $\mathcal{R} = \{S \times X : S \in \mathcal{S}\}$ ed $\mathcal{S} \subset 2^T$ è tale che $\emptyset \in \mathcal{S}$, allora sono equivalenti i due seguenti fatti:

i) esistono $\mathcal{A}_t \subset \mathfrak{V}(X)$ $(t \in T)$ tali che

$$(g, h) \in M(\mathcal{R}, T \times X, \mathcal{A}) \quad (\text{e } T_{g,h} \times X, \text{ con } T_{g,h} \subset T,\ T \setminus T_{g,h} \in \mathcal{S}$$

è relativo all'appartenenza di (g, h) a $M(\mathcal{R}, T \times X, \mathcal{A})$)

se e solo se per ogni $t \in T_{g,h}$ risulta

$$(g(t, \cdot), h(t, \cdot)) \in M(\{\emptyset\}, X, \mathcal{A}_t) \quad (\text{con } T_{g,h} \subset T,\ T \setminus T_{g,h} \in \mathcal{S})$$

$(g \in \mathfrak{V}(T \times X),\ h \in \mathcal{H}(T \times X))$;

ii) esistono $\mathcal{B}_t \subset \mathfrak{V}(X)$ $(t \in T)$ tali che

$$\bar{\mathcal{A}} = \{a \in \mathfrak{V}(T \times X) : a(t, \cdot) \in \mathcal{B}_t \text{ per ogni } t \in T\}$$

(ove $\bar{\mathcal{A}}$ è relativa ad $\mathcal{A}$ come nella Definizione 1.0 a)); inoltre, se vale ii), si può ottenere i) con $\mathcal{A}_t = \mathcal{B}_t$ per ogni $t \in T$, anche senza l'ipotesi «$\emptyset \in \mathcal{S}$».

Infatti se vale ii) e se $g \in \mathfrak{V}(T \times X)$, $h \in \mathcal{H}(T \times X)$ risulta che $(g, h) \in M(\mathcal{R}, T \times X, \mathcal{A})$ (e $T_{g,h} \times X$, con $T_{g,h} \subset T$, $T \setminus T_{g,h} \in \mathcal{S}$ è relativo a tale appartenenza) se e solo se $(g, h) \in M(\mathcal{R}, T \times X, \bar{\mathcal{A}})$ (e $T_{g,h} \times X$ è relativo a tale

appartenenza), il che accade se e solo se per ogni $t \in T_{a,b}$ si ha che

$$(g(t,\cdot),\, b(t,\cdot)) \in M(\{\emptyset\},\, X,\, \mathcal{B}_t)\ ;$$

pertanto basta scegliere $\mathcal{A}_t = \mathcal{B}_t$ per ogni $t \in T$.

Viceversa valga i) e siano $\mathcal{B}_t = \{b \in \mathcal{G}(X)$: esista $a_b \in \mathcal{A}_t$ per cui $D_{a_b} \subset D_b$, $b(x) \leqslant a_b(x)$ per ogni $x \in D_{a_b}\}$ $(t \in T)$; sia $a \in \mathcal{G}(T \times X)$; allora per ogni $t \in T$ si ha che $a(t,\cdot) \in \mathcal{B}_t$ se e solo se $(0, \hat{a}(t,\cdot)) \in M(\{\emptyset\},\, X,\, \mathcal{A}_t)$ (infatti, se $t \in T$, esiste $\varepsilon \in \mathcal{A}_t$ tale che $D_\varepsilon \subset D_{a(t,\cdot)}$, $a(t,x) \leqslant \varepsilon(x)$ per ogni $x \in D_\varepsilon$ se e solo se esiste $\varepsilon \in \mathcal{A}_t$ tale che $\hat{a}(t,x) \leqslant \varepsilon(x)$ per ogni $x \in D_\varepsilon \cap D_{a(t,\cdot)}$, visto che essendo $\varepsilon(D_\varepsilon) \subset [-\infty, +\infty[$ se $\hat{a}(t,x) \leqslant \varepsilon(x)$ per ogni $x \in D_\varepsilon \cap D_{a(t,\cdot)}$ risulta che

$$D_\varepsilon \cap D_{a(t,\cdot)} \subset \{x \in D_{a(t,\cdot)}\colon \hat{a}(t,x) < +\infty\} = \{x \in D_{a(t,\cdot)}\colon a(t,x) > -\infty\})\ ;$$

d'altra parte da i) segue che $(0, \hat{a}(t,\cdot)) \in M(\{\emptyset\},\, X,\, \mathcal{A}_t)$ per ogni $t \in T$ se e solo se $(0, \hat{a}) \in M(\mathcal{R},\, T \times X,\, \mathcal{A})$ (e $T \times X$ è relativo a tale appartenenza); infine risulta che $(0, \hat{a}) \in M(\mathcal{R},\, T \times X,\, \mathcal{A})$ (e $T \times X$ è relativo a tale appartenenza) se e solo se $a \in \bar{\mathcal{A}}$.

g) Si noti che, se Z, $\mathcal{R}$, $\mathcal{A}$ sono come in *f*) e se esistono $\mathcal{C}_t \subset \mathcal{G}(X)$ $(t \in T)$ tali che

$$\mathcal{A} = \{a \in \mathcal{G}(T \times X)\colon a(t,\cdot) \in \mathcal{C}_t \text{ per ogni } t \in T\}\ , \tag{1.2.1}$$

allora vale ii) della parte *f*) (considerando $\mathcal{B}_t = \bar{\mathcal{C}}_t$ per ogni $t \in T$ (si è usata la notazione della Definizione 1.0 *a*)) e quindi anche i) della parte *f*).

In particolare, visto che le classi $\mathcal{A}_\mathcal{F}$ e $\mathcal{A}_\mathcal{F}$ $(\mathcal{F} \subset 2^T)$ considerate in *a*) e in *b*) soddisfano (1.2.1) (inoltre per quanto riguarda $\mathcal{A}_\mathcal{F}$ si ha $\mathcal{C}_t = \mathcal{A}_t$ $(t \in T)$ e per quanto riguarda $\mathcal{A}_\mathcal{F}$ si ha $\mathcal{C}_t = \mathcal{C}_\mathcal{F}$ $(t \in T)$ (ove $\mathcal{A}_t$ (relativa a $Z = X$) e $\mathcal{C}_\mathcal{F}$ sono come nell'Osservazione 1.2 *b*))), per esse vale i) della parte *f*).

1.3 Osservazioni: Siano T, X insiemi, $g \in \mathcal{G}(T \times X)$, $b \in \mathcal{K}(T \times X)$.

a) Si noti che, se $\mathfrak{L}$ è una σ-algebra su T, $\mu\colon \mathfrak{L} \to [0, +\infty]$ è una misura, $\mathcal{R} \subset 2^{T \times X}$, se $p \in [1, \infty[$ e se $g \geqslant 0$, $b > 0$, risulta che $(g, b) \in M(\mathcal{R},\, T \times X,\, \mathcal{A}_p)$ se e solo se

$$\big((t,x) \in D_g \mapsto (g(t,x))^p \in [0, +\infty[,\ (t,x) \in D_b \mapsto (b(t,x))^p \in [0, +\infty]\big) \in$$
$$\in M(\mathcal{R},\, T \times X,\, \mathcal{A}_\mu)$$

(ove $\mathcal{A}_p$ $(p \in [1, \infty[)$ sono come in iii) dell'Osservazione 1.2 *a*)).

b) Si noti che, se $\gamma \in \mathcal{G}(X)$, $\eta \in \mathcal{K}(X)$, $\mathcal{F} \subset 2^X$ è tale che

(1.3.0) per ogni $U, V \in \mathcal{F}$ esista $W_{U,V} \in \mathcal{F}$ con $W_{U,V} \subset U \cap V$

e se $\mathcal{C}_{\mathcal{F}}$ è relativa a $\mathcal{F}$ come nell'Osservazione 1.2 *b*), allora $(\gamma, \eta) \in M(\{\emptyset\}, X, \mathcal{C}_{\mathcal{F}})$ se e solo se valgono le seguenti condizioni:

(1.3.1) esista $Y \in \mathcal{F}$ per cui

$\eta(x) < +\infty$ per ogni $x \in D_\gamma \cap D_\eta \cap Y$,
$\gamma(x) \geq 0$ per ogni $x \in D_\gamma \cap D_\eta \cap Y$ tale che $\eta(x) = 0$,
$\gamma(x) > -\infty$ per ogni $x \in D_\gamma \cap D_\eta \cap Y$,
$\eta(x) < 0$ per ogni $x \in D_\gamma \cap D_\eta \cap Y$ tale che $\gamma(x) = 0$

(1.3.2) per ogni $\sigma \in \boldsymbol{R}$ esista $U_\sigma \in \mathcal{F}$ tale che

se $x \in D_\gamma \cap D_\eta \cap U_\sigma$ e se $0 < \eta(x) < +\infty$ risulti che $\dfrac{\gamma(x)}{\eta(x)} > \sigma$

(1.3.3) per ogni $\sigma \in \boldsymbol{R}_+$ esista $V_\sigma \in \mathcal{F}$, $V_\sigma \subset Y$ tale che

se $x \in D_\gamma \cap D_\eta \cap V_\sigma$ e se $-\infty < \gamma(x) < 0$ risulti che $\left|\dfrac{\gamma(x)}{\eta(x)}\right| < \sigma$.

Infatti $(\gamma, \eta) \in M(\{\emptyset\}, X, \mathcal{C}_{\mathcal{F}})$ se e solo se

(1.3.4) per ogni $\varepsilon \in \boldsymbol{R}_+$ esiste $W_\varepsilon \in \mathcal{F}$ tale che

$$\eta(x) < \varepsilon\gamma(x) \quad \text{per ogni } x \in D_\gamma \cap D_\eta \cap W_\varepsilon ;$$

d'altra parte, se vale (1.3.4), si possono ottenere (1.3.1), (1.3.2), (1.3.3) considerando $Y = W_1$; $U_\sigma = W_{1/(\sigma+1)}$ $(\sigma > 0)$, $U_\sigma = W_1$ $(\sigma < 0)$; $V_\sigma = W_{1/\sigma}$ $(\sigma \in \boldsymbol{R}_+)$ e viceversa, se valgono (1.3.1), (1.3.2), (1.3.3), si può ricavare (1.3.4) considerando $W_\varepsilon \in \mathcal{F}$, $W_\varepsilon \subset Y \cap U_{1/\varepsilon} \cap V_{1/\varepsilon}$ $(\varepsilon \in \boldsymbol{R}_+)$.

