Rendiconti
Accademia Nazionale delle Scienze detta dei XL
Memorie di Matematica
107° (1989), Vol. XIII, fasc. 19, pagg. 297-305

LUCA PRATELLI (*)

Invariance des notions de semimartingale et d'intégrale stochastique par un changement d'espace (**)

Résumé. — Sur un espace mesurable $(E, \mathcal{E})$, muni d'une filtration, on se donne un processus h, prévisible et borné. On considère ensuite, sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, un couple X, X' de processus càdlàg, ainsi que la filtration engendrée par une v.a. Y à valeurs dans $(E, \mathcal{E})$. Résultat principal: le fait que, par rapport au grossissement habituel de cette filtration, X soit une semimartingale et X' soit l'intégrale stochastique de $h(t, Y(\omega))$ par rapport à X est une propriété qui ne dépend que de la loi de la v.a. $\omega \mapsto (X_\bullet(\omega), X'_\bullet(\omega), Y(\omega))$.

Invarianza delle nozioni di semimartingala e d'integrale stocastico rispetto a un cambiamento di spazio

Riassunto. — Su uno spazio misurabile $(E, \mathcal{E})$, munito di una filtrazione, è assegnato un processo h, prevedibile e limitato. Inoltre, su uno spazio probabilizzato $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, si considera una coppia (X, X') di processi regolari e continui a destra, e la filtrazione generata da una variabile aleatoria Y a valori in $(E, \mathcal{E})$. Risultato principale: il fatto che, rispetto all'ingrandimento abituale di questa filtrazione, X sia una semimartingala e X' sia l'integrale stocastico di $h(t, Y(\omega))$ rispetto a X è una proprietà che dipende soltanto dalla legge della variabile aleatoria $\omega \mapsto (X_\bullet(\omega), X'_\bullet(\omega), Y(\omega))$.

0. - Introduction

On considère l'espace de Skorokhod D, muni de la tribu engendrée par les applications coordonnées.

On se donne en outre un espace mesurable $(E, \mathcal{E})$ et une filtration $(\mathcal{E}_t)_{t \in \mathbb{R}}$ sur cet espace.

Ces données étant fixées, on considère tous les systèmes $(\Omega, \mathcal{A}, P, X, Y)$, tels que $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ soit un espace probabilisé, X un processus sur $(\Omega, \mathcal{A})$, à trajectoires dans D, et Y une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A})$, à valeurs dans $(E, \mathcal{E})$.

(*) Indirizzo dell'Autore: Dipartimento di Matematica, Via Buonarroti 2, I-56100 Pisa.
(**) Memoria presentata il 14 aprile 1989 da Giorgio Letta, socio dell'Accademia.

ISSN-0392-4106

Pour un tel système, on considère la condition suivante:

Sur l'espace $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, *muni du grossissement habituel de la filtration* $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$, *définie par*

$$\mathcal{F}_t = \{Y^{-1}(A) : A \in \mathcal{E}_t\}\,, \tag{0.1}$$

le processus X *est une semimartingale.*

Nous nous proposons de montrer que le fait qu'une telle condition soit remplie est une propriété qui dépend du système considéré *seulement à travers* la loi μ de la variable aléatoire $\omega \mapsto (X_\cdot(\omega), Y(\omega))$ (à valeurs dans $D\times E$).

Autrement dit: si le système $(\Omega, \mathcal{A}, P, X, Y)$ vérifie la condition précédente, il en est de même de tout système $(\Omega', \mathcal{A}', P', X', Y')$ du même type, tel que la loi (selon P') de la variable aléatoire $\omega \mapsto (X'_\cdot(\omega), Y'(\omega))$ soit égale à μ.

Supposons maintenant que, sur l'espace $(E, \mathcal{E})$ muni de la filtration $(\mathcal{E}_t)$, on se donne, en plus, un processus b prévisible et borné.

Ce processus étant fixé, considérons tous les systèmes $(\Omega, \mathcal{A}, P, X, X', Y)$ tels que $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ soit un espace probabilisé, Y une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A})$, à valeurs dans $(E, \mathcal{E})$, et (X, X') un couple de semimartingales sur l'espace $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ muni du grossissement habituel de la filtration $(\mathcal{F}_t)$ définie par (0.1).

