Rendiconti
Accademia Nazionale delle Scienze detta dei XL
Memorie di Matematica
104° (1986), Vol. X, fasc. 11, pagg. 141-152

MARIO TROISI (*)

Su una classe di funzioni peso (**) (***)

On a class of weight functions

SUMMARY. — In this paper we obtain some results about a class of functions $\varrho: \Omega \to R_+$, where Ω is a domain in R^n, which are related with « weight functions » of some known classes of weighted Sobolev spaces.

Assegnato un sottoinsieme aperto Ω di R^n, indichiamo con $A(\Omega)$ la classe delle funzioni $\varrho: \Omega \to R_+$ che verificano la condizione:

$$(1) \qquad \sup_{\substack{x,y\in\Omega \\ |x-y|<\varphi(x)}} \left| \log \frac{\varrho(x)}{\varrho(y)} \right| < +\infty .$$

In vari lavori di diversi Autori (cfr., ad es., D. Fortunato [1], R. Schianchi [8], S. Matarasso - M. Troisi [6], M. Troisi [12] e gli altri lavori sotto citati) sono state studiate alcune classi di spazi di Sobolev con peso su Ω, dove il peso è una potenza di una funzione $\varrho \in A(\Omega)$.

Sono inoltre state date varie applicazioni di tali spazi allo studio dei problemi al contorno per le equazioni differenziali ellittiche e quasi-ellittiche. Ricordiamo, ad es., che nell'ambito di classi di spazi del tipo sopra citato sono stati studiati: problemi ellittici in « aperti non regolari », problemi ellittici degeneri e problemi ellittici con dati singolari (cfr., ad es., S. Matarasso - M. Troisi [5], R. Infantino - S. Matarasso - M. Troisi [3], R. Infantino - M. Troisi [4], M. Troisi [13]); problemi quasi-ellittici con dati singolari (cfr., ad es., R. Schianchi [9], M. Troisi [14]); problemi ellittici in aperti non limitati (cfr., ad es., D. Fortunato [2], L. Sgambati [10], L. Sgambati - M. Troisi [11]).

(*) Socio dell'Accademia - Istituto di Matematica dell'Università, Salerno.
(**) Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.A.F.A. del C.N.R.
(***) Memoria presentata il 26 ottobre 1985.

ISSN-0392-4106

Nello studio delle suddette questioni sono state utilizzate delle proprietà delle funzioni peso, di volta in volta assunte come ipotesi o stabilite in corrispondenza di particolari funzioni ϱ.

Ci sembra perciò non privo di interesse approfondire lo studio delle funzioni ϱ di classe $\mathcal{A}(\Omega)$, ciò che è l'oggetto di questo lavoro.

Nei nn. 1 e 2 stabiliamo alcune proprietà delle funzioni di classe $\mathcal{A}(\Omega)$. In particolare proviamo che, per ogni $\varrho \in \mathcal{A}(\Omega)$, esiste una costante c tale che:

$$\varrho(x) < c + |x| \qquad \forall x \in \Omega$$

e che, se:

$$S_\varrho = \left\{ y \in \partial\Omega \,|\, \lim_{x \to y} \varrho(x) = 0 \right\} \neq \emptyset ,$$

risulta:

$$\varrho(x) < \operatorname{dist}(x, S_\varrho) \qquad \forall x \in \Omega .$$

Osserviamo ora che $\mathcal{A}(\Omega)$ contiene la classe delle funzioni $\varrho : \Omega \to R_+$ che sono lipschitziane in Ω con coefficiente di Lipschitz < 1.

Esistono però funzioni di classe $\mathcal{A}(\Omega)$ che non sono continue in Ω.

Ad esempio, si verifica facilmente che la funzione:

$$\varrho : x \in R_+ \to \begin{cases} 1 + \dfrac{x}{2} & \text{se } x \text{ è razionale} \\[2ex] 2 + \dfrac{x}{2} & \text{se } x \text{ non è razionale} \end{cases}$$

è una funzione non continua di classe $\mathcal{A}(R_+)$.

