Rendiconti
Accademia Nazionale delle Scienze detta dei XL
*Memorie di Matematica*
105° (1987), Vol. XI, fasc. 2, pagg. 43-52

LUIGI AMERIO (*)

# Sulla connessione tra i fenomeni di rimbalzo elastico e di appoggio per una corda vibrante (**)

## On the connection between Elastic Rebound and Support phenomena for a Vibrating String

SUMMARY. — We give a complementary analysis of a previous example (cf. [1]) on the motion of a heavy string which hits a wall while vibrating above; various asymptotic properties of the solution are indicated and we obtain a continuous dependence result, with respect to a boundary parametric datum, from the solution corresponding to elastic rebound to that corresponding to support phenomenon.

*a*) Nella presente Nota si completa l'analisi di un esempio dato in un recente lavoro ([1], pp. 208-210); mostreremo, in particolare, come, nello stesso esempio, la configurazione di *appoggio*, per una corda pesante che vibri contro una parete sottostante, possa ottenersi come *limite* della configurazione di *rimbalzo elastico* (cfr. *m*)).

Consideriamo, per l'equazione $y_{\xi\eta} = -1 + f_\varepsilon$ (ove $f_\varepsilon \geq 0$ è la distribuzione positiva, reazione del vincolo, ed $\varepsilon$ è un *parametro* arbitrario, $\geq 0$), il problema definito, nel quadrante $R_\infty = \{\xi, \eta \geq 0\}$ del piano $(\xi, \eta)$, dalla condizione:

$$y_\varepsilon|_{\xi\eta} = \varepsilon \qquad (\text{cioè } y(\xi, 0) = \varepsilon\,,\ y(0, \varepsilon) = \varepsilon)\,. \tag{1}$$

Osserviamo anzitutto che, *se* $\varepsilon = 0$, l'intero quadrante $R_\infty$ è un *dominio di appoggio*, si ha cioè

$$y_0(\xi, \eta) = 0\,. \tag{2}$$

*Se* poi *è* $\varepsilon > 0$, la funzione $y_\varepsilon(\xi, \eta)$ si ottiene immediatamente dalla $y_1(\xi, \eta)$

(*) Uno dei XL.
(**) Nota presentata il 30 giugno 1986. Indirizzo dell'Autore: Via C. Freguglia 2, I-20122 Milano.

ISSN-0392-4106

mediante la posizione

$$y_\varepsilon(\xi,\eta)=\varepsilon y_1\left(\frac{\xi}{\sqrt{\varepsilon}},\frac{\eta}{\sqrt{\varepsilon}}\right)=\varepsilon y\left(\frac{\xi}{\sqrt{\varepsilon}},\frac{\eta}{\sqrt{\varepsilon}}\right), \tag{3}$$

avendo posto $y(\xi,\eta)=y_1(\xi,\eta)$.

Il calcolo di $y(\xi,\eta)$ viene ricondotto, in [1], con la posizione $\xi\eta=\tau>0$, a quello di una successione $\{\zeta_n(\tau)\}$ di integrali dell'equazione ordinaria

$$\frac{d}{d\tau}(\tau\zeta'(\tau))=-1 \tag{4}$$

e di una successione $\{\tau_n\}$, in modo che sia

$$\begin{cases}\tau_0=0\,, & \zeta_0(\tau_0)=1\,,\\ \zeta_n(\tau_n)=0\,, & \zeta'_n(\tau_n^+)=-\zeta'_{n-1}(\tau_n) \qquad (n\geq 1)\,.\end{cases} \tag{5}$$

Si ha

$$\begin{cases}\tau_0=0\,, \quad \tau_1=1\,, \quad \tau_{n+1}>\tau_n\,, \quad \lim\limits_{n\to\infty}\tau_n=+\infty\,,\\ \zeta_0(\tau)=1-\tau \qquad \text{in } [0,1]\end{cases} \tag{6}$$

e, per $n\geq 1$,

$$\left|\begin{array}{ll}\zeta_n(\tau)=\tau_n(1+\zeta'_n)\log\dfrac{\tau}{\tau_n}-(\tau-\tau_n) & (\zeta'_n=\zeta'_n(\tau_n^+)>0)\,, \quad \tau\in[\tau_n,\tau_{n+1}]\,,\\[2ex] \zeta'_n(\tau)=\tau_n\dfrac{1+\zeta'_n}{\tau}-1\,, \qquad \zeta''_n=-\tau_n\dfrac{1+\zeta'_n}{\tau^2}<0\,, & \tau\in(\tau_n,\tau_{n+1})\,.\end{array}\right. \tag{7}$$