c) Si noti che, se (Y, ϱ) è uno spazio topologico, $X \subset Y$, $y_0 \in D(X)$, se $\mathcal{F} = \{U \cap X : U \in \mathfrak{U}\}$ ove $\mathfrak{U}$ è un sistema fondamentale di intorni di y_0, allora vale (1.3.0) e, se vale (1.3.1), le condizioni (1.3.2) e (1.3.3) si possono riscrivere rispettivamente nel seguente modo:

$$\lim_{\substack{x \to y_0 \\ (x \in D_\gamma \cap D_\eta,\ 0 < \eta(x) < +\infty)}} \frac{\gamma(x)}{\eta(x)} = +\infty \quad \left(\text{se } y_0 \in D(\{x \in D_\gamma \cap D_\eta : 0 < \eta(x) < +\infty\})\right)$$

e

$$\eta(y_0) < 0 \quad (\text{se } y_0 \in D_\gamma \cap D_\eta)$$

e

$$\lim_{\substack{x \to y_0 \\ (x \in D_\gamma \cap D_\eta,\ -\infty < \gamma(x) < 0)}} \frac{\gamma(x)}{\eta(x)} = 0 \quad \left(\text{se } y_0 \in D(\{x \in D_\gamma \cap D_\eta : -\infty < \gamma(x) < 0\})\right)$$

e

$$\gamma(y_0) \geq 0 \quad (\text{se } y_0 \in D_\gamma \cap D_\eta).$$

d) Si noti che, se μ, $\mathcal{R}$, $\mathcal{A}_p$, $\mathcal{A}'_p$ ($p \in [1, \infty]$) sono come in iii) dell'Osservazione 1.2 *a*), dall'Osservazione 1.1 *d*) segue che

$$M(\mathcal{R}, T\times X, \mathcal{A}_p) = M(\mathcal{R}, T\times X, \mathcal{A}'_p) \quad \text{per ogni } p \in [1, \infty]$$

e

$$M(\mathcal{R}, T\times X, \mathcal{A}_\infty) =$$

$$= M\big(\mathcal{R}, T\times X, \mathcal{A}(\{b\colon T \to \boldsymbol{R} \text{ funzioni } \mathcal{L}\text{-misurabili e limitate}\})\big)$$

(si è usata la notazione di (1.2.0) dell'Osservazione 1.2 *a*)).

e) Siano Z un insieme, $\mathcal{S} \subset 2^Z$, $\mathcal{A}$, $\mathcal{B} \subset \mathcal{G}(Z)$, $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$. Allora

$$M(\mathcal{S}, Z, \mathcal{B}) \subset M(\mathcal{S}, Z, \mathcal{A})\,;$$

in particolare, se μ e $\mathcal{R}$ sono come in ii) dell'Osservazione 1.2 *a*), $\mathcal{A}_t$, $\mathcal{A}_\infty$, $\mathcal{A}_s$, $\mathcal{A}_p$ ($p \in [1, \infty]$) e $\mathcal{A}_z$ sono come nelle Osservazioni 1.2 *a*) e *b*), utilizzando la *d*) si ha che:

$$(1.3.5) \qquad M(\mathcal{R}, T\times X, \mathcal{A}_p) \subset M(\mathcal{R}, T\times X, \mathcal{A}_\infty) \subset M(\mathcal{R}, T\times X, \mathcal{A}_t) \qquad (p \in [1, \infty])\,,$$

$$(1.3.6) \qquad M(\mathcal{R}, T\times X, \mathcal{A}_p) \subset M(\mathcal{R}, T\times X, \mathcal{A}_q) \qquad (p, q \in [1, \infty]\,,\ p > q) \ \text{(se } \mu(T) < +\infty)\,;$$

inoltre

$$(1.3.7) \qquad M(\mathcal{R}, T\times X, \mathcal{A}_\infty) = M(\mathcal{R}, T\times X, \mathcal{A}_s) = M(\mathcal{R}, T\times X, \mathcal{A}_z)$$

(per ottenere le ultime uguaglianze si tenga conto anche che

$$\mathcal{A}_z \subset \mathcal{A}_s \subset \mathcal{A}_\infty$$

e che

$$\mathcal{A}(\{b\colon T \to \boldsymbol{R} \text{ funzioni } \mathcal{L}\text{-misurabili e limitate}\}) \subset \mathcal{A}_z \subset \overline{\mathcal{A}}_z)\,;$$

si noti ancora che, per gli stessi motivi, l'uguaglianza « $M(\mathcal{R}, T\times X, \mathcal{A}_s) = M(\mathcal{R}, T\times X, \mathcal{A}_z)$ » vale anche se Z e $\mathcal{R}$ sono come nell'Osservazione 1.2 *a*).

f) Si noti che, se Z, $\mathcal{A}$ sono come nelle Definizioni 1.0, se $\mathcal{B} \subset \mathcal{G}(Z)$ è tale che

$$M(\{0\}, Z, \mathcal{B}) \subset M(\{0\}, Z, \mathcal{A})\,,$$

allora

$$\mathcal{B} \subset \overline{\mathcal{A}}$$

(ove $\overline{\mathcal{A}}$ è relativa ad $\mathcal{A}$ come nella Definizione 1.0 *a*)).

Basta osservare che se $b \in \mathcal{B}$ allora $(0, b) \in M(\{\emptyset\}, Z, \mathcal{B}) \subset M(\{\emptyset\}, Z, \mathcal{A})$ e pertanto esiste $a_b \in \mathcal{A}$ tale che

$$b(z) \leq a_b(z) \quad \text{per ogni } z \in D_b \cap D_{a_b};$$

allora

$$Z \setminus D_b = \{z \in D_b : b(z) = +\infty\} \subset Z \setminus D_{a_b}$$

e quindi

$$D_b \supset D_{a_b} \quad \text{e} \quad b(z) \leq a_b(z) \quad \text{per ogni } z \in D_{a_b}$$

(poichè se $z \in D_{a_b} \setminus D_b$ allora $b(z) = -\infty$).

g) Si noti che, se T, X e Y sono insiemi, se $\mathcal{S} \subset 2^T$, $\mathcal{R}_X = \{S \times X : S \in \mathcal{S}\}$, $\mathcal{R}_Y = \{S \times Y : S \in \mathcal{S}\}$, $\mathcal{B} \subset \mathfrak{N}(T)$, $\mathcal{A}_X(\mathcal{B})$ e $\mathcal{A}_Y(\mathcal{B})$ sono relative rispettivamente a $\mathcal{B}$ e a X, a $\mathcal{B}$ e a Y come in (1.2.0) dell'Osservazione 1.2 *a*), se $g \in \mathfrak{N}(T \times X)$, $h \in \mathcal{K}(T \times X)$, se $k : D_k \subset T \times Y \to X$ è un'applicazione e se $(g, h) \in M(\mathcal{R}_X, T \times X, \mathcal{A}_X(\mathcal{B}))$, si ha che

$$(g \circ (\mathrm{pr}_T, k), h \circ (\mathrm{pr}_T, k)) \in M(\mathcal{R}_Y, T \times Y, \mathcal{A}_Y(\mathcal{B})) .$$

Basta notare che $D_{j \circ (\mathrm{pr}_T, k)} = \{(t, y) \in D_k : (t, k(t, y)) \in D_j\}$ per ogni funzione $j : D_j \subset T \times X \to [-\infty, +\infty]$ ed utilizzare le definizioni di appartenenza alle classi « M ».

1.4 Teorema: Siano Z, $\mathcal{R}$, $\mathcal{A}$ come nelle Definizioni 1.0. Allora:

a) se $2a \in \bar{\mathcal{A}}$ e $a \vee 0 \in \bar{\mathcal{A}}$ per ogni $a \in \mathcal{A}$ (ove $\bar{\mathcal{A}}$ è relativa ad $\mathcal{A}$ come nella Definizione 1.0 *a*)) e se $g : D_g \subset Z \to [0, +\infty[$, $h \in \mathcal{K}(Z)$, risulta che $(g, h) \in M(\mathcal{R}, Z, \mathcal{A})$ se e solo se

(1.4.0) esiste $Z_0 \subset Z$ con $Z \setminus Z_0 \in \mathcal{R}$ e per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $h_\varepsilon \in \mathcal{A}$ tale che per ogni $z \in D_h \cap D_g \cap D_{h_\varepsilon} \cap Z_0$ per cui si ha $h(z) > h_\varepsilon(z)$ si abbia $h(z) < \varepsilon g(z)$;

b) se $g \in \mathfrak{N}(Z)$, $g > 0$, $h \in \mathcal{K}(Z)$ e se

(1.4.1) per ogni $h \in \mathcal{A}$ esiste $c_h \in \mathcal{A}$ tale che $D_{c_h} \subset D_h$, $c_h(z) > h(z)$ per ogni $z \in D_{c_h}$ per cui $h(z) > 0$,

si ha che la condizione (1.4.0) è equivalente alla seguente condizione:

(1.4.2) esiste $Z_0 \subset Z$ con $Z \setminus Z_0 \in \mathcal{R}$ e per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $c_\varepsilon \in \mathcal{A}$ tale che per ogni $z \in D_h \cap D_g \cap D_{c_\varepsilon} \cap Z_0$ per cui si ha $h(z) > c_\varepsilon(z)$ si abbia $h(z) < \varepsilon g(z)$.

Dimostrazione: *a*) Se $(g, h) \in M(\mathcal{R}, Z, \mathcal{A})$ basta considerare $h_\varepsilon \in \mathcal{A}$, k_ε tale che $D_{k_\varepsilon} \subset D_{a_{\varepsilon/2}}$, $k_\varepsilon(z) > 2a_{\varepsilon/2}(z)$ per ogni $z \in D_{k_\varepsilon}$ ($\varepsilon > 0$); viceversa se vale (1.4.0) basta considerare $a_\varepsilon = h_\varepsilon \vee 0$ per ogni $\varepsilon > 0$.

b) Valga (1.4.0). Sia $\varepsilon > 0$. Scegliendo $\varepsilon_z = \varepsilon_{h_z}$ (ε_{h_z} relativa a h_z come in (1.4.1)) e considerando $z \in D_h \cap D_g \cap D_{h_z} \cap Z_0$, risulta che

se $h_z(z) < 0$ e se $h(z) < 0$ allora $h(z) < \varepsilon g(z)$.

se $h_z(z) < 0$ e se $h(z) > 0$ allora da (1.4.0) segue che $h(z) < \varepsilon g(z)$.

se $h_z(z) > 0$ allora per (1.4.1) risulta $\varepsilon_z(z) > h_z(z)$ e pertanto

se $h(z) \geq \varepsilon_z(z)$ si ha che $h(z) > h_z(z)$ e quindi da (1.4.0) segue che $h(z) < \varepsilon g(z)$.

Viceversa è ovvio che (1.4.2) implichi (1.4.0), scegliendo $h_z = \varepsilon_z$ ($\varepsilon > 0$).

1.5. Teorema: Se μ, X, $\mathcal{R}$ sono come nell'Osservazione 1.3 *a*), se μ è completa, se ϱ è una topologia su X tale che (X, ϱ) sia suslíniano, se D_g, $D_h \in \mathfrak{L} \times \mathfrak{B}(\varrho)$, $g \in \mathfrak{N}(T \times X)$ è $(\mathfrak{L} \times \mathfrak{B}(\varrho))|_{D_g}$-misurabile, $h \in \mathfrak{K}(T \times X)$ è $(\mathfrak{L} \times \mathfrak{B}(\varrho))|_{D_h}$-misurabile e se $(g, h) \in M(\mathcal{R}, T \times X, \mathcal{A}_f)$, risulta che $(g, h) \in M(\mathcal{R}, T \times X, \mathcal{A}_m)$ (ove $\mathcal{A}_f$ e $\mathcal{A}_m$ sono rispettivamente come in i) e ii) dell'Osservazione 1.2 *a*)).