Al n. 3 proviamo che per ogni funzione misurabile $\varrho \in \mathcal{A}(\Omega)$ esiste una funzione $\sigma \in \mathcal{A}(\Omega) \cap C^\infty(\Omega) \cap C^{0,1}(\bar{\Omega})$ soddisfacente, per ogni multi-indice α, la condizione:

$$\sup_{x \in \Omega} \left(\varrho^{|\alpha|-1}(x) |\partial^\alpha \sigma(x)| \right) < +\infty$$

e, nell'ipotesi che sia verificata la (2.10) (cfr. il n. 2), la condizione:

$$\inf_{x \in \Omega} \left(\varrho^{-1}(x) \sigma(x) \right) > 0 .$$

Nel n. 4 stabiliamo alcuni risultati che si deducono dai teoremi dei numeri precedenti.

1. - Le funzioni di classe $\mathcal{A}(\Omega)$

Sia R^n lo spazio reale euclideo a n dimensioni.

Per ogni $x \in R^n$ e per ogni $r \in R_+$ (¹) porremo:

$$B(x, r) = \{ y \in R^n \,|\, |y - x| < r \} .$$

(¹) Indicheremo con N l'insieme dei numeri interi positivi, con N_0 l'insieme dei numeri interi non negativi, con R l'insieme dei numeri reali, con R_+ l'insieme dei numeri reali positivi.

Per ogni multi-indice $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in N_0^n$ porremo:

$$|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n , \qquad \partial^\alpha = \partial_{x_1}^{\alpha_1} \ldots \partial_{x_n}^{\alpha_n} ,$$

dove:

$$\partial_{x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} , \qquad i = 1, \ldots, n .$$

Assegniamo un sottoinsieme aperto Ω di R^n.

Riprendendo quanto detto nell'introduzione, indicheremo con $A(\Omega)$ la classe delle funzioni $\varrho : \Omega \to R_+$ che verificano la (1).

Esempi di funzioni di classe $A(\Omega)$ sono la funzione:

$$x \in R^n \to 1 + a|x| , \qquad a \in]0, 1[,$$

e, se $\Omega \neq R^n$ e S è un sottoinsieme non vuoto di $\partial\Omega$, la funzione:

$$x \in \Omega \to a \operatorname{dist}(x, S) , \qquad a \in]0, 1[.$$

Altri esempi si ottengono osservando che se $\varrho \in A(\Omega)$, allora per ogni $b \in R_+$ e per ogni $s \in R$ anche la funzione:

$$x \in \Omega \to \frac{\varrho(x)}{1 + b\varrho^s(x)}$$

risulta di classe $A(\Omega)$.

Nell'introduzione abbiamo osservato che $A(\Omega)$ contiene la classe delle funzioni $\varrho : \Omega \to R_+$ che sono lipschitziane in Ω con coefficiente di Lipschitz < 1 e abbiamo dato un esempio di funzione di classe $A(\Omega)$ non continua in Ω.

Altri esempi di funzioni di classe $A(\Omega)$ non continue in Ω si ottengono osservando che se $\varrho \in A(\Omega)$, allora per ogni $a \in]0, 1[$ e per ogni insieme $\Omega_1 \subset \Omega$ anche la funzione:

$$x \in \Omega \to \begin{cases} \varrho(x) & \text{se } x \in \Omega_1 \\ a\varrho(x) & \text{se } x \in \Omega \setminus \Omega_1 \end{cases}$$

risulta di classe $A(\Omega)$.

Osserviamo che una funzione $\varrho : \Omega \to R_+$ risulta di classe $A(\Omega)$ se e solo se esiste una costante $\gamma \in R_+$ tale che:

$$\gamma^{-1}\varrho(y) < \varrho(x) < \gamma\varrho(y) \qquad \forall x, y \in \Omega \text{ e tali che } |x - y| < \varrho(y) . \tag{1.1}$$

Fissiamo ora una funzione $\varrho \in A(\Omega)$ e fissiamo una costante γ per la quale sia verificata la (1.1).