Le successioni $\{\tau_n\zeta'_n\}$ e $\{\tau_{n+1}-\tau_n\}$ sono strettamente *crescenti* (cfr. anche *b*)).

La soluzione $y(\xi,\eta)$, corrispondente al valore $\varepsilon=1$, è *definita* allora dalla posizione:

$$y(\tau)=\zeta_n(\tau) \qquad \text{nell'intervallo } \tau_n<\tau<\tau_{n+1}\,.$$

Si ha dunque

$$y(\tau)=1-\tau \qquad \text{in } [0,1]$$

e, per $n\geq 1$,

$$\left|\begin{array}{ll}y(\tau)=\tau_n(1+y'_n)\log\dfrac{\tau}{\tau_n}-(\tau-\tau_n) & \\ & (y'_n=y'(\tau_n^+)=\zeta'_n>0)\,, \quad \tau\in[\tau_n,\tau_{n+1}]\,,\\[2ex] y'(\tau)=\tau_n\dfrac{1+y'_n}{\tau}-1\,, \qquad y''(\tau)=-\tau_n\dfrac{1+y'_n}{\tau^2}<0\,, & \tau\in(\tau_n,\tau_{n+1})\,.\end{array}\right. \tag{8}$$

Dalla (3) segue allora, $\forall\varepsilon>0$, *nell'intervallo* $\varepsilon\tau_n<\tau<\varepsilon\tau_{n+1}$,

$$y_\varepsilon(\xi,\eta)=\varepsilon y\left(\frac{\xi\eta}{\varepsilon}\right)=\varepsilon y\left(\frac{\tau}{\varepsilon}\right)=\varepsilon\zeta_n\left(\frac{\tau}{\varepsilon}\right). \tag{9}$$

*b*) Nei punti *b*), ..., *m*) sono indicate varie proprietà asintotiche di $y(\tau)$ e si ottiene la $y_0$ come limite di $y_n$.

Dimostriamo anzitutto che *risulta*:

$$y_1' = 1\,, \qquad y_n' > y_{n+1}'\,, \qquad \lim_{n\to\infty} y_n' = 0\,. \tag{10}$$

Prolunghiamo $z_n(\tau)$, con la prima delle (7), a tutto $[\tau_n, +\infty)$ e osserviamo che, per la seconda delle (7),

$$0 > z_n'(\tau_{n+1}) = \frac{\tau_n(1+z_n')}{\tau_{n+1}} - 1\,, \qquad \text{sicchè } 0 < z_{n+1}' = -z_n'(\tau_{n+1}) < 1 \text{ per } n > 1\,.$$

Cerchiamo ora $\tau_n'$, con $n > 2$, tale che sia $z_n'(\tau_n') = -z_n'$. Si ha

$$\tau_n' = \tau_n \frac{1+z_n'}{1-z_n'} = \tau_n\left(1 + \frac{2z_n'}{1-z_n'}\right)$$

e risulta

$$z_n(\tau_n') = \tau_n\left\{(1+z_n')\log\left(1+\frac{2z_n'}{1-z_n'}\right) - \frac{2z_n'}{1-z_n'}\right\} < 0\,.$$

Posto infatti

$$x = \frac{2z_n'}{1-z_n'} \qquad \left(z_n' = \frac{x}{2+x}\right),$$

$$\varphi(x) = \left(1+\frac{x}{2+x}\right)\log(1+x) - x = \frac{2}{2+x}\left\{(1+x)\log(1+x) - x - \frac{x^2}{2}\right\} = \frac{2}{2+x}\psi(x),$$

si ha (per $x \geq 0$)

$$\psi(0) = 0\,, \quad \psi'(x) = \log(1+x) - x\,, \quad \psi'(0) = 0\,,$$

$$\psi''(x) = \frac{1}{1+x} - 1 < 0\,, \Rightarrow \psi(x) < 0 \text{ per } x > 0\,, \Rightarrow z_n(\tau_n') < 0\,.$$

È dunque $\tau_n' > \tau_{n+1}$; dalla terza delle (7) segue allora la seconda delle (10) (la prima è evidente).

