Rendiconti
Accademia Nazionale delle Scienze detta dei XL
Memorie di Matematica
104° (1986), Vol. X, fasc. 14, pagg. 171-176

ANDREANA ZUCCO (*)

Sui punti semplici delle famiglie continue di curve (**)

Über einfache Punkte stetiger Kurvenfamilien

ZUSAMMENFASSUNG. — Sei $\mathfrak{C}$ eine stetige Familie von Kurven und $T_1(\mathfrak{C})$ die Menge der Punkte durch welche eine einzige Kurve der Familie läuft. Es wurde gezeigt, dass es einen Teilbogen einer der Kurven der Familie gibt, gebildet aus Punkten die der Menge $T_1(\mathfrak{C})$ angehören, falls ein Punkt von endlicher Multiplizität von $\mathfrak{C}$ existiert ([3], [8]) oder $\mathfrak{C}$ eine Familie von Segmenten ist ([3], [5]). In dieser Arbeit wird gezeigt, dass auch unter anderen Bedingungen Teilbogen von Kurven der Familie existieren die aus Punkte von $T_1(\mathfrak{C})$ gebildet sind und dass in gewissen Fällen die Komponenten von $T_1(\mathfrak{C})$ Teilbogen von Kurven der Familie sind.

Il concetto di famiglia continua di curve o spread è stato introdotto nel 1966 da B. Grünbaum. Tale concetto generalizza il concetto di configurazione di rette nel piano. La definizione è la seguente.

Sia C una curva di Jordan chiusa nel piano euclideo e D l'insieme aperto e limitato che ha C come frontiera. Una famiglia $\mathfrak{C}$ di archi, ossia immagini omeomorfe di $[0, 1]$, che saranno dette curve, si dice famiglia continua di curve, brevemente f.c.c., se:

i) ogni curva L di $\mathfrak{C}$ (esclusi gli estremi) si trova in D e gli estremi appartengono a C,

ii) ogni punto x di C è estremo di una sola curva $L(x)$ di $\mathfrak{C}$,

iii) se L, L' sono due curve distinte di $\mathfrak{C}$, allora $L \cap L'$ è formato sempre da un unico punto nel quale le curve si tagliano,

iv) la curva $L(x)$ dipende in modo continuo da $x \in C$, ossia la funzione $L: C \to \mathfrak{C}$ è continua, essendo $\mathfrak{C}$ considerato un sottoinsieme dello spazio dei compatti del piano dotato della metrica di Hausdorff.

(*) Dipartimento Matematico dell'Università, Torino.
(**) Memoria presentata il 28 novembre 1985 da Giuseppe Scorza Dragoni, uno dei XL.

ISSN-0392-4106

Diamo ora alcune notazioni. Con $-x$ indichiamo il punto di C appartenente ad $L(x)$ e diverso da x, con $\operatorname{inn} L(x)$ la curva $L(x)$ senza gli estremi x e $-x$. Per ogni coppia di punti distinti a, b in $C \cup D$ esiste, per la definizione data, al più una curva $L(x)$ che li contiene. Se una tale curva esiste, indichiamo con (a, b) il sottoarco di $L(x)$ dal punto a al punto b estremi esclusi. Indichiamo poi con $[a, b) = (a, b) \cup \{a\}$, $(a, b] = (a, b) \cup \{b\}$ e con $[a, b] = (a, b) \cup \{a, b\}$.

Con $T_n(\mathfrak{L})$ indichiamo l'insieme dei punti di D per cui passano esattamente n curve di $\mathfrak{L}$, perciò con $T_1(\mathfrak{L})$ indichiamo l'insieme dei punti semplici, con $M_n(\mathfrak{L})$ l'insieme dei punti per cui passano almeno n curve e con $M_\infty(\mathfrak{L})$ l'insieme dei punti per cui passano infinite curve. Indichiamo poi con $M_f(\mathfrak{L})$ l'insieme, già introdotto in [6], dei punti x di D aventi la proprietà che esiste un arco γ_x di C tale che $x \in \cap L(p)$ ove $p \in \gamma_x$. Inoltre diciamo che $L(x)$ contiene un sottoarco aperto massimale di $T_1(\mathfrak{L})$ se esiste un punto t di $L(x)$ appartenente ad $M_2(\mathfrak{L})$ tale che (x, t) è contenuto in $T_1(\mathfrak{L})$ oppure $(t, -x)$ è contenuto in $T_1(\mathfrak{L})$.