Proviamo che:

Teorema 1.1: *Esiste $c \in R_+$ tale che:*

$$\varrho(x) < c + |x| \qquad \forall x \in \Omega . \tag{1.2}$$

Infatti, se la (1.2) non fosse vera, esisterebbe una successione $(x_n)_{n\in N}$ di punti di Ω tale che:

$$\varrho(x_n) > n + |x_n| \qquad \forall n \in N. \tag{1.3}$$

Fissato allora $x_0 \in \Omega$, si avrebbe:

$$|x_n - x_0| < |x_n| + n < \varrho(x_n) \qquad \forall n > |x_0|,$$

e quindi, per la (1.1):

$$\varrho(x_n) < \gamma\varrho(x_0) \qquad \forall n > |x_0|;$$

ma quest'ultima relazione è in contrasto con la (1.3).

Osservazione 1.1: Dal Teorema 1.1 si deduce evidentemente che una funzione $\varrho \in A(\Omega)$ gode delle seguenti proprietà:

1) *per ogni insieme limitato $E \subset \Omega$ risulta:*

$$\sup_{x\in E} \varrho(x) < +\infty; \tag{1.4}$$

2) *se Ω è non limitato, per ogni $a \in]0, 1[$ si ha:*

$$\lim_{|x|\to+\infty} (|x| - a\varrho(x)) = +\infty. \tag{1.5}$$

Nel seguito, se $\Omega \neq R^n$, indicheremo con S_ϱ l'insieme, eventualmente vuoto, definito da:

$$S_\varrho = \left\{ y \in \partial\Omega \,|\, \lim_{x\to y} \varrho(x) = 0 \right\}. \tag{1.6}$$

Vogliamo dimostrare che:

Teorema 1.2: *Se risulta $S_\varrho \neq \emptyset$, allora si ha:*

$$\varrho(x) < \operatorname{dist}(x, S_\varrho) \qquad \forall x \in \Omega. \tag{1.7}$$

Infatti, se la (1.7) non fosse vera, esisterebbero $x_0 \in \Omega$ e $x_1 \in S_\varrho$ tali che:

$$|x_1 - x_0| < \varrho(x_0),$$

e quindi $x_1 \in \overline{\Omega \cap B(x_0, \varrho(x_0))}$. Ma ciò è assurdo, in quanto:

$$\lim_{x\to x_1} \varrho(x) = 0$$

mentre, per la (1.1), risulta:

$$\varrho(x) > \gamma^{-1}\varrho(x_0) \qquad \forall x \in \Omega \cap B(x_0, \varrho(x_0)).$$

Proviamo inoltre che:

Teorema 1.3: *Per ogni sottoinsieme limitato A di $\bar{\Omega}$, l'insieme:*

$$A_\varrho = \{x \in \Omega \mid \varrho(x) > \operatorname{dist}(x, A)\} \tag{1.8}$$

è limitato.

Infatti, ragionando per assurdo, supponiamo che A_ϱ non sia limitato. Esiste allora una successione $(x_n)_{n \in N}$ di punti di Ω tale che:

$$\varrho(x_n) > \operatorname{dist}(x_n, A) \quad \forall n \in N, \qquad \lim_n |x_n| = +\infty. \tag{1.9}$$

Dalla (1.9) si deduce che:

$$\lim_n \varrho(x_n) = +\infty \tag{1.10}$$

e che esiste una successione $(y_n)_{n \in N}$ di punti di A tale che:

$$|x_n - y_n| < \varrho(x_n) \qquad \forall n \in N. \tag{1.11}$$

Assegniamo un sottoinsieme aperto Ω_0 di R^n contenuto in Ω, limitato e tale che $A \subset \bar{\Omega}_0$ e assegniamo, per ogni $n \in N$, una successione $(y_n^k)_{k \in N}$ di punti di Ω_0 tale che:

$$\lim_k y_n^k = y_n \qquad \forall n \in N. \tag{1.12}$$

Dalle (1.11) e (1.12) si deduce che esiste $k_n \in N$ tale che:

$$|x_n - y_n^{k_n}| < \varrho(x_n) \qquad \forall n \in N. \tag{1.13}$$

Dalle (1.13) e (1.1) segue:

$$\varrho(x_n) < \gamma \varrho(y_n^{k_n}) \qquad \forall n \in N, \tag{1.14}$$

e quindi per la (1.10) si ha:

$$\lim_n \varrho(y_n^{k_n}) = +\infty.$$

Ma quest'ultima relazione è assurda in quanto, essendo Ω_0 limitato, si ha (cfr. la (1.4)):

$$\sup_{x \in \Omega_0} \varrho(x) < +\infty.$$

2. - Ulteriori considerazioni

Fissiamo ancora una funzione $\varrho \in A(\Omega)$ e fissiamo una costante $\gamma \in R_+$ tale che sia verificata la (1.1).

