Rendiconti
Accademia Nazionale delle Scienze detta dei XL
Memorie di Matematica
107° (1989), Vol. XIII, fasc. 11, pagg. 197-201

ADRIANA BROGINI BRATTI (*)

Trasporto a reticoli normati di un teorema dicotomico di Okazaki (**)

On a Dichotomyc Theorem of Okazaki Transported to Normed Lattices

SUMMARY. — We give an extension of an Okazaki's theorem, about equivalent-singular dichotomy for quasi-invariant and ergodic measures, on normed lattice G whose dual G' is of type M. We also give an example that shows the relevance of the hypothesis « G' is of type M » for the validity of our theorem.

0. - Y. Okazaki dimostra in [2] un teorema di alternativa per misure quasi invarianti ed ergodiche. Nella nota presente si estende questo risultato al caso che le misure assumano i loro valori in un reticolo normato G il cui duale topologico G' sia di tipo M.

Con un esempio si dimostra poi che la semplice presenza, su G', della norma canonica non sarebbe sufficiente per concludere nel senso qui voluto.

1. - E sia uno spazio vettoriale reale, localmente convesso e di Hausdorff: siano H_i, $i = 1, 2$, due suoi sottospazi e, se E' è il suo duale topologico, si indichi con $C(E, E')$ la σ-algebra in $\mathcal{P}(E)$ generata dagli elementi di E'.

Sia G uno spazio vettoriale normato, con un cono K di elementi non negativi; u sia un elemento di K tale che $\|u\| = 1$. Si supponga che il duale topologico G' di G, con l'ordine parziale dedotto dal cono duale

$$K^\times = \{h \in G' : h(x) \geq 0, \text{ con } x \text{ in } K\},$$

sia un reticolo di tipo M, cioè

$$\forall (h, k) \in K^\times \times K^\times \quad |h \vee k| = |h| \vee |k|,$$

(*) Indirizzo dell'A.: Dipartimento di Statistica, Via S. Francesco 33, I-35100 Padova.
(**) Memoria presentata il 22 dicembre 1988 da Giuseppe Scorza Dragoni, uno dei XL.

ISSN-0392-4106

dove $b \vee k$ indica il minimo dei maggioranti di b e k.

Definizione. *Una misura* $\eta: C(E, E') \to G$ *è un'applicazione tale che*

i) $\forall A$ *in* $C(E, E')$ *si ha*: $\eta(A) \geqq 0$ *e* $\eta(E') = u$;

ii) η *è* σ-*additiva*.

Se le $\eta_i: C(E, E') \to G$ sono due misure, la η_i è H_i-quasi invariante se per ogni x in H_i si ha

$$\forall A \in C(E, E'), \qquad \eta_i(A) = 0 \Leftrightarrow \tau_x(\eta_i)(A) = 0,$$

dove $\tau_x(\eta_i)(A) = \eta_i(A - x)$. Se la η_i è H_i-quasi invariante, essa è H_i-ergodica se

$$\forall A \in C(E, E') \text{ per cui si ha } \eta_i(A \,\Delta\, (A - x)) = 0, \qquad \forall x \in H_i,$$

risulta: o $\eta_i(A) = 0$ oppure $\eta_i(A) = u$ [1].

Si scrive $\eta_1 \sim \eta_2$ (le η_i sono equivalenti) se per ogni A in $C(E, E')$ per cui si ha $\eta_1(A) = 0$ si ha pure $\eta_2(A) = 0$; e si scrive $\eta_1 \perp \eta_2$ (le η_i sono singolari) se esiste un A in $C(E, E')$ tale che

$$\eta_1(A) = u \quad \text{e} \quad \eta_2(A^c) = u$$

dove A^c è il complementare in E di A.

Sia $T_u = \{b \text{ in } K^\times: \|b\| = 1 \text{ e } b(u) = 1\}$.

Se E, G e le η_i verificano quanto sopra, si può dimostrare la seguente *versione vettoriale* del teorema di Y. Okazaki [2], p. 394:

Teorema. *Se le* $\eta_i: C(E, E') \to G$, $i = 1, 2$, *sono misure* H_i-*quasi invarianti e* H_i-*ergodiche, allora vale questa alternativa*:

α) *o* $\eta_1 \sim \eta_2$, *equivalentemente*: $\forall (b, k) \in T \times T_u$ $b \circ \eta_1 \sim k \circ \eta_2$;

ω) *oppure* $\eta_1 \perp \eta_2$, *equivalentemente*: $\forall (b, k) \in T_u \times T_u$ $b \circ \eta_1 \perp k \circ \eta_2$.