Nel seguito considereremo solo f.c.c. $\mathfrak{L}$ non degeneri, ossia escluderemo che $M_2(\mathfrak{L})$ sia formato da un solo punto.

Per i punti semplici è stato dimostrato:

Teorema A ([3], [8]): Se la f.c.c. $\mathfrak{L}$ contiene un punto di molteplicità finita n ($n > 1$), allora c'è un sottoarco di una curva di punti di $T_1(\mathfrak{L})$.

Tuttavia l'esistenza di sottoarchi di punti di $T_1(\mathfrak{L})$ non implica l'esistenza di punti di $T_n(\mathfrak{L})$ ove $n > 1$. Infatti è possibile costruire una f.c.c. tale che i suoi punti non semplici abbiano molteplicità infinita. A tal fine basta modificare l'esempio della f.c.c. $\mathfrak{L}$ di archi di circonferenze (e segmenti) costruita in [7] su un cerchio C, il cui interno è stato indicato con D, in una famiglia $\mathfrak{L}'$ costruita su un cerchio C' concentrico di raggio maggiore, in cui le curve di $\mathfrak{L}'$ si ottengono prolungando con segmenti di diametri di C' gli archi (e i segmenti) di $\mathfrak{L}$. Scegliendo opportunamente la funzione h che compare in [7] si ha che i punti di D sono $M_\infty(\mathfrak{L}')$ mentre i rimanenti sono $T_1(\mathfrak{L}')$.

Teorema B ([3], [5]): Se $\mathfrak{L}$ è una famiglia continua di segmenti, allora $T_1(\mathfrak{L})$ non è vuoto.

Nel presente lavoro si dimostra che anche sotto altre condizioni esistono sottoarchi di curve della famiglia formati da punti di T_1 e che in certi casi le componenti di T_1 sono sottoarchi di curve della famiglia.

Teorema 1: Sia p un punto di C. Su $L(p)$ esiste un sottoarco di $T_1(\mathfrak{L})$ se esiste un arco (δ_1, δ_2) di C contenente p tale che scelto comunque $y \neq p$ nell'arco (δ_1, δ_2) l'insieme $\{L(y) \cap L(p)\}$ è contenuto in un sottoarco di $\operatorname{inn} L(p)$ del tipo $(p, q]$ oppure $[q, -p)$ ove $q \in \operatorname{inn} L(p)$.

Dimostrazione: Per la dimostrazione basta ricordare (vedi [8]) che ad ogni curva $L(p)$ di $\mathfrak{L}$ si può associare una funzione continua nel seguente modo. Sia A il sottoarco di C $(p, -p)$ contenente δ_2 e $-\delta_1$. Siano $\varphi: [a, b] \to A$

e ψ: $[c, d] \to L(p)$ due omeomorfismi che realizzano rappresentazioni parametriche degli archi A e $L(p)$, tali che $\varphi(a) = \psi(c) = p$, $\varphi(b) = \psi(d) = -p$. La funzione f: $(a, b) \to (c, d)$ definita come $f(x) = \psi^{-1}(L(\varphi(x)) \cap L(p))$ risulta com'è noto continua. Detto $y \neq p$ un punto di (δ_1, δ_2) supponiamo che $\{L(y) \cap L(p)\}$ sia contenuto in $(p, q]$ di $L(p)$ ove $q \in \operatorname{inn} L(p)$ e sia $\psi^{-1}(q) = t$. Consideriamo ora (a, b) come unione degli intervalli

$$I_1 = (a, \varphi^{-1}(\delta_2)), \quad I_2 = [\varphi^{-1}(\delta_2), \varphi^{-1}(-\delta_1)] \quad \text{e} \quad I_3 = (\varphi^{-1}(-\delta_1), b).$$

Per le ipotesi posta $f(I_1)$ è contenuto in (c, t) e così pure $f(I_3)$; ma la restrizione di f all'intervallo chiuso I_2 ammette almeno un punto di massimo assoluto quindi esiste un punto $t \in [\operatorname{fr} f(\langle a, b\rangle)] \cap f(\langle a, b\rangle)$ e perciò

$$\psi(t) \in \operatorname{rel\,fr}\,(L(p) \cap M_2(\mathfrak{L}))$$

e $(\psi(t), -p)$ è un arco di $T_1(\mathfrak{L})$ contenuto in $L(p)$.