Posto

$$\lim_{n\to\infty} z_n' = l\,, \qquad \text{con } l \geq 0\,,$$

dimostriamo che $l = 0$.

Sia infatti $l > 0$. Si ha, per la seconda delle (7),

$$z_{n+1}' = 1 - \frac{\tau_n(1+z_n')}{\tau_{n+1}}\,, \qquad \frac{\tau_n}{\tau_{n+1}} = \frac{1-z_{n+1}'}{1+z_n'} \to \frac{1-l}{1+l} < 1$$

e, per la prima delle (7),

$$0 = \tau_n\left\{(1+z_n')\log\frac{\tau_{n+1}}{\tau_n} - \frac{\tau_{n+1}-\tau_n}{\tau_n}\right\}, \Rightarrow (1+l)\log\frac{1+l}{1-l} - \frac{2l}{1-l} = 0\,.$$

Questo è assurdo se $l > 0$. Posto infatti

$$x = \frac{2l}{1-l} > 0\,,$$

si ha

$$(1+l)\log\frac{1+l}{1-l}-\frac{2l}{1-l}=\left(1+\frac{x}{2+x}\right)\log(1+x)-x=\varphi(x)$$

ed è $\varphi(x)<0$ per $x>0$.

Anche la terza delle (10) è dunque provata.

*c) Sia* $\bar{\tau}_n$ il punto di *massimo* di $y(\tau)$ in $[\tau_{n+1}, \tau_{n+2}]$:

$$y(\bar{\tau}_n)=\bar{y}_n=\max_{[\tau_n,\tau_{n+1}]} y(\tau)=\max_{[\tau_n,\tau_{n+1}]} z_n(\tau)=\bar{z}_n. \tag{11}$$

*È allora*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\bar{y}_n}{\tau_n y_n^2}=\frac{1}{2}, \qquad \bar{y}_n>\bar{y}_{n+1}. \tag{12}$$

Si ha $z_n'(\bar{\tau}_n)=0$, e quindi, per la seconda e la prima delle (7),

$$\begin{cases} \bar{\tau}_n=\tau_n(1+z_n')<2\tau_n, \qquad \bar{\tau}_n-\tau_n=\tau_n z_n'. \\ \bar{z}_n=z_n(\tau_n(1+z_n'))=\tau_n((1+z_n')\log(1+z_n')-z_n')=\tau_n\theta(z_n'). \end{cases} \tag{13}$$

Poiché

$$\theta(0)=0, \qquad \theta'(0)=0, \qquad \theta''(0)=1,$$

la prima delle (12) è provata.

Dimostriamo ora la seconda delle (12). Consideriamo l'intervallo $[\tau_n, \tau_{n+1}]$ e calcoliamo la differenza

$$\omega(x)=z_n(\tau_{n+1}(1-x))-z_{n+1}(\tau_{n+1}(1+x)) \qquad (0<x<1).$$

Si ha $z_n(\tau_{n+1})=0$, $z_n'(\tau_{n+1})=-z_{n+1}'$, e quindi

$$z_n(\tau_{n+1}(1-x))=\tau_{n+1}((1-z_{n+1}')\log(1-x)+x),$$

$$z_{n+1}(\tau_{n+1}(1+x))=\tau_{n+1}((1+z_{n+1}')\log(1+x)-x).$$

Ne segue

$$\omega(x)=\tau_{n+1}((1-z_{n+1}')\log(1-x)-(1+z_{n+1}')\log(1+x)+2x),$$

$$\omega'(x)=\tau_{n+1}\left\{-\frac{1-z_{n+1}'}{1-x}-\frac{1+z_{n+1}'}{1+x}+2\right\}=$$

$$=\tau_{n+1}\frac{2-2x^2-(1-z_{n+1}')(1+x)-(1+z_{n+1}')(1-x)}{1-x^2}=-2\tau_{n+1}\frac{x(x-z_{n+1}')}{1-x^2}.$$

Si ha dunque

$$\omega(0)=\omega'(0)=0, \qquad \omega'(x)>0 \text{ per } 0<x<z_{n+1}'$$

e quindi $\omega(x)>0$ in $(0, z_{n+1}']$.