Dimostrazione: Poichè $(g, h) \in M(\mathcal{R}, T \times X, \mathcal{A}_f)$ esiste $T_0 \in \mathfrak{L}$ con $\mu(T \setminus T_0) = 0$ e per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una funzione $h_\varepsilon : T \to \boldsymbol{R}$ tale che

$$h(t, x) < h_\varepsilon(t) + \varepsilon g(t, x) \quad \text{per ogni } (t, x) \in (T_0 \times X) \cap D_h \cap D_g$$

e quindi $h - \varepsilon g : D_h \cap D_g \to]-\infty, +\infty]$ è $(\mathfrak{L} \times \mathfrak{B}(\varrho))|_{D_h \cap D_g}$-misurabile e

$$h(t, x) - \varepsilon g(t, x) < h_\varepsilon(t) \quad \text{per ogni } (t, x) \in (T_0 \times X) \cap D_h \cap D_g ;$$

se ora $\varepsilon_\varepsilon : T \to [0, +\infty]$,

$$\varepsilon_\varepsilon(t) = (\sup \{h(t, x) - \varepsilon g(t, x) : x \in (D_h \cap D_g)_t\}) \vee 0 \quad \text{se } t \in T_0 ,$$

$$\varepsilon_\varepsilon(t) = 0 \quad \text{se } t \in T \setminus T_0 ,$$

si ha che $\varepsilon_\varepsilon(t) \in \boldsymbol{R}$ per ogni $t \in T$, da [CV] (Cap. III, Lemma 39) segue che ε_ε è $\mathfrak{L}$-misurabile e risulta anche che

$$h(t, x) < \varepsilon_\varepsilon(t) + \varepsilon g(t, x) \quad \text{per ogni } (t, x) \in (T_0 \times X) \cap D_h \cap D_g .$$

1.6 Teorema: Siano X insieme, $\Phi \in \mathfrak{N}(X)$, $H \in \mathfrak{K}(X)$. Allora, utilizzando le notazioni delle Osservazioni 1.2 *b*) e 1.2 *a*):

a) se $\mathcal{F} \subset 2^T$ e se valgono le seguenti condizioni

(1.6.0) $$(\Phi, H) \in M(\{\emptyset\}, X, \mathfrak{C}_{\mathcal{F}}) ,$$

(1.6.1) per ogni $Y \in \mathcal{F}$ esiste $N_Y \in \boldsymbol{R}$ tale che

$$\Phi(x) > N_Y \quad \text{per ogni } x \in D_\Phi \cap (X \setminus Y) ,$$

(1.6.2) per ogni $Y \in \mathcal{F}$ esiste $M_Y \in \boldsymbol{R}$ tale che

$$H(x) \leqslant M_Y \quad \text{per ogni } x \in D_H \cap (X \setminus Y),$$

risulta che $(\Phi, H) \in M(\{\emptyset\}, X, \mathcal{A}_s)$;

b) se $X = \boldsymbol{R}$, se valgono i seguenti fatti:

$$\lim_{\tau \to +\infty} \frac{\Phi(\tau)}{\tau} = +\infty \quad (\text{se } +\infty \in D(D_\Phi)), \tag{1.6.3}$$

$$\limsup_{\tau \to -\infty} \frac{\Phi(\tau)}{\tau} \leqslant 0 \quad (\text{se } -\infty \in D(D_\Phi)), \tag{1.6.4}$$

(1.6.5) per ogni $\alpha, \beta \in \boldsymbol{R}$ esiste $N_{\alpha,\beta} \in \boldsymbol{R}$ tale che

$$\Phi(\tau) \geqslant N_{\alpha,\beta} \quad \text{per ogni } \tau \in D_\Phi \cap [\alpha, \beta],$$

risulta che $(\Phi, \mathrm{id}_{\boldsymbol{R}}) \in M(\{\emptyset\}, \boldsymbol{R}, \mathcal{A}_s)$;

c) se T, ζ, μ, $\mathcal{S}$, $\mathcal{R}$ sono come in ii) dell'Osservazione 1.2 *a*) e se $p \in [1, \infty]$ si ha che

c') se $\mu(T) > 0$ e se $(\Phi \circ \mathrm{pr}^2, H \circ \mathrm{pr}^2) \in M(\mathcal{R}, T \times X, \mathcal{A}_p)$, risulta che

$$(\Phi, H) \in M(\{\emptyset\}, X, \mathcal{A}_s),$$

c'') se $(\Phi, H) \in M(\{\emptyset\}, X, \mathcal{A}_s)$, risulta che

$$(\Phi \circ \mathrm{pr}^2, H \circ \mathrm{pr}^2) \in M(\mathcal{R}, T \times X, \mathcal{A}_\infty),$$

c''') se $p < \infty$, se $\mu(T) < +\infty$ e se $(\Phi, H) \in M(\{\emptyset\}, X, \mathcal{A}_s)$, risulta che

$$(\Phi \circ \mathrm{pr}^2, H \circ \mathrm{pr}^2) \in M(\mathcal{R}, T \times X, \mathcal{A}_p),$$

c'''') se $p < \infty$ e se $\mu(T) = +\infty$, risulta che

$(\Phi \circ \mathrm{pr}^2, H \circ \mathrm{pr}^2) \in M(\mathcal{R}, T \times X, \mathcal{A}_p)$ se e solo se $(\Phi, H) \in M(\{\emptyset\}, X, \{0\})$

(e d'altronde si ha che $(\Phi, H) \in M(\{\emptyset\}, X, \{0\})$ se e solo se $H(x) < 0$ e $\Phi(x) > 0$ per ogni $x \in D_\Phi \cap D_H$).

Dimostrazione: *a*) Per (1.6.0) si ha che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $Y_\varepsilon \in \mathcal{F}$ tale che

$$H(x) < \varepsilon \Phi(x) \quad \text{per ogni } x \in D_H \cap D_\Phi \cap Y_\varepsilon;$$

d'altra parte per (1.6.1) e (1.6.2) risulta che

$$H(x) < M_{Y_\varepsilon} = M_{Y_\varepsilon} - \varepsilon N_{Y_\varepsilon} + \varepsilon N_{Y_\varepsilon} < M_{Y_\varepsilon} - \varepsilon N_{Y_\varepsilon} + \varepsilon\Phi(x)$$

per ogni $x \in D_H \cap D_\Phi \cap (X \setminus Y_\varepsilon)$ $(\varepsilon > 0)$;

quindi

$$H(x) < \max\{M_{Y_\varepsilon} - \varepsilon N_{Y_\varepsilon}, 0\} + \varepsilon\Phi(x) \quad \text{per ogni } x \in D_H \cap D_\Phi \ (\varepsilon > 0)$$

e si conclude.

b) Per concludere basta provare che si può applicare *a*) a $H = \mathrm{id}_R$ e a $\mathcal{F} = \{]-\infty, -n[\cup]n, +\infty[: n \in N\}$. Da (1.6.3) e da (1.6.4), per ogni $\varepsilon \in R_+$ segue l'esistenza di $\delta_\varepsilon \in R_+$ e di $\vartheta_\varepsilon \in]-\infty, 0[$ tali che

$$\frac{\Phi(\tau)}{\tau} \geq \frac{1}{\varepsilon} \quad \text{per ogni } \tau \in D_\Phi \cap]\delta_\varepsilon, +\infty[,$$

$$\frac{\Phi(\tau)}{\tau} \leq \frac{1}{\varepsilon} \quad \text{per ogni } \tau \in D_\Phi \cap]-\infty, \vartheta_\varepsilon[$$

e pertanto si ha che

$$\tau < \varepsilon\Phi(\tau) \quad \text{per ogni } \tau \in D_\Phi \cap (]-\infty, \vartheta_\varepsilon[\cup]\delta_\varepsilon, +\infty[);$$

quindi, se $n_\varepsilon \in N$ è tale che $n_\varepsilon > \delta_\varepsilon \vee (-\vartheta_\varepsilon)$, si ha che

$$\tau < \varepsilon\Phi(\tau) \quad \text{per ogni } \tau \in D_\Phi \cap (]-\infty, -n_\varepsilon[\cup]n_\varepsilon, +\infty[)$$

e cioè $(\Phi, \mathrm{id}_R) \in M(\{0\}, R, \mathcal{C}_\Phi)$. Inoltre (1.6.1) è conseguenza di (1.6.5) e (1.6.2) è ovviamente soddisfatta.

c) *c'*) Tenendo conto dell'Osservazione 1.3 *d*), si ha che

(1.6.6) esiste $T_0 \in \mathcal{L}$ con $\mu(T \setminus T_0) = 0$ e per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $h_\varepsilon \in \mathcal{L}^p(\mu, R)$ tale che

$$H(x) < h_\varepsilon(t) + \varepsilon\Phi(x) \quad \text{per ogni } (t, x) \in T_0 \times (D_H \cap D_\Phi)$$

ed, essendo $\mu(T) > 0$, esiste $t_0 \in T_0$ e basta scegliere $a_\varepsilon = h_\varepsilon(t_0)$ $(\varepsilon > 0)$.

c'') Dall'ipotesi segue subito che $(\Phi \circ \mathrm{pr}^2, H \circ \mathrm{pr}^2) \in M(\mathcal{R}, T \times X, A_\mu)$ e per concludere basta utilizzare la (1.3.7) dell'Osservazione 1.3 *e*).

c''') Segue da *c'*) e da (1.3.6) dell'Osservazione 1.3 *e*).

c'''') Siano $p < \infty$ e $\mu(T) = +\infty$. Sia dapprima $(\Phi \circ \mathrm{pr}^2, H \circ \mathrm{pr}^2) \in M(\mathcal{R}, T \times X, A_\mu)$. Allora, tenendo conto dell'Osservazione 1.3 *d*), vale (1.6.6)

ed, essendo $p<\infty$ e $\mu(T)=+\infty$, si ha che $\inf_{u\in T_\varepsilon} h_\varepsilon(t)<0$ $(\varepsilon>0)$ e si conclude passando all'« $\inf_{t\in T_\varepsilon}$ » nella diseguaglianza di (1.6.6). Viceversa, se $(\Phi, H)\in M(\{\emptyset\}, X, \{0\})$, la tesi è ovvia poichè $0\in\mathfrak{L}^p(\mu, \boldsymbol{R})$.

1.7 Osservazioni: *a*) Siano X spazio normato su $\boldsymbol{R}$, $\Phi\in\mathfrak{P}(X)$, $H=|\ |_x$. Allora, se $\mathcal{F}=\{X\setminus S_x(0,t): t\in\boldsymbol{R}_+\}$, (1.6.0) è equivalente alla seguente condizione

$$\lim_{\substack{x\to\infty\\ x\in D_\Phi}}\frac{\Phi(x)}{|x|_x}=+\infty \quad \text{se } D_\Phi \text{ è non limitato} \tag{1.7.0}$$

(tale equivalenza è conseguenza delle Osservazioni 1.3 *b*) e *c*), considerando come (Y, ϱ) lo spazio $(X_\infty, \mathfrak{T}(X))$ e $y_0=\infty$ e tenendo conto che da (1.7.0) segue che $\{x\in D_\Phi: -\infty<\Phi(x)<0\}$ è limitato) ed inoltre in tal caso è soddisfatta (1.6.2); pertanto, se valgono (1.7.0) e (1.6.1) (relativamente alla famiglia $\mathcal{F}$ considerata sopra), vale la tesi di *a*) del Teorema 1.6 (relativamente ad $H=|\ |_x$).

b) Si noti che ε''') del Teorema 1.6 *c*) prova in particolare che ε'') dello stesso teorema in generale non vale se $\mu(T)=+\infty$ (ad esempio, basta considerare X e H come in *a*), $\Phi\in\mathfrak{P}(X)$ tale che esista $x\in(X\setminus\{0\})\cap D_\Phi$ e che $(\Phi, |\ |_x)\in M(\{\emptyset\}, X, \mathcal{A}_c)$ (perchè valga quest'ultima, tenendo conto di *a*), basta che Φ verifichi (1.7.0) e (1.6.1) (relativamente alla famiglia $\mathcal{F}$ considerata in *a*))).