Osservazione: Se il sottoarco contenuto in $\operatorname{inn} L(p)$ che interviene nell'ipotesi è del tipo $[m, q]$ allora esistono su $L(p)$ due sottoarchi di $T_1(\mathfrak{L})$.

Teorema 2: Se $M_f(\mathfrak{L})$ non è vuoto, allora $T_1(\mathfrak{L})$ non è vuoto.

Dimostrazione: La definizione stessa di $M_f(\mathfrak{L})$ implica che se $q \in M_f(\mathfrak{L})$ per ogni punto p di un arco opportuno di C, sono soddisfatte le ipotesi del Teor. 1. Anzi fissato un tal punto p, per la funzione f associata ad $L(p)$ e per gli intervalli $I_1 = (a, \varphi^{-1}(\delta_2))$ e $I_3 = (\varphi^{-1}(-\delta_2), b)$ risulta $f(I_1) = f(I_3) = \psi^{-1}(q)$. Ma la restrizione di f all'intervallo chiuso $I_2 = [\varphi^{-1}(\delta_2), \varphi^{-1}(-\delta_1)]$ ammette almeno un punto di massimo assoluto e un punto di minimo assoluto, dunque $f(\langle a, b\rangle)$ è un intervallo chiuso $[m, n]$ di (c, d) e perciò $(p, \psi(m))$ e $(\psi(n), -p)$ sono due sottoarchi massimali di $T_1(\mathfrak{L})$.

Corollario a): Se $M_2(\mathfrak{L}) = D$, allora $M_f(\mathfrak{L})$ è vuoto.

Non vale il viceversa in quanto se $M_f(\mathfrak{L})$ è vuoto ed $\mathfrak{L}$ è una famiglia continua di segmenti definita come in [4] si ha $M_2(\mathfrak{L}) \neq D$.

Corollario b): Se le componenti di $T_1(\mathfrak{L})$ sono sottoarchi di elementi di $\mathfrak{L}$, allora $M_f(\mathfrak{L})$ è vuoto.

La circostanza segue dal fatto che, se $q \in M_f(\mathfrak{L})$, su ogni punto p di un arco opportuno γ_s di C, c'è in $L(p)$ un sottoarco massimale (p, z) di $T_1(\mathfrak{L})$ e tutti questi sottoarchi massimali appartengono ad una medesima componente di $T_1(\mathfrak{L})$.

Anche di quest'ultima proprietà non vale il viceversa. Nell'esempio costruito in [7] scegliendo opportunamente la funzione h si è ottenuto $M_2(\mathfrak{L}) = D$ e quindi per il Cor. a) $M_f(\mathfrak{L})$ è vuoto. Ora considerando la relativa f.c.c. $\mathfrak{L}'$ costruita

nell'esempio iniziale, $M_f(\mathfrak{L}')$ è vuoto, mentre la componente di $T_1(\mathfrak{L}')$ è data da $D' - D$, ove con D' si è indicato l'interno del cerchio C'.

Osservazione: Se $M_f(\mathfrak{L})$ non è vuoto, $T_2(\mathfrak{L})$ ha cardinalità maggiore del numerabile. Il fatto segue dal teorema precedente e dai Teoremi 3.12 e 3.1 di [3].

Teorema 3: Su $L(r)$ esiste un sottoarco di $T_1(\mathfrak{L})$ se si possono determinare un arco (δ_1, δ_2) di C contenente r ed un punto p di C tali che scelti comunque $y_1 \in (\delta_1, r]$ e $y_2 \in [r, \delta_2)$ i punti $L(y_1) \cap L(p)$ e $L(y_2) \cap L(p)$ appartengono tutti i primi a $(p, L(p) \cap L(r)]$ e i secondi a $[L(p) \cap L(r), -p)$ o viceversa.

Dimostrazione: Per esempio, se i punti $L(y_1) \cap L(p)$ sono contenuti in $(p, L(p) \cap L(r)]$ e i punti $L(y_2) \cap L(p)$ sono contenuti in $[L(p) \cap L(r), -p)$ allora per un ragionamento analogo a quello visto in [8] i punti $L(y_1) \cap L(r)$ e i punti $L(y_2) \cap L(r)$ sono contenuti in $[L(p) \cap L(r), -r)$. Quindi per il punto r valgono le ipotesi del Teor. 1.

Osservazione: Come conseguenza si ritrova il Teor. A.

Occupiamoci ora del problema se esistono f.c.c. $\mathfrak{L}$ in cui le componenti di $T_1(\mathfrak{L})$ siano sottoarchi di curve di $\mathfrak{L}$.