Poiché, per la prima delle (13), $\bar{\tau}_{n+1}=\tau_{n+1}(1+z_{n+1}')$, è allora

$$\omega(z_{n+1}')=z_n(\tau_{n+1}(1-z_{n+1}'))-z_{n+1}(\bar{\tau}_{n+1})>0.$$

Anche la seconda delle (12) è pertanto provata. Ne segue

$$\lim_{n\to\infty} \bar{y}_n = \lim_{n\to\infty} \bar{x}_n = \alpha > 0\,, \qquad \lim_{n\to\infty} \tau_n y_n'^2 = \lim_{n\to\infty} \tau_n x_n'^2 = 2\alpha \tag{14}$$

e proveremo al punto *g*) che $\alpha = 0$.

*d*) *La successione* $\{\tau_n y_n'^2\}$ *è decrescente*:

$$\tau_n y_n'^2 > \tau_{n+1} y_{n+1}'^2\,. \tag{15}$$

*Si ha inoltre*

$$\int_1^\infty y'^2 d\tau = 1 - 2\alpha\,. \tag{16}$$

Proviamo la (15). Segue dalla (4), con $\xi = y$ in $[\tau_n, \tau_{n+1}]$, $n > 1$:

$$\int_{\tau_n}^{\tau_{n+1}} y' \frac{d}{d\tau}(\tau y')\, d\tau = \tau_{n+1} y_{n+1}'^2 - \tau_n y_n'^2 - \int_{\tau_n}^{\tau_{n+1}} \tau y' y''\, d\tau = -\int_{\tau_n}^{\tau_{n+1}} y'\, d\tau = 0\,, \qquad \int_{\tau_n}^{\tau_{n+1}} y'^2 d\tau + \int_{\tau_n}^{\tau_{n+1}} \tau y' y''\, d\tau = 0,$$

sicchè

$$\tau_{n+1} y_{n+1}'^2 - \tau_n y_n'^2 = -\int_{\tau_n}^{\tau_{n+1}} y'^2 d\tau < 0\,, \qquad \Rightarrow (15).$$

Si ha poi, per $p > 1$,

$$\tau_n y_n'^2 - \tau_{n+p} y_{n+p}'^2 = \int_{\tau_n}^{\tau_{n+p}} y'^2 d\tau \tag{17}$$

e quindi, posto $n = 1$ e facendo divergere $p$, si ottiene la (16).

*e*) *Si ha*

$$\sum_1^\infty{}_n\, \tau_n y_n'^2 = M < +\infty\,. \tag{18}$$

È infatti

$$\int_{\tau_n}^{\tau_{n+1}} y'^2 \frac{d}{d\tau}(\tau y')\, d\tau = -(\tau_{n+1} y_{n+1}'^2 + \tau_n y_n'^2) - 2\int_{\tau_n}^{\tau_{n+1}} \tau y'^2 y''\, d\tau = -\int_{\tau_n}^{\tau_{n+1}} y'^2 d\tau\,,$$

$$2\int_{\tau_n}^{\tau_{n+1}} y'^2 d\tau + 2\int_{\tau_n}^{\tau_{n+1}} \tau y'^2 y''\, d\tau = -2\int_{\tau_n}^{\tau_{n+1}} y'^2 d\tau$$

e quindi

$$-(\tau_{n+1} y_{n+1}'^2 + \tau_n y_n'^2) + 2\int_{\tau_n}^{\tau_{n+1}} y'^2 d\tau = -3\int_{\tau_n}^{\tau_{n+1}} y'^2 d\tau\,.$$