Pour tout système de ce type, on peut considérer la condition suivante:

(0.2) *Sur l'espace* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, *muni du grossissement habituel de la filtration* $(\mathcal{F}_t)$ *définie par* (0.1), *la semimartingale* X' *est un représentant de l'intégrale stochastique du processus prévisible*

$$H(t, \omega) = b(t, Y(\omega))$$

par rapport à la semimartingale X.

Nous démontrerons que le fait que cette condition soit remplie dépend du système considéré seulement à travers la loi de la variable aléatoire

$$\omega \mapsto (X_\cdot(\omega), X'_\cdot(\omega), Y(\omega)) \qquad \text{(à valeurs dans } D\times D\times E)\,.$$

Un résultat analogue, concernant un cas particulier de la notion de semimartingale (à savoir, la notion de martingale de carré intégrable), avait été démontré dans [5] sous l'inspiration de [6] (voir aussi [7]): on peut le retrouver en appliquant le résultat précédent à l'espace $E = D\times D$ (muni de la filtration canonique).

1. - Hypothèses, notations, rappels

Dans toute la suite, nous adopterons les notations, le langage et les conventions de [4]. En particulier, un *processus de Stieltjes* sera un processus nul en 0, continu à doite, à variation finie.

Nous désignerons par D l'ensemble de toutes les fonctions réelles définies dans $\mathbf{R}_+$, nulles en 0, réglées, continues à droite. Pour tout élément x de D et tout nombre réel t positif, nous désignerons par x^t l'élément $s \mapsto x(s \wedge t)$ de D.

Nous considérerons D comme un espace mesurable, en le munissant de la tribu $\mathfrak{D}$ engendrée par les applications coordonnées $x \mapsto x(t)$, avec $t \in \mathbf{R}_+$.

Si X est un processus tel que, pour tout ω, la trajectoire $X_\cdot(\omega)$ appartienne à D, l'application $\omega \mapsto X_\cdot(\omega)$, désignée par $X_\cdot$, sera considérée comme une variable aléatoire à valeurs dans $(D, \mathfrak{D})$.

Nous aurons besoin des résultats suivants:

(1.1) (Cf. [5], (2.5)) *Sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, muni d'une filtration vérifiant les conditions habituelles, soient X, Y deux semimartingales, et soit V une version de leur variation mutuelle $[X, Y]$.*

Il existe alors une application mesurable f de $D \times D$ dans D, ne dépendant que de la loi de la variable aléatoire

$$\omega \mapsto (X_\cdot(\omega), Y_\cdot(\omega)),$$

telle que l'on ait

$$P\{\omega : V_\cdot(\omega) = f(X_\cdot(\omega), Y_\cdot(\omega))\} = 1 .$$

(1.2) (Cf. [6], (2.3), ou bien [5], (2.6)) *Soit $(E, \mathcal{E})$ un espace mesurable, et soit h une fonction bornée, mesurable sur $(]0, \infty[\times E, \mathfrak{B}(]0, \infty[) \otimes \mathcal{E})$.*

Il existe alors une application mesurable f de $(D \times E, \mathfrak{D} \times \mathcal{E})$ dans $(D, \mathfrak{D})$, possédant la propriété suivante:

Si, sur un espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{A})$, X est un processus de Stieltjes, Y est une variable aléatoire à valeurs dans $(E, \mathcal{E})$ et Z est le processus de Stieltjes défini par

$$Z(t, \omega) = \int_0^t h(s, Y(\omega))\, X(ds, \omega) ,$$

alors on a, pour tout ω,

$$Z_\cdot(\omega) = f(X_\cdot(\omega), Y(\omega)) .$$

(1.3) (Cf. [1], Ch. VI, Th. 13, p. 83) *Sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, muni d'une filtration vérifiant les conditions habituelles, soit M un processus optionnel.*

Pour que M soit indistinguable d'une martingale continue à droite, il faut et il suffit que, pour tout temps d'arrêt T borné, la variable aléatoire M_T soit intégrable et possède une espérance indépendante de T.