Per ogni $x \in \Omega$ e per ogni $\lambda \in R_+$ porremo:

$$I_\lambda(x) = \Omega \cap B(x, \lambda\varrho(x)), \qquad I(x) = I_1(x),$$

$$E_\lambda(x) = \{y \in \Omega \mid |y-x| < \lambda\varrho(y)\}, \qquad E(x) = E_1(x).$$

Evidentemente si ha:

$$x \in E_\lambda(y) \Leftrightarrow y \in I_\lambda(x). \tag{2.1}$$

Osserviamo che, con le notazioni sopra introdotte, la (1.1) si scrive nella forma:

$$\gamma^{-1}\varrho(y) < \varrho(x) < \gamma\varrho(y) \qquad \forall y \in \Omega \text{ e } \forall x \in I(y). \tag{2.2}$$

Osserviamo anche che in conseguenza delle (2.1) e (2.2) si ha:

$$\gamma^{-1}\varrho(y) < \varrho(x) < \gamma\varrho(y) \qquad \forall y \in \Omega \text{ e } \forall x \in E(y). \tag{2.3}$$

Proviamo ora che:

Lemma 2.1: *Si ha:*

$$E(x) \subset I_\gamma(x) \qquad \forall x \in \Omega \tag{2.4}$$

e, per ogni $\lambda \in R_+$:

$$I_{\lambda_0\gamma^{-1}}(x) \subset E_\lambda(x) \qquad \forall x \in \Omega, \tag{2.5}$$

dove $\lambda_0 = \min\{\lambda, \gamma\}$.

Infatti, se $y \in E(x)$, si ha:

$$\gamma^{-1}\varrho(x) < \varrho(y) < \gamma\varrho(x) \tag{2.6}$$

e quindi:

$$|y-x| < \varrho(y) < \gamma\varrho(x),$$

da cui segue che $y \in I_\gamma(x)$.

Inoltre, siccome $I_{\lambda_0\gamma^{-1}}(x) \subset I(x)$, se $y \in I_{\lambda_0\gamma^{-1}}(x)$ si ha ancora la (2.6) e quindi:

$$|y-x| < \lambda_0\gamma^{-1}\varrho(x) < \lambda\varrho(y),$$

da cui segue che $y \in E_\lambda(x)$.

Nel seguito porremo per ogni $x \in \Omega$ e per ogni $\lambda \in R_+$:

$$\chi_\lambda(x) = \varrho^{-n}(x) \cdot \operatorname{mis} E_\lambda(x)\,, \qquad \chi(x) = \chi_1(x)\,. \tag{2.7}$$

Osserviamo che in conseguenza della (2.4) si ha:

$$\sup_{x \in \Omega} \chi(x) < +\infty\,. \tag{2.8}$$

Può invece risultare:

$$\inf_{x \in \Omega} \chi(x) = 0\,. \tag{2.9}$$

Ad esempio, fissato $t \in]1, +\infty[$, consideriamo:

$$\Omega = \{x \in R^2 \mid x_1 \in R_+,\ 0 < x_2 < x_1^t\}\,,$$

$$\varrho\colon x \in \Omega \to \frac{|x|}{2}\,.$$

Si verifica facilmente che, in questo caso, $\varrho \in A(\Omega)$ ed esiste una costante c tale che:

$$\chi(x) \leq c|x|^{t-1} \qquad \forall x \in \Omega\,,$$

da cui segue la (2.9).

In alcuni risultati avanti stabiliti supporremo che sia verificata la seguente condizione:

$$\inf_{x \in \Omega} \chi_\lambda(x) > 0 \qquad \text{per un } \lambda \in]0, 1[\,. \tag{2.10}$$

Osserviamo, ad es., che la (2.10) è verificata qualunque sia $\varrho \in A(\Omega)$ in ciascuno dei seguenti casi: $\Omega = R^n$; $\Omega = R^n_+ = \{x \in R^n \mid x_n > 0\}$; Ω è limitato e dotato della proprietà di cono. Essa è inoltre verificata per un qualsiasi aperto non limitato Ω dotato della proprietà di cono nel caso che ϱ sia una funzione limitata in Ω.