Dimostrazione. Incominciamo col provare l'equivalenza della proposizione α). Sia $\eta_1 \sim \eta_2$ e sia (b, k) in $T_u \times T_u$; in virtù del teorema di Y. Okazaki si deve avere

$$\text{(1)} \qquad \text{o } b \circ \eta_1 \sim k \circ \eta_2 \quad \text{oppure } b \circ \eta_1 \perp k \circ \eta_2.$$

Dimostriamo che la seconda delle (1) è falsa. Infatti, se fosse vera esiste-

[1] $A \,\Delta\, B$ è la differenza simmetrica di A e B.

rebbe un A in $C(E, E')$ per cui

$$(2) \qquad b\circ\eta_1(A) = 1\,, \qquad k\circ\eta_2(A^c) = 1\,;$$

se fosse $\eta_1(A^c) > 0$, esisterebbe un t in $K^\times$, di norma 1, tale che $t(\eta_1(A^c)) > 0$. Visto che $b\vee t$ sta in T_u, poichè G' è un reticolo di tipo M e poichè $1 = b(u) \leq \leq (b\vee t)(u) \leq \|b\vee t\|\cdot\|u\| = 1$, risulterebbe

$$1 = (b\vee t)(\eta_1(A) + \eta_1(A^c)) \geq b(\eta_1(A)) + t(\eta_1(A^c)) > 1\,.$$

Dunque $\eta_1(A^c) = 0$, poichè $G' = K^\times - K^\times$; e, vista l'equivalenza delle η_i, si ha $\eta_2(A^c) = 0$: assurdo, per la seconda delle (2).

Viceversa, se per ogni (b, k) in $T_u \times T_u$ si ha $b\circ\eta_1 \sim k\circ\eta_2$ e se $\eta_1(A) = 0$, deve esser $k(\eta_2(A)) = 0$. Ancora come sopra: se esistesse un t in $K^\times$ di norma 1 tale che $t(\eta_2(A)) > 0$, vista l'equivalenza

$$b\circ\eta_1 \sim (k\vee t)\circ\eta_2$$

si dovrebbe avere $0 = (k\vee t)(\eta_2(A)) \geq t(\eta_2(A)) > 0$. Ne segue: $\eta_2(A) = 0$, ovvero l'equivalenza delle η_i.

L'equivalenza della proposizione ω) si dimostra con la stessa tecnica.

Dimostriamo, ora, l'alternativa: o α) oppure ω).

Supponiamo che le η_i non siano equivalenti. Se (b, k) sta in $T_u \times T_u$, sempre in virtù del teorema di Y. Okazaki risulta

$$(3) \qquad \text{o } b\circ\eta_1 \sim k\circ\eta_2 \quad \text{oppure } b\circ\eta_1 \perp k\circ\eta_2\,.$$

Una volta dimostrato che se vale la prima delle (3) essa vale per ogni (b', k') in $T_u \times T_u$, in virtù dell'equivalenza dimostrata della proposizione α) si avrebbe un assurdo; dunque, per ogni (b, k) in $T_u \times T_u$ vale la seconda delle (3), ovvero, in base all'equivalenza della proposizione ω) le η_i sono singolari.

Per concludere: si supponga che $b\circ\eta_1 \sim k\circ\eta_2$ e che $b'\circ\eta_1 \perp k'\circ\eta_2$. Esisterebbe un A in $C(E, E')$ tale che

$$b'(\eta_1(A)) = 1 \quad \text{e} \quad k'(\eta_2(A^c)) = 1\,.$$

Ma allora si avrebbe anche

$$\eta_1(A^c) = \eta_2(A) = 0$$

e dunque $b(\eta_1(A)) = 0$ che darebbe l'assurdo

$$0 = b(\eta_1(A) + \eta_1(A^c)) = b(u) = 1\,.$$

La dimostrazione è conclusa.

Osservazione. Nella dimostrazione che precede è fondamentale l'ipotesi che G' sia un reticolo normato di tipo M (per le proprietà di questi reticoli si veda [1], p. 236). Pur non garantendo la necessità di questa ipotesi su G', si può dimostrare su di un esempio che se G' non è di tipo M il teorema precedente non sussiste.