Rappelons que, sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ muni d'une filtration vérifiant les conditions habituelles, un processus X à trajectoires dans D, adapté et tel que chacune des variables aléatoires X_t soit intégrable, est appelé

une *quasimartingale* si la forme linéaire

$$H \mapsto E\Big[\int_0^\infty H\,dX\Big],$$

considérée sur l'espace de Riesz des processus prévisibles élémentaires, est relativement bornée (cf. [2]). Avec cette définition, on peut démontrer le résultat suivant (cf. [3], § 8):

(1.4) *Sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, muni d'une filtration vérifiant les conditions habituelles, soit X un processus à trajectoires dans D.*

Pour que X soit une semimartingale, il faut et il suffit que, pour tout nombre réel t positif, il existe une loi Q de la forme $Q = U.P$, avec U variable aléatoire bornée et partout strictement positive, telle que, pour la loi Q, le processus arrêté $X^{(t)}$ soit une quasimartingale dominée dans L^1.

Rappelons enfin qu'étant donnée, sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, une filtration $(\mathcal{F}_t)$ ne vérifiant pas nécessairement les conditions habituelles, on appelle *grossissement habituel* de $(\mathcal{F}_t)$ la filtration $(\mathcal{G}_t)$ définie par

$$\mathcal{G}_t = \bigcap_{u>t} (\mathcal{F}_u \vee \mathcal{N}) = \Big(\bigcap_{u>t} \mathcal{F}_u\Big) \vee \mathcal{N},$$

où $\mathcal{N} = \{A \in \mathcal{A} : P(A) = 0\}$.

On reconnait immédiatement que:

(1.5) *Tout processus prévisible par rapport au grossissement habituel de $(\mathcal{F}_t)$ est indistinguable d'un processus prévisible par rapport à $(\mathcal{F}_t)$.*

(1.6) *Pour qu'une variable aléatoire positive T soit une temps d'arrêt par rapport au grossissement habituel de $(\mathcal{F}_t)$, il faut et il suffit qu'elle soit équivalente à un temps d'arrêt large de $(\mathcal{F}_t)$.*

Dans toute la suite on suppose fixé un espace mesurable $(E, \mathcal{E})$ muni d'une filtration $(\mathcal{E}_t)$.

Si Y est une variable aléatoire sur un espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{A})$, à valeurs dans $(E, \mathcal{E})$, la filtration $(\mathcal{F}_t)$ définie par (0.1) sera appelée la filtration *engendrée* par Y. On voit facilement que les temps d'arrêt larges de cette filtration sont les fonctions de la forme $T = \tau \circ Y$, avec τ temps d'arrêt large de la filtration $(\mathcal{E}_t)$.

De même, les processus prévisibles pour $(\mathcal{F}_t)$ sont les processus de la forme

$$V(t, \omega) = v(t, Y(\omega)),$$

avec v processus prévisible pour $(\mathcal{E}_t)$.

(1.7) Exemple: Supposons, en particulier, que l'espace E coïncide avec l'espace produit D^I (I étant un ensemble quelconque) muni de la filtration naturelle associée au processus canonique $(t, y) \mapsto y(t)$.

On voit alors que, pour tout processus vectoriel Z sur $(\Omega, \mathcal{A})$, à valeurs dans $\mathbf{R}^I$ et à trajectoires dans D^I, la filtration engendrée par la variable aléatoire $Y(\omega) = Z_\cdot(\omega)$ n'est rien d'autre que la filtration naturelle du processus Z.

A tout processus v sur $(E, \mathcal{E})$ nous associerons la variable aléatoire numérique $\hat{v}$ définie par

$$\hat{v}(\cdot) = \sup_n \sum_{k=1}^{n2^n} |v(k2^{-n}, \cdot) - v((k-1)2^{-n}, \cdot)| , \tag{1.8}$$

ainsi que le processus de Stiletjes $\check{v}$ défini par

$$\check{v}_t = \begin{cases} \lim\limits_{s \downarrow\downarrow t, s \in S} v_s & \text{sur } \left\{ v < \infty, \lim\limits_{s \downarrow\downarrow 0, s \in S} v_s = 0 \right\} , \\ 0 & \text{ailleurs} , \end{cases} \tag{1.9}$$

où S désigne l'ensemble des rationnels dyadiques de la forme $k2^{-n}$, avec n et k entiers positifs.