Osserviamo ancora che, in opportune ipotesi su ϱ, la (2.10) può essere vera anche per aperti Ω non dotati della proprietà di cono. Ad esempio, se si ha (*):

$$\varrho(x) \sim \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) \qquad \forall x \in \Omega\,,$$

allora la (2.10) è verificata qualunque sia l'aperto Ω.

Tenendo presente la (2.5), si verifica facilmente che una condizione suffi-

(*) Se f e g sono due funzioni definite in Ω ed a valori in R_+, scriveremo: $f(x) \sim g(x)$ $\forall x \in \Omega$ per indicare che esistono $c_1, c_2 \in R_+$ tali che:

$$c_1 g(x) \leq f(x) \leq c_2 g(x) \qquad \forall x \in \Omega\,.$$

ciente perchè sia verificata la (2.10) è che esistano $\theta \in]0, \pi/2[$ e $r \in R_+$ tali che ogni $x \in \Omega$ sia vertice di un cono contenuto in Ω avente apertura θ e altezza $r \cdot \varrho(x)$.

3. - Regolarizzanti di una funzione misurabile di classe $A(\Omega)$

In questo numero indicheremo con ϱ un'assegnata funzione misurabile di classe $A(\Omega)$, per la quale manterremo tutte le notazioni introdotte nei nn. 1 e 2.

Fissato ora $\lambda \in]0, 1[$, assegniamo una funzione $g \in \mathcal{D}(R^n)$ tale che:

$$g(x) > 0 \quad \forall x \in R^n, \qquad g(x) = 1 \quad \text{per } |x| < \lambda, \qquad \operatorname{supp} g \subset B(0, 1)$$

e poniamo per ogni $\tau \in R$:

$$\varphi_\tau : x \in \Omega \to \int_\Omega \varrho^{\tau - n}(y)\, g\left(\frac{x-y}{\varrho(y)}\right) dy. \tag{3.1}$$

Osserviamo che risulta:

$$\varphi_\tau(x) = \int_{B(x)} \varrho^{\tau - n}(y)\, g\left(\frac{x-y}{\varrho(y)}\right) dy \qquad \forall x \in \Omega. \tag{3.2}$$

Proposizione 3.1: *Esistono $c_1, c_2, c_3 \in R_+$ tali che:*

$$c_1 \varrho^\tau(x) \chi_\lambda(x) < \varphi_\tau(x) < c_2 \varrho^\tau(x) \chi(x) \qquad \forall x \in \Omega, \tag{3.3}$$

$$|\varphi_\tau(x') - \varphi_\tau(x'')| < c_3 (\varrho^{\tau-1}(x') \chi(x') + \varrho^{\tau-1}(x'') \chi(x'')) |x' - x''| \quad \forall x', x'' \in \Omega. \tag{3.4}$$

Inoltre, $\varphi_\tau \in C^\infty(\Omega)$ e per ogni multi-indice $\alpha \in N_0^n$ si ha:

$$|\partial^\alpha \varphi_\tau(x)| < c_\alpha \varrho^{\tau - |\alpha|}(x) \chi(x) \qquad \forall x \in \Omega, \tag{3.5}$$

dove c_α è una costante indipendente da x.

Infatti, dalle (3.2) e (2.3) segue che:

$$\varphi_\tau(x) \sim \varrho^{\tau - n}(x) \int_{B(x)} g\left(\frac{x-y}{\varrho(y)}\right) dy \qquad \forall x \in \Omega.$$

D'altra parte si ha:

$$\int_{B(x)} dy < \int_{B(x)} g\left(\frac{x-y}{\varrho(y)}\right) dy < \sup g \cdot \int_{B(x)} dy.$$

Dalle due precedenti relazioni si deduce evidentemente la (3.3).