1.8 Teorema: Siano X insieme, $\Phi\in\mathfrak{P}(X)$, $H\in\mathfrak{K}(X)$, $\mathcal{F}\subset 2^X$. Utilizzando le notazioni dell'Osservazione 1.2 *a*), se $(\Phi, H)\in M(\{\emptyset\}, X, \mathcal{A}_c)$, si ha che:

(1.8.0) per ogni $\alpha\in\boldsymbol{R}$ esiste $Y_{\alpha,1}\in\mathcal{F}$ per cui

$H(x)>\alpha$ per ogni $x\in D_\Phi\cap D_H\cap Y_{\alpha,1}$ per il quale $0<H(x)<+\infty$

implica

(1.8.1) per ogni $\sigma\in\boldsymbol{R}$ esiste $U_\sigma\in\mathcal{F}$ tale che

se $x\in D_\Phi\cap D_H\cap U_\sigma$ e se $0<H(x)<+\infty$ si abbia che $\dfrac{\Phi(x)}{H(x)}\geq\sigma$

e

(1.8.2) per ogni $\alpha\in\boldsymbol{R}$ esiste $Y_{\alpha,2}\in\mathcal{F}$ per cui

$\Phi(x)<\alpha$ per ogni $x\in D_\Phi\cap D_H\cap Y_{\alpha,2}$ per il quale $-\infty<\Phi(x)<0$

implica

(1.8.3) per ogni $\sigma\in\boldsymbol{R}_+$ esiste $V_\sigma\in\mathcal{F}$ tale che

se $x\in D_\Phi\cap D_H\cap V_\sigma$ e se $-\infty<\Phi(x)<0$ si abbia che $\left|\dfrac{\Phi(x)}{H(x)}\right|<\sigma$.

DIMOSTRAZIONE: Poichè $(\Phi, H) \in M(\{\emptyset\}, X, \mathcal{A}_c)$, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $a_\varepsilon \in \boldsymbol{R}$ tale che

$$H(x) < a_\varepsilon + \varepsilon \Phi(x) \quad \text{per ogni } x \in D_H \cap D_\Phi ;$$

ora, se vale (1.8.0), se $\sigma \in \boldsymbol{R}_+$ e se $x \in D_\Phi \cap D_H$ è tale che $0 < H(x) < +\infty$, si ha che

$$\frac{\Phi(x)}{H(x)} > 2\sigma \left(1 - \frac{a_{1/(2\sigma)}}{H(x)}\right) > \sigma ,$$

ove l'ultima diseguaglianza vale se x è tale che $a_{1/(2\sigma)}/H(x) < 1/2$ e quindi in particolare se $x \in D_\Phi \cap D_H \cap Y_{2a_{1/(2\sigma)},1}$ è tale che $0 < H(x) < +\infty$; pertanto basta scegliere $U_\sigma = Y_{2a_{1/(2\sigma)},1}$ (se $\sigma \in \boldsymbol{R}_+$), $U_\sigma = Y_{2a_{1,1}}$ (se $\sigma \leq 0$); inoltre, se vale (1.8.2), se $\sigma \in \boldsymbol{R}_+$ e se $x \in D_\Phi \cap D_H$ è tale che $-\infty < \Phi(x) < 0$, si ha che

$$\frac{H(x)}{\Phi(x)} > \frac{a_{1+1/\sigma}}{\Phi(x)} + 1 + \frac{1}{\sigma} > \frac{1}{\sigma} ,$$

ove l'ultima diseguaglianza vale se x è tale che $a_{1+1/\sigma}/\Phi(x) > -1$ e quindi in particolare se $x \in D_\Phi \cap D_H \cap Y_{a_{1+1/\sigma},2}$ è tale che $-\infty < \Phi(x) < 0$; pertanto basta scegliere $V_\sigma = Y_{a_{1+1/\sigma},2}$ $(\sigma \in \boldsymbol{R}_+)$.

1.9 OSSERVAZIONI: *a*) Siano X insieme, $\Phi \in \mathfrak{F}(X)$, $H \in \mathcal{H}(X)$; $\mathcal{F} \subset 2^X$ verifichi (1.3.0).

Allora, se $(\Phi, H) \in M(\{\emptyset\}, X, \mathcal{A}_c)$, se valgono (1.8.0), (1.8.2) e se esiste $Y \in \mathcal{F}$ per cui

$$\Phi(x) > 0 \quad \text{per ogni } x \in D_\Phi \cap D_H \cap Y \text{ tale che } H(x) = 0 ,$$
$$H(x) < 0 \quad \text{per ogni } x \in D_\Phi \cap D_H \cap Y \text{ tale che } \Phi(x) = 0 ,$$

si ha che $(\Phi, H) \in M(\{\emptyset\}, X, \mathcal{C}_\mathcal{F})$.

Infatti basta sfruttare che da « $(\Phi, H) \in M(\{\emptyset\}, X, \mathcal{A}_c)$ » segue che

$$H(x) < +\infty \quad \text{per ogni } x \in D_\Phi \cap D_H \tag{1.9.0}$$
$$\Phi(x) > -\infty \quad \text{per ogni } x \in D_\Phi \cap D_H ,$$

tener conto di (1.3.0) ed utilizzare l'Osservazione 1.3 *b*) ed il Teorema 1.8.

b) Si noti che, se (Y, ϱ) è uno spazio topologico, $X \subset Y$, $y_0 \in D(X)$, se $\mathcal{F} = \{U \cap X : U \in \mathfrak{U}\}$ ove $\mathfrak{U}$ è un sistema fondamentale di intorni di y_0, allora vale (1.3.0) e, se vale (1.9.0), le condizioni (1.8.0) e (1.8.2) si possono

riscrivere rispettivamente nel seguente modo:

$$\lim_{\substack{x \to y_0 \\ \{x \in D_\bullet \cap D_H : 0 < H(x) < +\infty\}}} H(x) = +\infty \quad \big(\text{se } y_0 \in D(\{x \in D_\bullet \cap D_H : 0 < H(x) < +\infty\})\big)$$

e

$$H(y_0) < 0 \quad (\text{se } y_0 \in D_\bullet \cap D_H)$$

e

$$\lim_{\substack{x \to y_0 \\ \{x \in D_\bullet \cap D_H : -\infty < \Phi(x) < 0\}}} \Phi(x) = -\infty \quad \big(\text{se } y_0 \in D(\{x \in D_\bullet \cap D_H : -\infty < \Phi(x) < 0\})\big)$$

e

$$\Phi(y_0) > 0 \quad (\text{se } y_0 \in D_\bullet \cap D_H).$$

c) Siano T, X, $\mathcal{S}$, Z, $\mathfrak{R}$ come nell'Osservazione 1.2 *a*) e si supponga che $\mathcal{S}$ sia un anello (quanto si affermerà nel seguito di questa osservazione vale, anche senza tale ipotesi, purchè ci si riferisca sempre allo stesso sottoinsieme di T con complementare in $\mathcal{S}$), siano $g \in \mathcal{G}(T \times X)$, $h \in \mathcal{K}(T \times X)$, $\mathcal{F} \subset 2^Z$. Allora, utilizzando le notazioni delle Osservazioni 1.2 *a*) e *b*), per la coppia (g, h) si possono ottenere risultati del tutto simili a quelli dell'Osservazione 1.3 *b*), del Teorema 1.6 *a*) e del Teorema 1.8 (ove, a ciascuna delle condizioni (1.3.1), (1.3.2), (1.3.3), (1.6.1), (1.6.2), (1.8.0), (1.8.1), (1.8.2), (1.8.3) si sostituisca l'esistenza di un sottoinsieme di T, con complementare in $\mathcal{S}$, tale che per ogni punto t di tale insieme valga la corrispondente condizione per la coppia $(g(t, \cdot), h(t, \cdot))$, ove alle classi $M(\{0\}, X, \mathcal{C}_{\mathcal{F}})$ e $M(\{0\}, X, A_c)$ si sostituiscano rispettivamente le classi $M(\mathfrak{R}, T \times X, A_{\mathcal{F}})$ e $M(\mathfrak{R}, T \times X, A_f)$ ed ove si tenga conto dell'Osservazione 1.2 *g*)); si possono inoltre ottenere risultati « di tipo uniforme » simili a quelli dell'Osservazione 1.3 *b*), del Teorema 1.6 *a*) e del Teorema 1.8 (ove, a ciascuna delle condizioni (1.3.1), (1.3.2), (1.3.3), (1.6.1), (1.6.2), (1.8.0), (1.8.1), (1.8.2), (1.8.3) si sostituisca l'esistenza di un sottoinsieme di T, con complementare in $\mathcal{S}$, tale che per ogni punto t di tale insieme valga la corrispondente condizione per la coppia $(g(t, \cdot), h(t, \cdot))$ (in modo uniforme rispetto a t), ove alle classi $M(\{0\}, X, \mathcal{C}_{\mathcal{F}})$ e $M(\{0\}, X, A_c)$ si sostituiscano rispettivamente le classi

$$M(\mathfrak{R}, T \times X, \mathcal{C}_{\{T \times Y : Y \in \mathcal{F}\}}) \quad \text{e} \quad M(\mathfrak{R}, T \times X, A_c));$$

infine valgono, anche per questi casi, degli analoghi dell'Osservazione 1.3 *c*) e di *a*) e di *b*) di queste Osservazioni e, nel caso « uniforme », i limiti che compaiono in *b*) e nell'Osservazione 1.3 *c*) sono limiti uniformi (in tale caso si noti però che le condizioni ivi nominate si possono riscrivere sotto la forma di « limite uniforme » se il punto y_0 è nel derivato di ciascuno degli insiemi considerati); si noti anche che, tenendo conto di (1.3.7) dell'Osservazione 1.3 *c*), se μ, $\mathfrak{R}$, A_∞ sono come in iii) dell'Osservazione 1.2 *a*), nel caso « uniforme » si possono riscrivere i risultati citati sostituendo a $M(\mathfrak{R}, T \times X, A_c)$ la classe $M(\mathfrak{R}, T \times X, A_\infty)$.