2. - Résultats préliminaires

(2.1) Théorème: *Il existe un ensemble Λ (resp. Λ') de lois sur $\mathcal{D} \otimes \mathcal{E}$, possédant la propriété suivante:*

Pour tout système $(\Omega, \mathcal{A}, P, X, Y)$ tel que $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ soit un espace probabilisé, X un processus sur $(\Omega, \mathcal{A})$ à trajectoires dans D, et Y une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A})$ à valeurs dans E, les deux conditions suivantes sont équivalentes:

(a) Sur l'espace $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, muni du grossissement habituel de la filtration engendrée par Y, le processus X est une semimartingale (resp. une quasimartingale dominée dans L^1).

(b) La loi, selon P, de la variable aléatoire

$$\omega \mapsto (X_\cdot(\omega), Y(\omega)) \tag{2.2}$$

appartient à l'ensemble Λ (resp. Λ').

Démonstration: Le fait que le processus X soit une quasimartingale dominée dans L^1 signifie que les trois conditions suivantes sont remplies:

1) *Adaptation*: pour tout couple t, u d'instants, avec $t < u$, il existe une fonction réelle f, mesurable sur $(E, \mathcal{E}_u)$, telle que l'on ait

$$P\{X_t = f \circ Y\} = 1 .$$

2) *Domination* dans L^1: $\int \sup_t |X_t| \, dP < \infty$.

3) *Propriété de quasimartingale*: pour tout instant $u > 0$, il existe une constante réelle c telle que l'on ait

$$\int \Big[\sum_{i=1}^{n} f_i(Y)(X_{t_i} - X_{t_{i-1}}) \Big] dP < c$$

pour tout choix des instants t_i, avec $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = u$, et des fonctions f_i, à valeurs dans $[-1, 1]$, telles que f_i soit mesurable sur $(E, \mathcal{E}_{t_{i-1}})$.

Or, dans chacune de ces trois conditions, le système $(\Omega, \mathcal{A}, P, X, Y)$ n'intervient que par l'intermédiaire de la loi de la variable aléatoire (2.2). L'assertion concernant le cas des quasimartingales est donc prouvée.

L'autre assertion en découle immédiatement. Il résulte en effet de (1.4) que, pour que le processus X soit une semimartingale, il faut et il suffit que, pour tout nombre réel t positif, il existe une fonction u mesurable sur $(E, \mathcal{E})$, bornée et partout strictement positive, avec

$$\int u(Y)\, dP = 1 ,$$

telle que, pour la loi $Q = u(Y) \cdot P$, le processus arrêté X^{t} soit une quasimartingale dominée dans L^1, c'est-à-dire telle que la loi, selon Q, de la variable aléatoire

$$\omega \mapsto (X_*^{t}(\omega), Y(\omega))$$

appartienne à Λ'. D'autre part, cette loi peut facilement s'exprimer en fonction de la loi μ de la variable aléatoire (2.2) selon P. (De façon précise, elle est l'image, par l'application $(x, y) \mapsto (x^{t}, y)$, de la loi $f \cdot \mu$, où $f(x, y) = u(y)$).

Les deux assertions du théorème sont donc démontrées.

(2.3) Lemme: *Sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ soient X un processus à trajectoires dans D, et Y une variable aléatoire à valeurs dans $(E, \mathcal{E})$.*

Supposons que, par rapport au grossissement habituel de la filtration engendrée par Y, le processus X soit une quasimartingale dominée dans L^1, c'est-à-dire que la loi μ de la variable aléatoire (2.2) appartienne à l'ensemble Λ' considéré dans le théorème précédent.

Il existe alors, sur l'espace $(E, \mathcal{E})$ muni de la filtration $(\mathcal{E}_t)$, un processus v, nul en 0 et prévisible, possédant la propriété suivante:

(C) Sur l'espace $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ muni du grossissement habituel de la filtration engendrée par Y, le processus prévisible

$$V(t, \omega) = v(t, Y(\omega)) \tag{2.4}$$

est indistinguable du processus de Stieltjes

$$Z(t, \omega) = \tilde{v}(t, Y(\omega)) \tag{2.5}$$

($\tilde{v}$ étant défini par (1.9)), et celui-ci est un compensateur de X.