Teorema 4: Se esiste un sottoinsieme P di C denso su C di punti y tali che $\operatorname{inn} L(y) \subset M_2(\mathfrak{L})$ e se $M_2(\mathfrak{L}) \neq D$, allora le componenti di $T_1(\mathfrak{L})$ sono sottoarchi di curve di $\mathfrak{L}$.

Dimostrazione: Il risultato è un'estensione del Teor. 3 di [4]. Sia a un punto di $T_1(\mathfrak{L})$ certamente esistente in quanto $M_2(\mathfrak{L}) \neq D$. Supponiamo che $a \in L(p)$, allora $(p, a]$ oppure $[a, -p)$ è contenuto in $T_1(\mathfrak{L})$, essendo l'insieme $L(p) \cap M_2(\mathfrak{L})$ connesso (vedi [2]). Supponiamo di aver scelto i simboli in modo che $(p, a]$ appartenga a $T_1(\mathfrak{L})$. Con A indichiamo il sottoarco massimale di $T_1(\mathfrak{L})$ contenente $(p, a]$ e con Γ la componente di $T_1(\mathfrak{L})$ contenente a. Per assurda ipotesi, consideriamo ora un punto b di Γ non appartenente ad A. Per b passa una curva $L(q)$. Osserviamo che q non può coincidere con $-p$, in quanto in tal caso ogni curva di $\mathfrak{L}$ diversa da $L(p)$ separerebbe a da b e in particolare anche le curve con gli estremi in P e perciò Γ non potrebbe contenere al tempo stesso A e $[b, -p)$. Possiamo sempre supporre di aver scelto i simboli in modo che $(q, b]$ sia contenuto in $T_1(\mathfrak{L})$. Ora scelto un qualsiasi punto x dell'arco (p, q) di C non contenente $-p$ e fissato un verso di percorrenza su C in modo che $p < x < q$, dal fatto che per due curve distinte L' ed L'' di $\mathfrak{L}$ i punti finali di L' separano su C quelli di L'', si ha $p < x < q < -p < -x < -q$, perciò p è interno ad uno e q all'altro dei due archi individuati da x e $-x$ su C. Ma $(p, a]$ e $(q, b]$ appartengono a D e non incontrano $L(x)$, quindi si può concludere che $L(x)$ separa a da b. Ma per ipotesi

esiste in (p, q) un punto y tale che $\operatorname{inn} L(y) \subset M_2(\mathfrak{C})$, quindi b non può appartenere a Γ.

Esempi di f.c. di segmenti che soddisfacciano alle ipotesi del Teor. 4 si trovano in [4], ove si dimostra che per tutte le curve convesse tranne un insieme di prima categoria di Baire, le corde che ammettono agli estremi rette tangenti parallele costituiscono una f.c.c. (vedi [2]) per la quale è denso su C l'insieme dei punti y di C tali che addirittura $\operatorname{inn} L(y) \subset M_n(\mathfrak{C})$.

Passiamo ora a dimostrare che

Teorema 5: Se le componenti di $T_1(\mathfrak{C})$ sono sottoarchi di curve di $\mathfrak{C}$, la cardinalità dei sottoarchi, di curve di $\mathfrak{C}$, aperti massimali di $T_1(\mathfrak{C})$ non supera la cardinalità di $M_2(\mathfrak{C}) \cap \operatorname{fr} M_2(\mathfrak{C})$.

Dimostrazione: Sia (x, t) un sottoarco di $L(x)$ contenuto in $T_1(\mathfrak{C})$ e t sia un punto di $M_2(\mathfrak{C})$. Allora in ogni intorno di t cadono punti di $M_2(\mathfrak{C})$, essendo $M_2(\mathfrak{C}) \cap L(x)$ un arco (vedi [2]) che non può essere ridotto ad un punto essendo $\mathfrak{C}$ non degenere, e punti di $T_1(\mathfrak{C})$ e perciò $t \in \operatorname{fr} M_2(\mathfrak{C})$. Supponiamo ora per assurdo che esistano due sottoarchi di $T_1(\mathfrak{C})$ del tipo (x_1, t) e (x_2, t) ove $t \in M_2(\mathfrak{C})$. Essendo $\mathfrak{C}$ non degenere, $L(x_1)$ è diversa da $L(x_2)$. Consideriamo ora l'arco (x_1, x_2) di C non contenente $-x_1$ e $-x_2$. Per tutti i punti x di questo arco, le rispettive curve $L(x)$ sono costrette a passare per il punto t e non avrebbero in comune nessun altro punto. Quindi per ogni tale $L(x)$ il sottoarco (x, t) sarebbe costituito da punti semplici (si tenga conto anche della circostanza che ogni altra curva della famiglia non può avere punti interni al triangolo di lati (x_1, x_2), (x_1, t) e (x_2, t)). In conclusione tutti questi archi (x, t) apparterrebbero ad una medesima componente di $T_1(\mathfrak{C})$ contro l'ipotesi. Donde la conclusione circa quelle cardinalità.