1.10 Osservazioni: Siano T, X, $\mathcal{S}$, Z, $\mathcal{R}$ come nell'Osservazione 1.2 *a*), inoltre X sia uno spazio normato su $\boldsymbol{R}$, $g \in \mathcal{G}(T \times X)$. Allora, utilizzando le notazioni delle Osservazioni 1.2 *a*) e *b*):

a) in analogia a quanto già visto nell'Osservazione 1.7 *a*), utilizzando il Teorema 1.8, le Osservazioni 1.9 *a*) e *b*), le Osservazioni 1.3 *b*) e *c*) ed il Teorema 1.6 *a*) (considerando $\mathcal{F} = \{X \setminus S_X(0, i) : i \in \boldsymbol{R}_+\}$ e, nelle Osservazioni 1.9 *b*) e 1.3 *c*), come (Y, ϱ) lo spazio $(X_\infty, \mathcal{Z}(X))$ e $y_0 = \infty$) e tenendo conto dell'Osservazione 1.9 *c*), si ottiene che

a') se

(1.10.0) $(g, |\ |_X \circ \mathrm{pr}^2) \in M(\mathcal{R}, T \times X, \mathcal{A}_t)$

e $T_0 \subset T$, con $T \setminus T_0 \in \mathcal{S}$, è relativo a tale appartenenza,

risulta che per ogni $t \in T_0$ per cui $(D_g)_t$ è non limitato

$$\lim_{\substack{x \to \infty \\ x \in (D_g)_t}} \frac{g(t, x)}{|x|_X} = +\infty \tag{1.10.1}$$

(il che equivale a «$(g, |\ |_X \circ \mathrm{pr}^2) \in M(\mathcal{R}, T \times X, \mathcal{A}_{[X \setminus S_X(0,i)) \times \boldsymbol{R}_+)}$ e T_0 è relativo a tale appartenenza»); viceversa, se esiste $T_0 \subset T$, con $T \setminus T_0 \in \mathcal{S}$ tale che valga (1.10.1) per ogni $t \in T_0$ per cui $(D_g)_t$ è non limitato e se per ogni $i \in \boldsymbol{R}_+$ e per ogni $t \in T_0$ la funzione $g(t, \cdot)|_{X \setminus S_X(0,i) \cap (D_g)_t}$ è inferiormente limitata, si ha che vale (1.10.0);

a'') se

(1.10.2) $(g, |\ |_X \circ \mathrm{pr}^2) \in M(\mathcal{R}, T \times X, \mathcal{A}_\infty)$

e $T_0 \subset T$, con $T \setminus T_0 \in \mathcal{S}$, è relativo a tale appartenenza,

si ha che

(1.10.3) per ogni $\sigma \in \boldsymbol{R}$ esiste $i_0 \in \boldsymbol{R}_+$ tale che

$$\text{se } (t, x) \in D_g \cap \left(T_0 \times (X \setminus S_X(0, i_0))\right) \text{ si abbia che } \frac{g(t, x)}{|x|_X} > \sigma;$$

viceversa, se esiste $T_0 \subset T$, con $T \setminus T_0 \in \mathcal{S}$ tale che valga (1.10.3) e se per ogni $i \in \boldsymbol{R}_+$ la funzione $g|_{D_g \cap (T_0 \times S_X(0,i))}$ è inferiormente limitata, si ha che vale (1.10.2);

b) se vale (1.10.0) e se esiste $Y \subset X$ tale che $D_g = T \times Y$ e se $g(t, x) = g(t', x)$ per ogni $t, t' \in T_0$, $x \in Y$, allora la funzione $x \in Y \mapsto g(t, x) \in [-\infty, +\infty[$ $(t \in T_0)$ verifica la condizione posta in (1.7.0) su Φ (si è tenuto conto di *a'*));

c) se μ, $\mathcal{R}$ sono come in iii) dell'Osservazione 1.2 *a*), se μ è completa, ϱ è una topologia su X tale che (X, ϱ) sia suslliniano, $(t, x) \in T \times X \mapsto |x|_X \in [0, +\infty[$ è $(\mathfrak{L} \times \mathcal{B}(\varrho))$-misurabile, $D_g \in \mathfrak{L} \times \mathcal{B}(\varrho)$, g è $(\mathfrak{L} \times \mathcal{B}(\varrho))|_{D_g}$-misurabile e se esiste $T_0 \subset T$, con $T \setminus T_0 \in \mathcal{S}$ tale che valga (1.10.1) per ogni $t \in T_0$ per cui $(D_g)_t$ è non limitato, se per ogni $i \in \boldsymbol{R}_+$ e per ogni $t \in T_0$ la funzione $g(t, \cdot)|_{[x \in 0, \Omega \cap (D_g)_t}$ è inferiormente limitata, risulta che

$$(g, | \ |_X \circ \mathrm{pr}^2) \in M(\mathcal{R}, T \times X, \mathcal{A}_\infty)$$

(si noti che, se $\varrho = w(X)$, l'ipotesi sulla misurabilità della norma è soddisfatta, in quanto le sfere chiuse di X sono anche debolmente chiuse).

Basta sfruttare *a'*) ed il Teorema 1.5.

1.11 Osservazioni: *a*) Si noti che, se μ, X, $\mathcal{R}$, ϱ, g sono come nell'Osservazione 1.10 *c*) e anche se si aggiunge l'ipotesi che μ sia finita, non è detto che sia $(g, | \ |_X \circ \mathrm{pr}^2) \in M(\mathcal{R}, T \times X, \mathcal{A}_1)$ (ove $\mathcal{A}_1$ è come in iii) dell'Osservazione 1.2 *a*)).

Basta infatti considerare $T =]0, 1]$, $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}(]0, 1])$, μ la misura di Lebesgue su $]0, 1]$, $X = \boldsymbol{R}$, ϱ la topologia euclidea, $D_g =]0, 1] \times \boldsymbol{R}$,

$$g(t, x) = \begin{cases} x^2 - \left(\frac{1}{t}\right)^2 & \text{se } |x| > \frac{1}{t} \\ 0 & \text{se } |x| \leq \frac{1}{t}. \end{cases}$$

Allora $\lim_{x \to +\infty} g(t, x)/|x| = +\infty$ per ogni $t \in]0, 1]$; inoltre g è $(\mathfrak{L} \times \mathcal{B}(\varrho))$-misurabile per [BA1] (Teorema 4.8) e per l'Osservazione 0.6; ma $(g, | \ |\circ \mathrm{pr}^{\boldsymbol{R}}) \notin M(\mathcal{R},]0, 1] \times \boldsymbol{R}, \mathcal{A}_1)$ poichè, se $a:]0, 1] \to [-\infty, +\infty[$ è tale che

$$|x| \leq a(t) + g(t, x) \quad \text{per q.o. } t \in]0, 1] \text{ e per ogni } x \in \boldsymbol{R},$$

risulta che $a(t) \geq 1/t$ per q.o. $t \in]0, 1]$ e quindi $a \notin \mathfrak{L}^1(\mu)$.

b) Se μ, $\mathcal{R}$ sono come in iii) dell'Osservazione 1.2 *a*), tenendo conto di (1.3.5) dell'Osservazione 1.3 *e*) ed utilizzando le notazioni dell'Osservazione 1.10 *a*), risulta che « $(g, | \ |_X \circ \mathrm{pr}^2) \in M(\mathcal{R}, T \times X, \mathcal{A}_p)$ » (con $p \in [1, \infty[$) implica l'esistenza di un insieme $T_0 \in \mathfrak{L}$, con $\mu(T \setminus T_0) = 0$, tale che valga (1.10.1) per ogni $t \in T_0$ per cui $(D_g)_t$ è non limitato (ove $\mathcal{A}_p$ ($p \in [1, \infty[$) sono come in iii) dell'Osservazione 1.2 *a*)]. Ciò significa che una funzione g che « maggiora integralmente con potenza p » la norma composta con la proiezione sul secondo fattore verifica una condizione di Nagumo quando $x \to \infty$ su quasi ogni « iperpiano » $\{(t, x): x \in X\}$; ci si può allora chiedere se valga per g una condizione del tipo di Nagumo quando $x \to \infty$ anche se ci si muove su una « ipersuperficie » $\{(t, x) \in T \times X: t = \vartheta(x)\}$ ($\vartheta: X \to T$ applicazione):

ma questo non è vero; infatti è possibile trovare T, $\mathcal{X}$, μ, $\mathfrak{K}$ verificanti le condizioni poste sopra ed una funzione $g\colon T\times\mathcal{X}\to[0,+\infty[$ tale che $(g,\,|\,|_x\circ\mathrm{pr}^x)\in M(\mathfrak{K},\,T\times X,\,\mathcal{A}_0)$ e che

(1.11.0) per ogni $N\in\mathfrak{L}$, con $\mu(N)=0$, esista un'applicazione $\vartheta_N\colon\mathcal{X}\to T\setminus N$, ϑ_N a valori numerabili per la quale si abbia

$$\lim_{x\to\infty}\frac{g(\vartheta_N(x),x)}{|x|_x}=0\,;$$

inoltre si può fare in modo che esista anche un'applicazione $\vartheta\colon\mathcal{X}\to T$ tale che

$$\lim_{x\to\infty}\frac{g(\vartheta(x),x)}{|x|_x}=0\,, \tag{1.11.1}$$

$$\vartheta(\mathcal{X}\setminus S_x(0,i))\in\mathfrak{L}\ \text{ e }\ \mu\big(\vartheta(\mathcal{X}\setminus S_x(0,i))\big)>0\ \text{ per ogni } i\in\boldsymbol{R}_+\,.$$

Ad esempio siano $T=[0,1]$, $\mathfrak{L}=\mathfrak{L}([0,1])$, μ la misura di Lebesgue su $[0,1]$, $\mathcal{X}=\boldsymbol{R}$, $k\colon[0,+\infty[\times[0,+\infty[\to[0,+\infty[$ tale che

$$\frac{k(a,b)}{a}\xrightarrow[a\to+\infty]{}+\infty\quad\text{per ogni } b\in[0,+\infty[\,,$$

$\varphi\colon[0,1]\to[0,+\infty]$ continua, bigettiva, $T_0=\{t\in[0,1]\colon\varphi(t)<+\infty\}$,

$$g(t,\tau)=\begin{cases}k(|\tau|,\varphi(t)) & \text{se } \varphi(t)<|\tau|\\ 0 & \text{se } \varphi(t)>|\tau|\,.\end{cases}$$

Per l'ipotesi fatta su k, per ogni $\varepsilon>0$ esiste $A_\varepsilon>0$ tale che se $a,b\in[0,+\infty[$, $a-b>A_\varepsilon$, sia $k(a,b)/(a-b)>1/\varepsilon$. Sia

$$b_\varepsilon\colon[0,1]\to[0,+\infty[\,,\quad b_\varepsilon(t)=\begin{cases}\varphi(t)+A_\varepsilon & \text{se } \varphi(t)<+\infty\\ 0 & \text{se } \varphi(t)=+\infty\end{cases}\qquad(\varepsilon>0).$$

Si ha allora che $|\tau|<b_\varepsilon(t)+\varepsilon g(t,\tau)$ per ogni $(t,\tau)\in T_0\times\boldsymbol{R}$. Sia infatti $t\in T_0$. Allora se $|\tau|<b_\varepsilon(t)$ si ha che $|\tau|<b_\varepsilon(t)+\varepsilon g(t,\tau)$ e se $|\tau|>b_\varepsilon(t)$ allora $|\tau|-\varphi(t)>A_\varepsilon$ e quindi $k(|\tau|,\varphi(t))/(|\tau|-\varphi(t))>1/\varepsilon$, da cui

$$|\tau|<\varphi(t)+\varepsilon k(|\tau|,\varphi(t))<b_\varepsilon(t)+\varepsilon g(t,\tau)\,.$$

Inoltre, se $\vartheta(\tau)=\varphi^{-1}(|\tau|)$ per ogni $\tau\in\boldsymbol{R}$, si ha che $g(\vartheta(\tau),\tau)/|\tau|=0$ per ogni $\tau\in\boldsymbol{R}\setminus\{0\}$ visto che $\varphi(\vartheta(\tau))=|\tau|$ per ogni $\tau\in\boldsymbol{R}$. Visto che poi, per le ipotesi fatte su φ, φ è strettamente monotona, ϑ risulta essere continua e $\vartheta(\boldsymbol{R}\setminus]-i,i[)$ è un sottointervallo di $[0,1]$ di misura positiva (per ogni $i\in\boldsymbol{R}_+$) e quindi vale (1.11.1).