Ne segue, per $p > 1$,

$$\tau_n y_n'^2 + 2\sum_{n+1}^{n+p-1} \tau_k y_k'^2 + \tau_{n+p} y_{n+p}'^2 = 3\int_{\tau_n}^{\tau_{n+p}} y'^2\,d\tau + 2\int_{\tau_n}^{\tau_{n+p}} y'^2\,d\tau. \tag{19}$$

Osserviamo ora che, per la terza delle (7) e le prime due delle (10), risulta $|y'(\tau)| < 1$ nell'intervallo $(1, +\infty)$. Per la (16), anche $y'^2$ è sommabile in $[0, +\infty)$ e si ha, per la (19) (posto $n = 1$, facendo divergere $p$ e tenendo presente che $\tau_p y_p'^2 \to 0$ per le (10) e (15)):

$$1 + 2\sum_{2}^{\infty} \tau_k y_k'^2 = 3\int_1^{\infty} y'^2\,d\tau + 2\int_1^{\infty} y'^2\,d\tau, \quad \Rightarrow \quad (18). \tag{20}$$

*f) Si ha*

$$\sum_1^{\infty} y_n' = +\infty. \tag{21}$$

È infatti, per $n > 1$,

$$\log\frac{\tau_{n+1}}{\tau_n} = \int_{\tau_n}^{\tau_{n+1}} \frac{d\tau}{\tau} = -\int_{\tau_n}^{\tau_{n+1}} \frac{1}{\tau}\frac{d}{d\tau}(\tau y')\,d\tau = y_{n+1}' + y_n' - \int_{\tau_n}^{\tau_{n+1}} \frac{y'}{\tau}\,d\tau = y_{n+1}' + y_n' - \int_{\tau_n}^{\tau_{n+1}} \frac{y}{\tau^2}\,d\tau$$

e quindi, per $p > 1$,

$$\left|\begin{array}{l} \log\dfrac{\tau_{n+p}}{\tau_n} = y_n' + 2\displaystyle\sum_{n+1}^{n+p-1} y_k' + y_{n+p}' - \int_{\tau_n}^{\tau_{n+p}} \frac{y}{\tau^2}\,d\tau, \\[2ex] \log\tau_{p+1} = 1 + 2\displaystyle\sum_{2}^{p} y_k' + y_{p+1}' - \int_{1}^{\tau_{p+1}} \frac{y}{\tau^2}\,d\tau. \end{array}\right. \tag{22}$$

Si ha $0 \leq y(\tau) \leq 1$ e quindi

$$\int_1^{\infty} \frac{y}{\tau^2}\,d\tau < +\infty.$$

Poichè

$$\lim_{p\to\infty} \log\tau_{p+1} = +\infty, \qquad \lim_{p\to\infty} y_{p+1}' = 0,$$

la (21) segue dalla (22), per $p \to \infty$.

*g) Si ha*

$$\lim_{n\to\infty} \bar{y}_n = \lim_{n\to\infty} \tau_n y_n'^2 = 0, \tag{23}$$

$$\int_1^{\infty} y'^2\,d\tau = 1. \tag{24}$$

Basta provare, in virtù delle (14) e (16), che è $\alpha = 0$. Supponiamo infatti che sia $\alpha > 0$. Sarebbe allora, per la (15), $\tau_n y_n'^2 > 2\alpha$, $\forall n$, e quindi, per la (18),

$$0 < 2\alpha \sum_1^\infty {}_n\, y_n' < \sum_1^\infty {}_n\, \tau_n y_n'^2 = M < +\infty$$

contro la (21).

*b) Il valore $\tau_{n+1}$ è funzione analitica della coppia $\{\tau_n, y_n'\}$, olomorfa in un intorno del punto $\{\tau_n, 0\}$, con $\tau_n > 1$.*

Per la prima delle (7), il valore $\tau_{n+1}$ si ottiene come soluzione, rispetto a $\tau$, dell'equazione

$$\zeta_n(\tau) = \tau_n(1 + y_n') \log \frac{\tau}{\tau_n} - (\tau - \tau_n) = 0 . \tag{25}$$

Posto

$$\tau = \tau_n(1 + x) , \qquad \lambda = y_n' , \tag{26}$$

la (25) corrisponde all'*equazione*

$$(1 + \lambda) \log (1 + x) - x = 0 , \tag{27}$$

nell'*incognita* $x = x(\lambda)$, da risolvere in un intorno $|\lambda| < r$ del valore $\lambda = 0$, con la condizione $x(0) = 0$.