Osserviamo ora che si ha per ogni $x', x'' \in \Omega$:

$$|\varphi_t(x') - \varphi_t(x'')| < \int_{B(x') \cup B(x'')} \varrho^{t-n}(y) \left| g\left(\frac{x'-y}{\varrho(y)}\right) - g\left(\frac{x''-y}{\varrho(y)}\right) \right| dy <$$

$$< c_0 |x' - x''| \left(\int_{B(x')} \varrho^{t-n-1}(y)\, dy + \int_{B(x'')} \varrho^{t-n-1}(y)\, dy \right),$$

dove c_0 è una costante indipendente da x' e x''.

Da quest'ultima relazione e dalla (2.3) si ottiene la (3.4).

Da ben noti risultati segue evidentemente che $\varphi_t \in C^\infty(\Omega)$. Inoltre si ha per ogni $x \in \Omega$ e per ogni multi-indice $\alpha \in N_0^n$:

$$|\partial^\alpha \varphi_t(x)| = \left| \int_\Omega \varrho^{t-n-|\alpha|}(y)\, g^{(|\alpha|)}\left(\frac{x-y}{\varrho(y)}\right) dy \right| < \int_{B(x)} \varrho^{t-n-|\alpha|}(y) \left| g^{(|\alpha|)}\left(\frac{x-y}{\varrho(y)}\right) \right| dy,$$

da cui, ancora per la (2.3), si deduce la (3.5), e quindi si ha la tesi.

Deduciamo ora dalla Proposizione 3.1 il seguente:

TEOREMA 3.1: *Comunque si assegnino $\lambda \in]0, 1[$ e una funzione misurabile $\varrho \in \mathcal{A}(\Omega)$, esiste $\sigma \in \mathcal{A}(\Omega) \cap C^\infty(\Omega) \cap C^{0,1}(\bar{\Omega})$ tale che:*

$$c_1 \varrho(x) \chi_\lambda(x) < \sigma(x) < c_2 \varrho(x) \qquad \forall x \in \Omega, \tag{3.6}$$

$$|\partial^\alpha \sigma(x)| < c_\alpha \varrho^{1-|\alpha|}(x) \qquad \forall x \in \Omega \text{ e } \forall \alpha \in N_0^n, \tag{3.7}$$

dove c_1, c_2 e c_α sono delle costanti positive indipendenti da x.

Infatti, in conseguenza della (2.8), dalla (3.4) si ha che la funzione $\varphi_1 : \Omega \to R_+$ associata a ϱ dalla (3.1) è di classe $C^{0,1}(\Omega)$. Denotato allora con a il coefficiente di Lipschitz di φ_1, con b un numero dell'intervallo $]0, a^{-1}[$ e con φ^* il prolungamento continuo di φ_1 su $\bar{\Omega}$, dalla Proposizione 3.1 evidentemente si deduce che la funzione:

$$\sigma = b\varphi^* \tag{3.8}$$

risulta di classe $\mathcal{A}(\Omega) \cap C^\infty(\Omega) \cap C^{0,1}(\bar{\Omega})$ e soddisfa le (3.6) e (3.7).

Dal Teorema 3.1 si deduce il seguente risultato:

TEOREMA 3.2: *Se è verificata la condizione* (2.10), *allora esiste $\sigma \in \mathcal{A}(\Omega) \cap C^\infty(\Omega) \cap C^{0,1}(\bar{\Omega})$ tale che:*

$$\sigma(x) \sim \varrho(x) \qquad \forall x \in \Omega, \tag{3.9}$$

$$|\partial^\alpha \sigma(x)| < c_\alpha \sigma^{1-|\alpha|}(x) \qquad \forall x \in \Omega \text{ e } \forall \alpha \in N_0^n, \tag{3.10}$$

dove c_α è una costante indipendente da x.

Infatti, scelto il λ relativo alla funzione g definita all'inizio di questo numero uguale al numero definito dalla condizione (2.10), dal Teorema 3.1 e dalla (2.10) si deduce che la funzione σ definita dalla (3.8) gode delle proprietà richieste dal teorema.