Sia ora $N \in \mathfrak{L}([0,1])$, $\mu(N)=0$; si proverà l'esistenza di un'applicazione $\vartheta_N : \boldsymbol{R} \to [0,1] \setminus N$ che verifichi le condizioni di (1.11.0) nel caso in cui φ è strettamente decrescente (l'altro caso è del tutto analogo); basta considerare

(1.11.2) $\quad \vartheta_N : \boldsymbol{R} \to [0,1] \setminus N$ a valori numerabili tale che

$$\vartheta_N(\tau) < \vartheta(\tau) \quad \text{per ogni } \tau \in \boldsymbol{R};$$

infatti, se ϑ_N è come in (1.11.2), si ha che $g(\vartheta_N(\tau), \tau)/|\tau| = 0$ per ogni $\tau \in \boldsymbol{R} \setminus \{0\}$ visto che $\varphi(\vartheta_N(\tau)) > \varphi(\vartheta(\tau)) = |\tau|$ per ogni $\tau \in \boldsymbol{R}$; d'altra parte esistono applicazioni ϑ_N come in (1.11.2): per ogni $n \in \boldsymbol{N}$ si consideri $t_n \in [0,1] \setminus N$, $t_n < \vartheta(n+1)$ (tali t_n $(n \in \boldsymbol{N})$ esistono poichè, nelle ipotesi fatte, $\vartheta(\tau) > 0$ per ogni $\tau \in \boldsymbol{R}$) e sia $\vartheta_N(\tau) = t_n$ se $|\tau| \in [n, n+1[$ $(n \in \boldsymbol{N})$.

Se ora $p \in [1, \infty[$ e $\varphi \in \mathfrak{L}^p(\mu,]-\infty, +\infty])$ oltre a verificare le condizioni precedenti (una siffatta φ esiste: ad esempio basta considerare

$$\varphi(t) = \begin{cases} -\ln t & \text{se } t \in]0,1] \\ +\infty & \text{se } t = 0 \end{cases} \qquad \text{per ogni } p \in [1, \infty[\Big),$$

allora si ha anche che $(g, |\ |\circ \mathrm{pr}^{\boldsymbol{R}}) \in M(\mathcal{R}, [0,1] \times \boldsymbol{R}, \mathcal{A}_p)$ poichè $b_\varepsilon \in \mathfrak{L}^p(\mu, \boldsymbol{R})$ per ogni $\varepsilon > 0$. Inoltre, se k è continua e se $k(a,a) = 0$ per ogni $a \in [0, +\infty[$ (ad esempio $k(a,b) = \Phi(a-b)$ con $\Phi : \boldsymbol{R} \to [0, +\infty]$ continua tale che valga (1.7.0) e $\Phi(0) = 0$), allora g è continua. Infine si noti che si può scegliere φ in modo che ϑ sia di classe $\mathcal{C}^\infty$.

Un altro confronto tra le funzioni Φ che verificano (1.7.0) e le funzioni g che « maggiorano integralmente » la norma composta con la proiezione sul secondo fattore lo si può ottenere (cfr. Osservazione 1.13 *b*)) mediante il risultato del numero seguente.

1.12 Teorema: Siano $\mathfrak{L}$ σ-algebra su T, $\mu : \mathfrak{L} \to [0, +\infty]$ misura, X insieme, $\mathcal{R} = \{S \times X : S \in \mathfrak{L},\ \mu(S) = 0\}$, $p \in [1, \infty]$, $g \in \mathcal{G}(T \times X)$, $b \in \mathcal{K}(T \times X)$. Allora, utilizzando le notazioni di ii) e di iii) dell'Osservazione 1.2 *a*):

a) se $(g, b) \in M(\mathcal{R}, T \times X, \mathcal{A}_p)$ [risp. $(g, b) \in M(\mathcal{R}, T \times X, \mathcal{A}_\infty)$ e μ è σ-finita], si ha che esistono $A_n \in \mathfrak{L}$, $A_n \subset A_{n+1}$ $(n \in \boldsymbol{N})$ tali che

$$\mu\Big(T \setminus \Big(\bigcup_{n \in \boldsymbol{N}} A_n\Big)\Big) = 0$$

e per ogni $n \in \boldsymbol{N}$ esiste $\Phi_n :]-\infty, +\infty] \to]-\infty, +\infty]$ continua, convessa e debolmente crescente tale che $\Phi_n(\tau) \in \boldsymbol{R}$ se $\tau \in \boldsymbol{R}$, $\Phi_n \geq \inf g$, $\Phi_n(\tau)/\tau \to +\infty$ se $\tau \to +\infty$, $\Phi_n(\tau)/\tau \to 0$ se $\tau \to -\infty$ e $g(t,x) \geq \Phi_n(b(t,x))$ per ogni $(t,x) \in$ $\in D_g \cap D_b \cap (A_n \times X)$; inoltre si può fare in modo che se $p \in [1, \infty[$ e $(g, b) \in$ $\in M(\mathcal{R}, T \times X, \mathcal{A}_p)$ sia $\mu(T \setminus A_n) < 1/(n+1)$ per ogni $n \in \boldsymbol{N}$, se $(g, b) \in$ $\in M(\mathcal{R}, T \times X, \mathcal{A}_\infty)$ sia $(A_n, \Phi_n)_{n \in \boldsymbol{N}}$ costante;

b) se esistono $A_n \in \mathfrak{L}$ $(n \in \boldsymbol{N})$ tali che $\mu\left(T \setminus \left(\bigcup_{n \in \boldsymbol{N}} A_n\right)\right) = 0$ e se per ogni $n \in \boldsymbol{N}$ esiste $\varphi_n : T \times X \to [-\infty, +\infty]$ funzione tale che

$$(\varphi_n|_{D_n}, b|_{D_n \cap (A_n \times X)}) \in M(\mathcal{R}_n, A_n \times X, \mathcal{A}_{m,n}) \quad (n \in \boldsymbol{N})$$

(ove $D_n = \{(t, x) \in A_n \times X : \varphi_n(t, x) < +\infty\}$, $\mathcal{R}_n = \{S \times X : S \in \mathfrak{L},\ S \subset A_n,\ \mu(S) = 0\}$ $(n \in \boldsymbol{N})$, $\mathcal{A}_{m,n}$ è l'insieme $\mathcal{A}_m$ dell'Osservazione 1.2 *a*), relativamente ad A_n $(n \in \boldsymbol{N})$) e $g(t, x) \geqslant \varphi_n(t, x)$ per ogni $(t, x) \in D_g \cap D_b \cap (A_n \times X)$, si ha che $(g, b) \in M(\mathcal{R}, T \times X, \mathcal{A}_m)$; se inoltre

$$(\varphi_n|_{D_n}, b|_{D_n \cap (A_n \times X)}) \in M(\mathcal{R}_n, A_n \times X, \mathcal{A}_{m,n}) \quad (n \in \boldsymbol{N})$$

(ove $\mathcal{A}_{m,n}$ è l'insieme $\mathcal{A}_m$ dell'Osservazione 1.2 *a*), relativamente ad A_n $(n \in \boldsymbol{N})$) e se $(A_n, \varphi_n)_{n \in \boldsymbol{N}}$ è costante, si ha anche che $(g, b) \in M(\mathcal{R}, T \times X, \mathcal{A}_m)$.

Dimostrazione: *a*) Dalle ipotesi e per l'Osservazione 1.3 *d*) esiste $T_0 \in \mathfrak{L}$ con $\mu(T \setminus T_0) = 0$ e per ogni $i \in \boldsymbol{Z}_+$ esistono $a_i, b_i \in \mathfrak{L}^0(\mu, \boldsymbol{R})$ [risp. $a_i, b_i : T \to \boldsymbol{R}$ funzioni $\mathfrak{L}$-misurabili] tali che

$$b(t, x) \leqslant a_i(t) + \frac{1}{i} g(t, x), \quad b(t, x) \leqslant b_i(t) + i g(t, x) \tag{1.12.0}$$

per ogni $(t, x) \in D_a \cap D_b \cap (T_0 \times X)$.

Si proverà ora che esistono $A_n \in \mathfrak{L}$, $A_n \subset A_{n+1}$, $A_n \subset T_0$ $(n \in \boldsymbol{N})$ tali che $\mu\left(T \setminus \left(\bigcup_{n \in \boldsymbol{N}} A_n\right)\right) = 0$ (e con $\mu(T \setminus A_n) < 1/(n+1)$ per ogni $n \in \boldsymbol{N}$ (se $a_i, b_i \in \mathfrak{L}^p(\mu, \boldsymbol{R})$ $(i \in \boldsymbol{Z}_+)$), con $(A_n)_{n \in \boldsymbol{N}}$ costante (se $a_i, b_i \in \mathfrak{L}^\infty(\mu, \boldsymbol{R})$ $(i \in \boldsymbol{Z}_+)$)) per i quali

$$\sup_{i \in \boldsymbol{Z}_+} (|a_i(t)| \vee |b_i(t)|) < +\infty \quad \text{per ogni } n \in \boldsymbol{N},\ i \in \boldsymbol{Z}_+. \tag{1.12.1}$$

Ciò è ovvio se $a_i, b_i \in \mathfrak{L}^\infty(\mu, \boldsymbol{R})$ $(i \in \boldsymbol{Z}_+)$ e si può vedere così negli altri casi:

i) se a_i, b_i sono funzioni $\mathfrak{L}$-misurabili $(i \in \boldsymbol{Z}_+)$ e se μ è σ-finita, basta considerare $A_{n,i} = \{t \in T_0 : |a_i(t)| \vee |b_i(t)| \leqslant n\}$ $(n \in \boldsymbol{N},\ i \in \boldsymbol{Z}_+)$ ed applicare [BA1] (Corollario 1.38, di cui vale l'ipotesi *a*));

ii) se $p \in [1, \infty[$ e se $a_i, b_i \in \mathfrak{L}^p(\mu, \boldsymbol{R})$ $(i \in \boldsymbol{Z}_+)$, per la diseguaglianza di Tchebychev per ogni $i \in \boldsymbol{Z}_+$ esistono $A_{n,i} \in \mathfrak{L}$, $A_{n,i} \subset T_0$ $(n \in \boldsymbol{N})$ tali che

$$\mu(T \setminus A_{n,i}) < \frac{1}{n+1}, \quad A_{n,i} \subset A_{n+1,i}, \quad \sup_{t \in A_{n,i}} (|a_i(t)| \vee |b_i(t)|) < +\infty$$

per ogni $n \in \boldsymbol{N}$ e pertanto basta considerare $A_n = \bigcap_{i \in \boldsymbol{Z}_+} A_{(n+1)2^i-1,i}$.

Ora si costruiranno delle funzioni Φ_n ($n \in \boldsymbol{N}$) tali da verificare la tesi.

Sia $n \in \boldsymbol{N}$. Da (1.12.0) e da (1.12.1) segue che per ogni $i \in \boldsymbol{Z}_+$ esiste $M_{n,i} \in \boldsymbol{R}$ tale che

$$b(t,x) < M_{n,i} + \frac{1}{i} g(t,x), \quad b(t,x) < M_{n,i} + i g(t,x)$$

per ogni $(t,x) \in D_g \cap D_b \cap (A_n \times X)$.