*Si ottiene allora il seguente sviluppo in serie di potenze:*

$$x(\lambda) = 2\lambda + \frac{2}{3}\lambda^2 - \frac{2}{9}\lambda^3 + \dots \qquad (|\lambda| < r) \tag{28}$$

e quindi, per le (26), *il valore* $\tau_{n+1}$ (per $y_n' < r$):

$$\tau_{n+1} = \tau_n \left\{ 1 + 2y_n' + \frac{2}{3} y_n'^2 - \frac{2}{9} y_n'^3 + \dots \right\} . \tag{29}$$

Posto

$$f(0) = 1 , \qquad f(x) = \frac{\log (1 + x)}{x} = \sum_0^\infty {}_k \frac{(-1)^k}{k + 1} x^k \qquad (|x| < 1) , \tag{30}$$

la (27) diventa l'equazione

$$F(x, \lambda) = (1 + \lambda) f(x) - 1 = 0 . \tag{31}$$

Poichè $F(0, 0) = 0$, $F_x(0, 0) = -\frac{1}{2}$, la soluzione cercata esiste unica, ed è sviluppabile in serie di Taylor:

$$x(\lambda) = \sum_1^\infty {}_k\, x^{(k)}(0) \frac{\lambda^k}{k!} .$$

Si hanno poi, per la (30), le eguaglianze ($\forall\lambda$):

$$f(x(\lambda)) = \frac{1}{1+\lambda}, \qquad \{f(x(\lambda))\}^{(k)} = \frac{(-1)^k k!}{(1+\lambda)^{k+1}}$$

ed è

$$f'(0) = -\frac{1}{2}, \qquad f''(0) = \frac{2}{3}, \qquad f'''(0) = -\frac{3}{2}, \qquad \ldots.$$

Risulta dunque (ponendo $k = 1, 2, 3, \ldots$):

$$f'x' = -\frac{1}{(1+\lambda)^2}, \qquad x'(0) = 2;$$

$$f''x'^2 + f'x'' = \frac{2}{(1+\lambda)^3}, \qquad x''(0) = -2\left[2 - \frac{8}{3}\right] = \frac{4}{3};$$

$$f'''x'^3 + 3f''x'x'' + f'x''' = -\frac{6}{(1+\lambda)^4}, \qquad x'''(0) = -2\left[-6 + 12 - \frac{16}{3}\right] = -\frac{4}{3};$$

. . . . . .

La (28) è dunque provata.

*l) Si ha*

$$\lim_{n\to\infty} r_n y'_n = +\infty. \tag{32}$$

Osserviamo anzitutto che la (32) precisa la proprietà (indicata in [1]) che la successione $(r_n y'_n)$ è crescente.

Poichè, per la seconda delle (8),

$$y'_{n+1} = 1 - \frac{r_n(1+y'_n)}{r_{n+1}} = \frac{r_{n+1} - r_n - r_n y'_n}{r_{n+1}},$$

segue dalla (29)

$$r_{n+1}y'_{n+1} = r_{n+1} - r_n - r_n y'_n = r_n\left\{2y'_n + \frac{2}{3}y'^2_n - \frac{2}{9}y'^3_n + \ldots\right\} - r_n y'_n = \tag{33}$$

$$= r_n y'_n\left\{1 + \frac{2}{3}y'_n - \frac{2}{9}y'^2_n + \ldots\right\} = r_n y'_n(1 + \theta(y'_n))$$

ove $\theta(y'_n) > 0$ e, per la terza delle (10),

$$\lim_{n\to\infty} \theta(y'_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{3}y'_n\left\{1 - \frac{1}{3}y'_n + \ldots\right\} = 0. \tag{34}$$

Per $n > \bar{n}$ è $y'_n < r$. Segue poi dalla (33)

$$\log(r_{n+1}y'_{n+1}) = \log(r_n y'_n) + \log(1 + \theta(y'_n))$$

e quindi

$$\log(\tau_{n+1} y'_{n+1}) = \log(\tau_{\bar{n}} y'_{\bar{n}}) + \sum_{\bar{n}}^{n} \log(1 + \theta(y'_k)) . \tag{35}$$