Concludiamo questa nota dando una condizione affinchè su una curva di una f.c.c. $\mathfrak{C}$ non esistano punti di $T_1(\mathfrak{C})$.

Teorema 6: Sia p un punto di C. Si ha $\operatorname{inn} L(p) \subset M_n(\mathfrak{C})$ se scelto comunque un arco (p, δ) di C e considerati due punti qualsiasi r ed s di $L(p)$, dove con r si indica il punto di $L(p)$ contenuto in $(p, s]$, si possono trovare in (p, δ) due punti y_1 e y_2 di C tali che $L(y_1) \cap L(p)$ e $L(y_2) \cap L(p)$ appartengano l'uno al sottoarco (p, r) di $L(p)$, l'altro al sottoarco $(s, -p)$ di $L(p)$.

Dimostrazione: Sia A la componente di C di estremi p e $-p$, che contiene (p, δ). Supponiamo che esista per assurdo un elemento x di $L(p)$ tale che $x \in T_n(\mathfrak{C})$. Si osservi che non può essere $n = 1$, perché in tal caso $(p, x]$ oppure $[x, -p)$ è contenuto in $T_1(\mathfrak{C})$ e scegliendo $r = s = x$ si ha l'assurdo. Siano nell'ordine $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ gli elementi di A tali che $L(p) \cap L(x_1) \cap \cap L(x_2) \cap \ldots \cap L(x_{n-1}) = x$. Su $L(p)$ scegliamo un punto r contenuto in (p, x) ed un punto s contenuto in $(x, -p)$. Per le ipotesi esiste un punto $y_1 \in (p, x_1)$ tale che $L(y_1) \cap L(p)$ è contenuto in (p, r) e sempre per le ipotesi esiste un punto $y_2 \in (p, y_1)$ tale che $L(y_2) \cap L(p)$ è un elemento di

$(s, -p)$. Poiché il triangolo di vertici $L(y_1) \cap L(y_2)$, $-y_1$, $-y_2$ contiene il punto x, per il Lemma 1 di [2] deve esistere un elemento y del sottoarco (y_1, y_2) di A tale che $x \in L(y) \cap L(p)$, il che è assurdo.

Esistono esempi di f.c.c. in cui tutte le curve soddisfano alle ipotesi del Teor. 6 (vedi [7]) ed esempi di f.c.c. in cui esiste un sottoinsieme denso di curve siffatte (vedi [4]).

BIBLIOGRAFIA

[1] B. Grünbaum, *Arrangements and spreads*, Lectures delivered at a Regional Conference on Combinatorial Geometry, University of Oklahoma (1971).

[2] B. Grünbaum, *Continuous families of curves*, Can. J. Math., 18 (1966), 529-537.

[3] K.S. Watson, *Sylvester's problem for spreads of curves*, Can. J. Math., 32 (1980), 219-239.

[4] T. Zamfirescu, *Intersecting diameters in convex bodies*, Annals of Discrete Math., 20 (1983), 311-316.

[5] T. Zamfirescu, *On continuous families of curves - VI*, Geom. Dedicata, 10 (1981), 205-217.

[6] T. Zamfirescu, *Sur les points multiples d'une famille continue de courbes*, Rend. Circ. Mat. Palermo, (2), 18 (1969), 103-112.

[7] T. Zamfirescu - A. Zucco, *Continuous families of smooth curves and Grünbaum's conjecture*, Can. Math. Bull., 27 (3) (1984), 345-350.

[8] A. Zucco Gandini, *Sur une des conjectures de B. Grünbaum concernant les familles continues de courbes*, Rend. Lincei, ser. VIII, 68 (5) (1980), 416-419.

Direttore responsabile: Prof. A. Ballio - Autorizz. Trib. di Roma n. 7269 dell'8-12-1959
« Monograf » - Via Collamarini, 5 - Bologna