Sia $\alpha :]-\infty, +\infty] \to]-\infty, +\infty]$ funzione debolmente crescente e inferiormente limitata, con $\alpha(\tau) \in \boldsymbol{R}$ se $\tau \in \boldsymbol{R}$, $\alpha \geqslant \inf g$ e tale che $\lim_{\tau \to +\infty} \alpha(\tau)/\tau = +\infty$

$$\left(\text{ad esempio } \alpha(\tau) = (\inf g) \vee \beta(\tau), \text{ ove } \beta(\tau) = \begin{cases} 0 & \text{se } \tau \in]-\infty, 0] \\ \tau^2 & \text{se } \tau \in]0, +\infty[\\ +\infty & \text{se } \tau = +\infty \end{cases} \right)$$

e sia $\Psi_n :]-\infty, +\infty] \to [-\infty, +\infty]$,

$$\Psi_n(\tau) = \left(\inf_{(t,x) \in D_g \cap D_b \cap (A_n \times X) : b(t,x) \geqslant \tau} g \right) \wedge \alpha(\tau) \quad \text{per ogni } \tau \in]-\infty, +\infty] .$$

Allora $\Psi_n(\tau) < +\infty$ se $\tau \in \boldsymbol{R}$, Ψ_n è debolmente crescente,

$$\Psi_n \geqslant \inf g, \ \Psi_n(b(t,x)) \leqslant g(t,x) \quad \text{per ogni } (t,x) \in D_g \cap D_b \cap (A_n \times X)$$

e, tenendo conto delle proprietà di α, esistono $m_{n,i} \in \boldsymbol{R}$, $m_{n,i} \geqslant M_{n,i}$ tali che

$$\Psi_n(\tau) \geqslant i(\tau - m_{n,i}) \quad \text{e} \quad \Psi_n(\tau) \geqslant \frac{1}{i}(\tau - m_{n,i}) \tag{1.12.2}$$

per ogni $i \in \boldsymbol{Z}_+$, $\tau \in]-\infty, +\infty]$,

quindi $\Psi_n(\tau) \geqslant -\infty$ per ogni $\tau \in]-\infty, +\infty]$; ora, se $\tau \in]-\infty, 0[$, da (1.12.2) segue che

$$\frac{\Psi_n(\tau)}{\tau} \leqslant \frac{1}{i} - \frac{m_{n,i}}{i\tau} \quad \text{per ogni } i \in \boldsymbol{Z}_+$$

e pertanto, se $\varepsilon > 0$ e se $i_\varepsilon \in \boldsymbol{Z}_+$ è tale che $1/i_\varepsilon < \varepsilon/2$ e $\vartheta_\varepsilon \in]-\infty, 0[$ è tale che $-m_{n,i_\varepsilon}/(i_\varepsilon \tau) < \varepsilon/2$ per ogni $\tau \in]-\infty, \vartheta_\varepsilon[$, per $\tau \in]-\infty, \vartheta_\varepsilon[$ si ottiene che

$$\frac{\Psi_n(\tau)}{\tau} < \varepsilon$$

ed essendo d'altra parte $\Psi_n(\tau)/\tau \geqslant \Psi_n(0)/\tau$ per $\tau \in]-\infty, 0[$, si deduce che

$$\lim_{\tau \to -\infty} \frac{\Psi_n(\tau)}{\tau} = 0 ;$$

se $\tau \in]0, +\infty[$ da (1.12.2) segue che

$$\frac{\Psi_n(\tau)}{\tau} \geq i - \frac{i m_{n,i}}{\tau} \quad \text{per ogni } i \in \boldsymbol{Z}_+$$

e, se $K \in \boldsymbol{R}$, se $i_K \in \boldsymbol{Z}_+$ è tale che $i_K > K + 1$ e $\delta_K \in]0, +\infty[$ è tale che $i_K m_{n,i_K}/\tau \leq 1$ per ogni $\tau \in]\delta_K, +\infty[$, per $\tau \in]\delta_K, +\infty[$ si ottiene che

$$\frac{\Psi_n(\tau)}{\tau} > K$$

e quindi

$$\lim_{\tau \to +\infty} \frac{\Psi_n(\tau)}{\tau} = +\infty .$$

Basta ora definire Φ_n nel seguente modo:

$$\Phi_n|_{\boldsymbol{R}} = (\Psi_n|_{\boldsymbol{R}})^{**}, \quad \Phi_n(+\infty) = +\infty$$

e tener conto del Teorema 0.5 (parti *a*), *d*), *b*), *c*)).

b) Dalle ipotesi segue che esiste $T_0 \in \mathfrak{L}$ con $\mu(T \setminus T_0) = 0$ e per ogni $\varepsilon > 0$ e per ogni $n \in \boldsymbol{N}$ esistono $b'_{\varepsilon,n} : A_n \to \boldsymbol{R}$ funzioni $(\mathfrak{L}|_{A_n})$-misurabili tali che

$$h(t, x) \leq b_{\varepsilon,n}(t) + \varepsilon \varphi_n(t, x) \leq b_{\varepsilon,n}(t) + \varepsilon g(t, x)$$

per ogni $(t, x) \in D_n \cap D_h \cap ((A_n \cap T_0) \times X)$:

basta ora considerare $b_\varepsilon : T \to \boldsymbol{R}$, $b_\varepsilon(t) = 0$ se $t \in T \setminus \left(\bigcup_{n \in N} A_n \right)$, $b_\varepsilon(t) = b_{\varepsilon,n}(t)$ se $t \in A_0$, $b_\varepsilon(t) = b_{\varepsilon,n}(t)$ se $t \in A_i \setminus A_{i-1}$ $(i \in \boldsymbol{Z}_+)$. Se

$$(\varphi_n|_{D_n}, b|_{D_n \cap (A_n \times X)}) \in M(\mathcal{R}_n, \mathcal{A}_n \times X, \mathcal{A}_{\infty,n}) \quad (n \in \boldsymbol{N})$$

e se $(\mathcal{A}_n, \varphi_n)_{n \in N}$ è costante, per concludere basta tener conto che per l'Osservazione 1.3 *d*) si può supporre $b_{\varepsilon,n} \in \mathfrak{L}^\infty(\mu, \boldsymbol{R})$ $(\varepsilon > 0)$.

1.13 Osservazioni: *a*) Si noti che le tesi (nei casi «$\mathcal{A}_\infty$» e «$\mathcal{A}_{\infty,\mathcal{A}}$») del Teorema 1.12 *a*) implicano le ipotesi (nei rispettivi casi) del Teorema 1.12 *b*). Si ha infatti (con le notazioni del Teorema 1.12) che:

(1.13.0) se $\mathcal{A} \in \mathfrak{L}$ e se $\Phi :]-\infty, +\infty] \to]-\infty, +\infty]$ è debolmente crescente e tale che $\Phi(\tau) \in \boldsymbol{R}$ se $\tau \in \boldsymbol{R}$,

$$\frac{\Phi(\tau)}{\tau} \to +\infty \text{ se } \tau \to +\infty, \quad \frac{\Phi(\tau)}{\tau} \to 0 \quad \text{se } \tau \to -\infty,$$

allora $(\Phi \circ b|_{D_h \cap (A \times X)}, b|_{D_h \cap (A \times X)}) \in M(\mathcal{R}_A, A \times X, \mathcal{A}_{\infty,A})$

(ove $\mathcal{R}_\lambda = \{S \times X : S \in \mathfrak{L},\ S \subset A,\ \mu(S) = 0\}$ ed $\mathcal{A}_{\infty,\lambda}$ è l'insieme $\mathcal{A}_\infty$ dell'Osservazione 1.2 *a*), relativamente ad $\mathcal{A}$) (basta poi definire

$$\varphi(t,x) = \begin{cases} \Phi(\beta(t,x)) & \text{se } (t,x) \in D_\beta \\ +\infty & \text{se } (t,x) \in (T \times X) \setminus D_\beta \end{cases}$$

e tenere conto di (1.3.5) dell'Osservazione 1.3 *e*)).

Per ottenere (1.13.0) basta sfruttare il Teorema 1.6 *b*) ((1.6.5) è soddisfatta con $N_{\alpha,\beta} = \Phi(\alpha \wedge \beta)$ $(\alpha, \beta \in \boldsymbol{R})$ essendo Φ debolmente crescente), c') del Teorema 1.6 *c*) e l'Osservazione 1.3 *g*).

b) Si noti che, utilizzando le notazioni del Teorema 1.12, se X è spazio normato su $\boldsymbol{R}$ e se si considera $\beta = |\ |_X \circ \mathrm{pr}^2$, il Teorema 1.12 fornisce un confronto fra la condizione di Nagumo e le maggiorazioni funzionali (per quanto riguarda la parte *b*) del teorema, si noti infatti anche che, nel caso appena citato, le ipotesi possono essere sostituite dalle seguenti:

(1.13.1) esistano $A_n \in \mathfrak{L}$ $(n \in \boldsymbol{N})$ tali che $\mu\Big(T \setminus \Big(\bigcup_{n \in \boldsymbol{N}} A_n\Big)\Big) = 0$ e per ogni $n \in \boldsymbol{N}$ esista $\Phi_n : X \to [-\infty, +\infty]$ funzione inferiormente limitata tale che $\Phi_n(x)/|x|_X \to +\infty$ per $x \to \infty$ e $g(t,x) \geq \Phi_n(x)$ per ogni $(t,x) \in D_g \cap (A_n \times X)$ [risp. e inoltre $(A_n, \Phi_n)_{n \in \boldsymbol{N}}$ sia costante]:

difatti, se $n \in \boldsymbol{N}$ e se Φ_n è come in (1.13.1), allora, sfruttando l'Osservazione 1.7 *a*), il Teorema 1.6 *a*) e la c') del Teorema 1.6 *c*), si ottiene che

$$(\Phi_n \circ \mathrm{pr}^2|_{D_n},\ |\ |_X \circ \mathrm{pr}^2|_{A_n \times X}) \in M(\mathcal{R}_n,\ A_n \times X,\ \mathcal{A}_{\infty,n})$$

(ove $D_n = \{(t,x) \in A_n \times X : \Phi_n(x) < +\infty\}$) e basta poi tener conto anche di (1.3.5) dell'Osservazione 1.3 *e*) e definire $\varphi_n(t,x) = \Phi_n(x)$ per ogni $(t,x) \in T \times X$).

1.14 Esempi: I seguenti esempi, tenendo conto anche dell'Osservazione 1.13 *b*), pongono limitazioni ad eventuali miglioramenti di alcuni risultati del Teorema 1.12.