È inoltre, per le (33) e (34),

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\theta(y'_n)}{2y'_n/3} = 1 , \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{\log(1+\theta(y'_n))}{2y'_n/3} = 1 ,$$

$$\Rightarrow \log(1+\theta(y'_n)) > \bar{m}\frac{2}{3} y'_n \qquad \text{con } \bar{m} > 0 .$$

Si ha dunque, per la (35),

$$\log(\tau_{n+1} y'_{n+1}) > \log(\tau_{\bar{n}} y'_{\bar{n}}) + \frac{2}{3}\bar{m}\sum_{\bar{n}}^{n} y'_k$$

e dalla (21) segue la tesi:

$$\lim_{n\to\infty} \log(\tau_{n+1} y'_{n+1}) = +\infty , \quad \Leftrightarrow (32) .$$

*m) Si ha, uniformemente nel quadrante* $R_\infty = \{0 < \xi, \eta\}$,

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} y_\varepsilon(\xi, \eta) = 0 = y_0(\xi, \eta) , \tag{36}$$

ed inoltre, *uniformemente in ogni quadrato* $R_{a,b} = \{0 < a < \xi, \eta < b < +\infty\}$, privato delle iperboli $(\xi\eta = \varepsilon\tau_n)$,

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{\partial y_\varepsilon(\xi,\eta)}{\partial\xi} = 0 = \frac{\partial y_0}{\partial\xi} , \qquad \lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{\partial y_\varepsilon(\xi,\eta)}{\partial\eta} = 0 = \frac{\partial y_0}{\partial\eta} . \tag{37}$$

Osserviamo che, $\forall\varepsilon > 0$, le *linee di rimbalzo* della soluzione $y_\varepsilon(\xi, \eta)$ in $R_\infty$ sono, per la (9), le *iperboli equilatere* $\Gamma_{\varepsilon n}$, di equazioni $\xi\eta = \varepsilon\tau_n$, con $n > 1$. Per $\varepsilon \to 0^+$, le $\Gamma_{\varepsilon n}$ vanno perciò sempre più *infittendosi*, mentre la soluzione $y_\varepsilon$ *tende*, nel modo ora precisato, alla soluzione $y_0 \equiv 0$, corrispondente all'*appoggio*.

La (36) segue immediatamente dalla (9), tenendo presente che, per la seconda delle (12), è $0 < y(\xi, \eta) < 1$ in tutto $R_\infty$.

Abbiamo poi dalla (9), $\forall\varepsilon > 0$, in $R_\infty - \bigcup_n \Gamma_{\varepsilon n}$,

$$\frac{\partial y_\varepsilon(\xi,\eta)}{\partial\xi} = \eta y'\left(\frac{\tau}{\varepsilon}\right), \qquad \frac{\partial y_\varepsilon(\xi,\eta)}{\partial\eta} = \xi y'\left(\frac{\tau}{\varepsilon}\right)$$

e quindi le (37), in virtù della tesi delle (10).

Si noti che, $\forall\varepsilon > 0$, risulta $y_\varepsilon(\xi, \eta) = \varepsilon - \xi\eta$ nel dominio $0 < \xi\eta < \varepsilon$; si ha dunque, $\forall\varepsilon > 0$, $y_{\varepsilon\xi}(0, \eta) = -\eta$, $y_{\varepsilon\eta}(\xi, 0) = -\xi$.

BIBLIOGRAFIA

[1] L. Amerio, *Studio del moto di una corda vibrante contro una parete di forma qualsiasi, sotto l'azione di una forza esterna arbitraria; domini di appoggio: un problema unilaterale di frontiera libera*, Rend. Acc. Naz. delle Sc. detta dei XL, Mem. di Mat., 102° (1984), Vol. VIII, fasc. 10, pagg. 185-246.

*Direttore responsabile*: Prof. A. Ballio - Autorizz. Trib. di Roma n. 7269 dell'8-12-1959
«Mocograf» - Via Collamarini, 5 - Bologna