4. - Alcune conseguenze dei risultati dei nn. 1 e 3

Come applicazione dei Teoremi 1.1 e 3.1, dimostriamo il seguente risultato, dove S_φ denota l'insieme, eventualmente vuoto, definito dalla (1.6):

Teorema 4.1: *Comunque si assegnino un aperto Ω di R^n, una funzione misurabile $\varrho \in \mathcal{A}(\Omega)$ e un numero $\lambda \in]0, 1[$, esiste una successione $(\delta_k)_{k \in N}$ di funzioni di classe $C^\infty(\Omega) \cap C^{0,1}(\bar{\Omega})$ tale che:*

$$\operatorname{supp} \delta_k \subset (\bar{\Omega} \setminus S_\varphi) \cap B(0, k) \qquad \forall k \in N \tag{4.1}$$

e soddisfacente, per ogni $x \in \Omega$ e per ogni multi-indice $\alpha \in N_0^n$, le relazioni:

$$\lim_k \partial^\alpha (1 - \delta_k(x)) = 0 , \tag{4.2}$$

$$\sup_{k \in N} |\partial^\alpha \delta_k(x)| < c_\alpha \varrho^{-|\alpha|}(x) \chi_\lambda^{-|\alpha|}(x) , \tag{4.3}$$

dove c_α è una costante indipendente da x.

Infatti, assegniamo una funzione $f \in \mathcal{D}(R_+)$ tale che:

$$f(t) = 1 \quad \text{se } t \leq \tfrac{1}{2} , \qquad f(t) = 0 \quad \text{se } t \geq \tfrac{3}{4}$$

e poniamo per ogni $k \in N$:

$$\varphi_k : x \in R^n \to f\left(\frac{|x|}{k}\right) . \tag{4.4}$$

Evidentemente risulta:

$$\varphi_k \in \mathcal{D}(R^n) , \qquad \operatorname{supp} \varphi_k \subset B(0, k) \qquad \forall k \in N .$$

Si verifica inoltre facilmente che per ogni $x \in R^n$ e per ogni multi-indice $\alpha \in N_0^n$ si ha:

$$\lim_k \partial^\alpha (1 - \varphi_k(x)) = 0 ,$$

$$\sup_{k \in N} |\partial^\alpha \varphi_k(x)| < c_\alpha (1 + |x|)^{-|\alpha|} ,$$

dove c_α è una costante indipendente da x.

Pertanto, se $\Omega = R^n$, tenendo presente che la funzione ϱ soddisfa la (1.2), si ottiene la tesi prendendo $\delta_k = \varphi_k$.

Consideriamo ora il caso $\Omega \neq R^n$. Associamo a ϱ la funzione σ definita dal Teorema 3.1 e poniamo per ogni $k \in N$:

$$\psi_k : x \in \Omega \to 1 - f(k\sigma(x)) , \tag{4.5}$$

dove f è ancora la funzione sopra definita.

Evidentemente risulta:

$$\psi_k \in C^\infty(\Omega) \cap C^{0,1}(\bar{\Omega}) , \quad \operatorname{supp} \psi_k \subset \left\{ x \in \bar{\Omega} \,|\, \sigma(x) > \frac{1}{2k} \right\} \qquad \forall k \in N . \tag{4.6}$$

D'altra parte, in conseguenza della (3.6) si ha:

$$\sigma(x) = 0 \qquad \forall x \in S_\varphi , \text{ se } S_\varphi \neq \emptyset . \tag{4.7}$$

Dalla seconda delle (4.6) e dalla (4.7) si deduce che:

$$\operatorname{supp} \psi_k \subset \bar{\Omega} \setminus S_\varphi \qquad \forall k \in N .$$

Si verifica inoltre facilmente che per ogni $x \in \Omega$ e per ogni multi-indice $\alpha \in N_0^n$ risulta:

$$\lim_k \partial^\alpha (1 - \psi_k(x)) = 0 ,$$

$$\sup_{k \in N} |\partial^\alpha \psi_k(x)| \leq c_\alpha \sigma^{-|\alpha|}(x) ,$$

dove c_α è una costante indipendente da x.

Dalle relazioni precedenti, dal Teorema 1.1 e dalla (3.6) si deduce evidentemente che la successione di funzioni $(\delta_k)_{k \in N}$, dove:

$$\delta_k : x \in \Omega \to \varphi_k(x) \cdot \psi_k(x) \qquad \forall k \in N ,$$

con φ_k e ψ_k definite dalle (4.4) e (4.5) rispettivamente, soddisfa le condizioni richieste dal teorema, e quindi si ha la tesi.