En outre, la propriété (C) *dépend du système* $(\Omega, \mathcal{A}, P, X, Y)$ *seulement à travers la loi* μ.

Démonstration: Puisque le processus X est une quasimartingale dominée dans L^1, il admet un compensateur prévisible (unique à indistinguabilité près). En vertu de (1.5), un tel compensateur est indistinguable d'un processus nul en 0 et prévisible par rapport à la filtration engendrée par Y, c'est-à-dire d'un processus de la forme (2.4), avec v processus sur $(E, \mathcal{E})$ nul en 0 et prévisible pour la filtration $(\mathcal{E}_t)$. D'après la définition de compensateur, le processus V est indistinguable d'un processus de Stieltjes à variation intégrable: il a donc presque toutes ses trajectories continues à droite et à variation finie sur l'intervalle $[0, \infty[$ tout entier; par conséquent, il est indistinguable du processus Z défini par (2.5).

On a ainsi prouvé l'existence d'un processus possédant la propriété (C). Il reste à verifier que cette propriété ne dépend que de la loi μ.

Remarquons, à cet effet, que la propriété (C) a lieu si et seulement si les deux propriétés suivantes ont lieu à la fois:

(C_1) *Le processus* (optionnel et nul en 0) $X - V$ *est indistinguable d'une martingale continue à droite.*

(C_2) *Le processus* V (qui, d'après (C_1), a presque toutes ses trajectoires continues à droite) *est indistinguable d'un processus de Stieltjes à variation intégrable.*

Or, la propriété (C_1) signifie, d'après (1.3), que si l'on prend, sur l'espace $(E, \mathcal{E})$ muni de la filtration $(\mathcal{E}_t)$, un temps d'arrêt large τ borné, et si l'on pose $T = \tau \circ Y$, on a

$$\int |V_T| \, dP < \infty, \qquad \int (X_T - V_T) \, dP = 0,$$

c'est-à-dire

$$\int |g(Y)| \, dP < \infty, \qquad \int [f(X_\cdot, Y) - g(Y)] \, dP = 0,$$

où f, g désignent les fonctions mesurables définies par

$$f(x, y) = x(\tau(y)) \qquad \text{pour } (x, y) \in D \times E,$$

$$g(y) \quad = v(\tau(y), y) \qquad \text{pour } y \in E.$$

(On remarquera que f est obtenue en composant l'application mesurable $(x, y) \mapsto (\tau(y), x)$ avec le processus canonique $(t, x) \mapsto x(t)$, qui est continu à droite, donc mesurable).

Quant à la propriété (C_2), elle peut se traduire, en utilisant la notation (1.8), par la relation

$$\int h(Y) \, dP < \infty.$$

On voit ainsi que chacune des propriétés (C_1), (C_2) ne dépend que de la loi μ, et ceci achève la démonstration du lemme.

3. - Le résultat principal

(3.1) Théorème: *Etant donné, sur l'espace $(E, \mathcal{E})$ muni de la filtration $(\mathcal{E}_t)$, un processus h prévisible et borné, considérons un système $(\Omega, \mathcal{A}, P, X, X', Y)$ tel que:*

1) *$(\Omega, \mathcal{A}, P)$ soit un espace probabilisé;*

2) *Y soit une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A})$ à valeurs dans $(E, \mathcal{E})$;*

3) *X, X' soit un couple de processus à trajectoires dans D, dont chacun soit une semimartingale sur l'espace $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ muni du grossissement habituel de la filtration engendrée par Y.*

Pour un tel système, le fait que la condition (0.2) soit remplie est une propriété qui dépend seulement de la loi de la variable aléatoire

$$\omega \mapsto (X_\cdot(\omega), X'_\cdot(\omega), Y(\omega)) . \tag{3.2}$$

Démonstration: Plaçons nous d'abord dans le cas particulier où X, X' sont des quasimartingales dominées dans L^1.