Siano X spazio normato su $\boldsymbol{R}$, $\mathfrak{L}$, μ, $\mathcal{R}$ come nel Teorema 1.12, $p \in [1, \infty[$, $g : D_g \subset T \times X \to [0, +\infty[$ funzione.

a) Se μ non è σ-finita e se $(g,\ |\ |_X \circ \mathrm{pr}^2) \in M(\mathcal{R},\ T \times X,\ \mathcal{A}_\infty)$, non è detto che esistano $A_n \in \mathfrak{L}$ $(n \in \boldsymbol{N})$ con $\mu\Big(T \setminus \Big(\bigcup_{n \in \boldsymbol{N}} A_n\Big)\Big) = 0$ e $\Phi_n : X \to [-\infty, +\infty]$ funzioni $(n \in \boldsymbol{N})$ tali che

$$\text{(1.14.0)} \qquad \frac{\Phi_n(x)}{|x|_X} \to +\infty \quad \text{per } x \to \infty, \quad g(t,x) \geq \Phi_n(x) \quad \text{per ogni } (t,x) \in D_g \cap (A_n \times X)\ (n \in \boldsymbol{N}).$$

b) Anche se μ è σ-finita e se $(g_t \mid |_x \circ \mathrm{pr}^x) \in M(\mathcal{R}, T \times X, \mathcal{A}_m)$, non è detto che esistano $A_n \in \mathfrak{L}$ con $\mu(T \setminus A_n) < 1/(n+1)$ e $\Phi_n : X \to [-\infty, +\infty]$ funzioni ($n \in N$) che verifichino (1.14.0).

c) Se $(g_t \mid |_x \circ \mathrm{pr}^x) \in M(\mathcal{R}, T \times X, \mathcal{A}_m)$, non è detto che esistano $A \in \mathfrak{L}$ con $\mu(T \setminus A) = 0$ e $\Phi : X \to [-\infty, +\infty]$ funzione tale che $\Phi(x)/|x|_x \to +\infty$ per $x \to \infty$, $g(t, x) > \Phi(x)$ per ogni $(t, x) \in D_g \cap (A \times X)$.

d) Se esistono $A_n \in \mathfrak{L}$ con $\mu(T \setminus A_n) < 1/(n+1)$ e $\Phi_n : [0, +\infty[\to [0, +\infty[$ funzioni tali che $\Phi_n(\tau)/\tau \to +\infty$ per $\tau \to +\infty$, $g(t, x) > \Phi_n(|x|_x)$ per ogni $(t, x) \in D_g \cap (A_n \times X)$, non è detto che

$$(g_t \mid |_x \circ \mathrm{pr}^x) \in M(\mathcal{R}, T \times X, \mathcal{A}_m) .$$

e) Siano

$$T = \left\{ \Psi : \boldsymbol{R} \to [0, +\infty] \text{ funzioni tali che } \lim_{x \to +\infty} \Psi(x) = +\infty \right\},$$

$$\mathfrak{L} = 2^T, \quad \mu(A) = \begin{cases} \operatorname{card} A & \text{se } A \text{ è finito} \\ +\infty & \text{se } A \text{ è infinito} \end{cases} \qquad (A \subset T)$$

(ove card A indica la cardinalità di A),

$$X = \boldsymbol{R}, \quad D_g = \{(\Psi, x) \in T \times \boldsymbol{R} : \Psi(|x|) < +\infty\},$$
$$g(\Psi, x) = |x| \Psi(|x|) \text{ per ogni } (\Psi, x) \in D_g .$$

Allora $(g_t \mid |\circ \mathrm{pr}^{\boldsymbol{R}}) \in M(\mathcal{R}, T \times \boldsymbol{R}, \mathcal{A}_m)$ poichè, essendo $\mathfrak{L} = 2^T$ si ha $\mathcal{A}_m = \mathcal{A}_t$ e per la seconda parte dell'Osservazione 1.10 *a*'). Se ora esistessero A_n e Φ_n come nell'enunciato, sarebbe $T \setminus \left(\bigcup_{n \in N} A_n \right) = \emptyset$ e, considerando

$$\Psi_n : \boldsymbol{R} \to [-\infty, +\infty], \quad \Psi_n(x) = \begin{cases} \dfrac{\min \{\Phi_n(x), \Phi_n(-x)\}}{x} & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$$

($n \in \boldsymbol{N}$), si avrebbe che $\lim_{x \to +\infty} \Psi_n(x) = +\infty$ e se si considerassero Ψ e $(x_n)_{n \in N}$ relativi a $(\Psi_n)_{n \in N}$ come nel Teorema 0.4, si otterrebbe $\Psi \in \bigcup_{n \in N} A_n$, per cui esisterebbe $n_0 \in \boldsymbol{N}$ con $\Psi \in A_{n_0}$ e d'altra parte sarebbe $(\Psi, x) \in D_g$ e $g(\Psi, x) = x\Psi(x) < x\Psi_{n_0}(x) \leq \Phi_{n_0}(x)$ per $x > \max\{x_{n_0}, 0\}$, assurdo.

b) Siano $T = [0, +\infty[$, $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}([0, +\infty[)$, μ la misura di Lebesgue su $[0, +\infty[$, $X = \boldsymbol{R}$,

$$g : [0, +\infty[\times \boldsymbol{R} \to [0, +\infty[, \quad g(t, x) = \begin{cases} x^2 - t^2 & \text{se } |x| > t \\ 0 & \text{se } |x| \leq t , \end{cases}$$

Allora, considerando come ϱ la topologia euclidea di $\boldsymbol{R}$, per l'Osservazione 1.10 *e*) si ottiene che $(g, |\ |\circ \mathrm{pr}^{\boldsymbol{R}}) \in M(\mathcal{R}, [0, +\infty[\times \boldsymbol{R}, \mathcal{A}_{\varrho})$. Siano ora $A \in \mathfrak{L}$ e $\Phi: \boldsymbol{R} \to [-\infty, +\infty]$ funzione tale che $\Phi(x)/|x| \to +\infty$ se $x \to \infty$, $g(t, x) > \Phi(x)$ per ogni $(t, x) \in A \times \boldsymbol{R}$. Allora esiste $\theta \in \boldsymbol{R}$ tale che $\Phi(x) > 0$ se $|x| > \theta$ e quindi se $|x| > \theta$ risulta che $g(|x|, x) = 0 < \Phi(x)$, per cui $]\theta, +\infty[\cap \cap A = \emptyset$ e pertanto $\mu(T \setminus A) = +\infty$.

e) Scegliendo

$$\varphi(t) = \begin{cases} -\ln t & \text{se } t \in]0, 1] \\ +\infty & \text{se } t = 0 \end{cases}$$

nell'esempio dell'Osservazione 1.11 *b*) e considerando g relativa a φ come in quell'esempio, risulta che $(g, |\ |\circ \mathrm{pr}^{\boldsymbol{R}}) \in M(\mathcal{R}, [0, 1]\times \boldsymbol{R}, \mathcal{A}_{\varrho})$ per ogni $p \in [1, \infty[$ e da (1.11.1) segue che non esiste $A \in \mathfrak{L}$ con $\mu(T \setminus A) = 0$ e con

$$\lim_{x \to \infty} \frac{g(t, x)}{|x|} = +\infty \quad \text{uniformemente rispetto a } t \in A,$$

per cui non possono esistere A e Φ come nell'enunciato.

d) Siano T, $\mathfrak{L}$, μ, X, $\mathcal{R}$, g come nell'esempio dell'Osservazione 1.11 *a*). Allora $(g, |\ |\circ \mathrm{pr}^{\boldsymbol{R}}) \notin M(\mathcal{R},]0, 1]\times \boldsymbol{R}, \mathcal{A}_1)$ e pertanto, per (1.3.6) dell'Osservazione 1.3 *e*), $(g, |\ |\circ \mathrm{pr}^{\boldsymbol{R}}) \notin M(\mathcal{R},]0, 1]\times \boldsymbol{R}, \mathcal{A}_{\varrho})$ per alcun valore di $p \in [1, \infty]$. D'altra parte scegliendo

$$A_n = \left[\frac{1}{n+2}, 1\right] \quad (n \in \boldsymbol{N})$$

e

$$\Phi_n: [0, +\infty[\to [0, +\infty[, \quad \Phi_n(\tau) = g\left(\frac{1}{n+2}, \tau\right)$$

per ogni $\tau \in [0, +\infty[$ $(n \in \boldsymbol{N})$,

risulta che

$$A_n \in \mathfrak{L}, \quad \mu(T \setminus A_n) \leq \frac{1}{n+1}, \quad \frac{\Phi_n(\tau)}{\tau} \to +\infty \quad \text{per } \tau \to +\infty,$$

$g(t, x) > \Phi_n(|x|)$ per ogni $(t, x) \in A_n \times \boldsymbol{R}$ $\Big($visto che se $t \in A_n$, $|x| > n + 2$ allora $|x| > 1/t$ e pertanto

$$g(t, x) = x^2 - \left(\frac{1}{t}\right)^2 > x^2 - (n+2)^2 = g\left(\frac{1}{n+2}, x\right) = \Phi_n(|x|);$$

se $t \in A_n$, $|x| < n + 2$ allora

$$g(t, x) > 0 = g\left(\frac{1}{n+2}, x\right) = \Phi_n(|x|)\Big) \quad (n \in \boldsymbol{N}).$$

BIBLIOGRAFIA

[Ba] E. J. Balder, *A Unifying Note on Fatou's Lemma in Several Dimensions*, Math. Oper. Res., 9 (1984), 267-275.

[Bo] N. Bourbaki, *Elements of Mathematics; General Topology*, Part I, Hermann (1966).

[BA1] A. Bottaro Aruffo, *Su alcune estensioni del teorema di Scorza Dragoni*, Rend. Accad. Naz. Sci. XL Mem. Mat. Sci. Fis. Natur. (5) 9, Parte 1 (1985), 87-202.

[BA2] A. Bottaro Aruffo, *$(L \times B(y))$-misurabilità e convergenza in misura*, Istit. Lombardo Accad. Sci. Lett. Rend. A, 118 (1984), 203-246.

[BA3] A. Bottaro Aruffo, *Proprietà di inclusione e di uniforme continuità dell'operatore di Nemytskii*, Ricerche Mat., 34 (1985), 59-104.

[BA4] A. Bottaro Aruffo, *Condizioni necessarie e sufficienti per la continuità dell'operatore di sovrapposizione*, Ricerche Mat., 34 (1985), 105-145.

[BA5] A. Bottaro Aruffo, *Sulla rilassazione di alcuni funzionali integrali in dimensione infinita*, Ann. Mat. Pura Appl., (4) 145 (1986), 211-264.

[BA6] A. Bottaro Aruffo, *Confronto di maggiorazioni funzionali*, di prossima pubblicazione su « Ann. Mat. Pura Appl. ».

[BA7] A. Bottaro Aruffo, *Generalizzazioni di condizioni di Nagumo*, di prossima pubblicazione su « Istit. Lombardo Accad. Sci. Lett. Rend. A, 123 (1989) ».

[BA8] A. Bottaro Aruffo, *Proprietà della convessificazione*, di prossima pubblicazione.

[BA9] A. Bottaro Aruffo, *Estensioni di un teorema di De La Vallée Poussin*, di prossima pubblicazione su « Ricerche Mat. ».

[BL] H. Berliocchi - J. M. Lasry, *Intégrandes normales et mesures paramétrées en calcul des variations*, Bull. Soc. Math. France, 101 (1973), 129-184.

[C] G. Choquet, *Lectures on Analysis*, vol. II: *Representation Theory*, W. A. Benjamin (1969).

[CS] L. Cesari - M. B. Suryanarayana, *On Recent Existence Theorems in the Theory of Optimization*, J. Optim. Theory Appl., 31 (1980), 397-415.

[CV] C. Castaing - M. Valadier, *Convex Analysis and Measurable Multifunctions*, Lecture Notes in Math., n. 580, Springer (1977).

[ET] I. Ekeland - R. Temam, *Analyse convexe et problèmes variationnelles*, Dunod, Gauthier-Villars (1974).

[K] J. L. Kelley, *General Topology*, Springer (1955).

[R] W. Rudin, *Functional Analysis*, McGraw-Hill (1973).

Direttore responsabile: Prof. A. Ballio - Autorizz. Trib. di Roma n. 7269 dell'8-12-1959
« Monograf » - Via Collamarini, 5 - Bologna