Fissato l'aperto Ω di R^n, indicheremo con $d : \Omega \to R_+$ la funzione definita da:

$$d : \; x \in \Omega \to \begin{cases} \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) & \text{se } \Omega \neq R^n \\ 1 + |x| & \text{se } \Omega = R^n . \end{cases}$$

Dal Teorema 4.1 si deduce il seguente:

Corollario 4.1: *Qualunque sia l'aperto Ω di R^n, esiste una successione $(\delta_k)_{k \in N}$ di funzioni di classe $\mathcal{D}(\Omega)$ tale che per ogni $x \in \Omega$ e per ogni multi-indice $\alpha \in N_0^n$*

si ha:

$$\lim_{x} \tilde{c}^{a}(1-\delta_{\varrho}(x)) = 0\,, \tag{4.8}$$

$$\sup_{x \in \Omega} |\tilde{c}^{a}\delta_{\varrho}(x)| \leq c_{a}\, d^{-1a}(x)\,, \tag{4.9}$$

dove c_a è una costante indipendente da x.

Infatti, si ottiene la tesi applicando il Teorema 4.1 con $\varrho = ad$, per un fissato $a \in]0, 1[$, e tenendo presente che per una tale funzione ϱ è soddisfatta, qualunque sia Ω, la (2.10) (cfr. quanto osservato nella parte finale del n. 2).

BIBLIOGRAFIA

[1] D. Fortunato, *Spazi di Sobolev con peso ed applicazioni ai problemi ellittici*, Rend. Acc. Sc. Fis. Mat. di Napoli, (4), 41 (1974).

[2] D. Fortunato, *Una limitazione a priori in spazi di Sobolev con peso per i problemi ellittici nel semispazio*, Ric. di Mat., 25 (1976), 137-161.

[3] R. Infantino - S. Matarasso - M. Troisi, *Proprietà spettrali per una classe di operatori ellittici*, Ann. Mat. Pura Appl., (4), 121 (1979), 109-129.

[4] R. Infantino - M. Troisi, *Operatori ellittici degeneri in domini di R^n*, Boll. U.M.I., (5), 17-B (1980), 186-203.

[5] S. Matarasso - M. Troisi, *Operatori differenziali ellittici in spazi di Sobolev con peso*, Ric. di Mat., 27 (1978), 83-108.

[6] S. Matarasso - M. Troisi, *Teoremi di compattezza in domini non limitati*, Boll. U.M.I., (5), 18-B (1981), 517-537.

[7] J. Nečas, *Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques*, Masson et C.ie Éditeurs, Paris, 1967.

[8] R. Schiancchi, *Spazi di Sobolev disuguaglianze e con peso*, Rend. Acc. Sc. Fis. Mat. di Napoli, (4), 42 (1975).

[9] R. Schiancchi, *Problemi quasi ellittici nel semispazio*, Rend. Circ. Mat. di Palermo, (2), 29 (1980), 103-138.

[10] L. Sgambati, *Limitazioni a priori per le equazioni lineari ellittiche del second'ordine in due variabili in domini non limitati*, Ric. di Mat., 32 (1983), 25-39.

[11] L. Sgambati - M. Troisi, *Limitazioni a priori per una classe di problemi ellittici in domini non limitati*, Note di Mat., 1 (1981), 225-259.

[12] M. Troisi, *Teoremi di inclusione negli spazi di Sobolev con peso*, Ric. di Mat., 18 (1969), 49-74.

[13] M. Troisi, *Problemi ellittici con dati singolari*, Ann. Mat. Pura Appl., (4), 83 (1969), 363-408.

[14] M. Troisi, *Problemi al contorno con condizioni omogenee per le equazioni quasi-ellittiche*, Ann. Mat. Pura Appl., (4), 90 (1971), 331-412.

Direttore responsabile: Prof. A. Ballio - Autorizz. Trib. di Roma n. 7269 dell'8-12-1959
« Monograf » - Via Collamaxini, 5 - Bologna