Il résulte alors de (2.3) que, sur l'espace $(E, \mathcal{E})$ muni de la filtration $(\mathcal{E}_t)$, il existe un processus v (resp. v') nul en 0 et prévisible, possédant la propriété suivante:

Sur l'espace $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ muni du grossissement habituel de la filtration engendrée par Y, le processus prévisible

$$V(t, \omega) = v(t, Y(\omega)) \qquad \big(\text{resp. } V'(t, \omega) = v'(t, Y(\omega))\big)$$

est indistinguable du processus de Stieltjes

$$Z(t, \omega) = \bar{v}(t, Y(\omega)) \qquad \big(\text{resp. } Z'(t, \omega) = \bar{v}'(t, Y(\omega))\big) ,$$

et celui-ci est un compensateur du processus X (resp. X').

En outre, cette propriété de v (resp. v') ne dépend que de la loi de la variable aléatoire

$$\omega \mapsto (X_\cdot(\omega), Y(\omega)) \qquad \big(\text{resp. } \omega \mapsto (X'_\cdot(\omega), Y(\omega))\big) .$$

Posons $M = X - Z$, $M' = X' - Z'$.

La condition (0.2) est alors vérifiée si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées à la fois:

(*a*) *Z' est indistinguable de l'intégrale stochastique (de Stieltjes) $H \cdot Z$.*

(*b*) *M' est un représentant de l'intégrale stochastique $H \cdot M$.*

Or la condition (a) se traduit simplement par la relation

$$P\Big\{\bigcap_{t\in Q_+}\Big\{\omega: \tilde{v}(t, Y(\omega)) = \int_0^t h(s, Y(\omega))\tilde{v}(ds, Y(\omega))\Big\}\Big\} = 1 .$$

La condition (b) peut se mettre sous la forme

$$[M^c - H\cdot M, M^c - H\cdot M] = 0 ,$$

c'est-à-dire

$$[M^c, M^c] - 2H\cdot[M, M^c] + H^2\cdot[M, M] = 0 .$$

Il résulte alors de (1.1), (1.2) qu'elle est équivalente à una relation de la forme

$$P\big\{\omega: f(X_*(\omega), X'_*(\omega), Y(\omega)) = 0\big\} = 1 ,$$

où f est une fonction réelle mesurable sur $(D\times D\times E, \mathfrak{D}\otimes\mathfrak{D}\otimes\mathcal{E})$, ne dépendant que de la loi de la variable aléatoire (3.2).

L'assertion du théorème est donc prouvée dans le cas particulier envisagé.

Dans le cas général on peut se ramener au cas précédent en remarquant qu'en vertu de (1.4) la condition (0.2) équivaut à la condition suivante:

Pour tout nombre réel t positif, il existe une fonction u mesurable sur $(E, \mathcal{E})$, bornée et partout strictement positive, avec

$$\int u(Y)\,dP = 1 ,$$

telle que, pour la loi $Q = u(Y)\cdot P$, chacun des deux processus $X^{|t}$, $X'^{|t}$ soit une quasi-martingale dominée dans L^2 et que $X'^{|t}$ soit un représentant de l'intégrale stochastique de H par rapport à $X^{|t}$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] C. Dellacherie - P.-A. Meyer, *Probabilités et potentiel*, Chap. V-VIII, Hermann (1980).

[2] G. Letta, *Quasimartingales et formes linéaires associées*, Sém. Prob., XIII, Springer L.N., 721 (1979), 216-226.

[3] G. Letta, *Intégration stochastique*, Boll. Un. Mat. Ital., (2) 2-A (1983), 1-20.

[4] G. Letta, *Martingales et intégration stochastique*, Scuola Normale Superiore, Quaderni, Pisa (1984).

[5] L. Pratelli, *Invarianza di un'equazione stocastica rispetto a un cambiamento di spazio*, Rend. Accad. Naz. Sci. XL Mem. Mat., 106 (1988), Vol. XII.

[6] P. A. Zanzotto, *On the stability of stochastic differential equations « with memory »*, Rend. Accad. Naz. Sci. XL Mem. Mat., 106 (1988), Vol. XII.

[7] P. A. Zanzotto, *A stability theorem for a class of stochastic differential equations « with memory »*, Pubbl. Dip. Mat. Univ. Pisa, n. 242 (1988).