Ecco l'esempio:

G sia lo spazio delle funzioni continue e reali, definite sull'intervallo $[0, 1]$, con l'usuale norma del sup; G', con la norma duale e l'ordinamento dedotto dal cono duale del cono delle funzioni non negative di G, è un reticolo normato, che non è di tipo M; infatti, se

$$\delta_0(\delta_1): G \to R$$

sono definite da $\delta_0(b) = b(0)$ $(\delta_1(b) = b(1))$ si ha:

$$\|\delta_0 \vee \delta_1\|_{G'} \geq \delta_0 \vee \delta_1(f),$$

dove $f = 1$; ora, $\delta_0 \vee \delta_1(f) = \sup\,(\delta_0(1-g) + \delta_1(g)$, con $0 \leq g \leq 1)$, sicché se la $g(x) = x$ risulta

$$\delta_0 \vee \delta_1(f) \geq 2, \qquad \text{mentre } \|\delta_0\| \vee \|\delta_1\| = 1.$$

Siano $\eta_i, \theta_i: C(E, E') \to [0, 1]$ quattro misure tali che:

i) le η_i (θ_i) siano H_1 (H_2) quasi invarianti ed egualmente (*) H_1 (H_2) ergodiche rispetto a due sottospazi H_i di E;

ii) η_1 sia equivalente alla θ_1 ed η_2 e θ_2 siano singolari.

Siano $u_i \in G$, $i = 1, 2$, definite dalle

$$u_1(x) = \begin{cases} -2x+1, & \text{se } x \in [0, \frac{1}{2}], \\ \text{zero}, & \text{se } x \in [\frac{1}{2}, 0], \end{cases} \qquad u_2(x) = \begin{cases} 2x-1, & \text{se } x \in [\frac{1}{2}, 1], \\ \text{zero}, & \text{se } x \in [0, \frac{1}{2}]; \end{cases}$$

ovvio che le u_i siano linearmente indipendenti e che $\|u_1 + u_2\| = 1$.

Si considerino le due misure $\mu_i: C(E, E') \to G$ definite dalle

$$\mu_1(A) = \eta_1(A)u_1 + \eta_2(A)u_2 \quad \text{e} \quad \mu_2(A) = \theta_1(A)u_1 + \theta_2(A)u_2;$$

per le μ_i non vale il teorema precedente. Infatti:

a) le μ_i non sono singolari: se lo fossero esisterebbe un A in $C(E, E')$

(*) Si intende che se $\eta_1(A \,\Delta\, (A - x)) = \eta_2(A \,\Delta\, (A - x)) = 0$, per ogni x in H_1, sia $\eta_i(A) = 0$, $i = 1, 2$, oppure $\eta_i(A) = 1$, $i = 1, 2$; idem per le θ_i rispetto a H_2. Tale ipotesi garantirà che le successive μ_i siano (H_i-quasi invarianti, e controllarlo è facile, ed inoltre) H_i-ergodiche.

tale che

$$\mu_2(A) = \mu_1 + \mu_2 = \mu_2(A^c),$$

il che implicherebbe, vista la lineare indipendenza delle μ_i, le seguenti eguaglianze

$$\begin{cases} \eta_1(A) = \eta_2(A) = 1, \\ \theta_1(A^c) = \theta_2(A^c) = 1, \end{cases}$$

dalle quali risulta $\eta_1 \perp \theta_1$ contro l'ipotesi $\eta_1 \sim \theta_1$.

b) Esclusa, dunque, la possibilità $\mu_1 \perp \mu_2$, se valesse il teorema dovrebbe valere l'equivalenza della proposizione α); ciò è impossibile, poichè la δ_1 sta in $T_{\mu_1+\mu_2}$ e dunque si dovrebbe avere

$$\delta_1 \circ \mu_1 \sim \delta_1 \circ \mu_2$$

cioè $\eta_2 \sim \theta_2$ contro l'ipotesi $\eta_2 \perp \theta_2$.

BIBLIOGRAFIA

[1] J. L. Kelley - I. Namioka and co-authors, *Linear Topological Spaces*, D. Van Nostrand Company Inc. (1963).

[2] Y. Okazaki, *Equivalent-singular dichotomy for quasi-invariant ergodic measures*, Ann. Inst. Henri Poincaré, Vol. 21, n. 4 (1985).