

Rendicooti

Academis Nationale delle Scienze detta dei XL.

Memorie di Matematiu

100: 0784. Vol. VIII. for. 4, page, 53-78

GIUSEPPINA VOLPATO MARTINELLI (*)

Ancora sulla caratterizzazione, discretizzazione e simulazione del processo poissoniano (**)

Again on the Characterization, Discretization and Simulation of the Poisson Process

Spounder, — Bossemly M. Volgous has investigened a distrust-nine studentie process of strebal of commercial exceeding for a ligarative streetly, when it such inserted in policy for of on epidentials of R. at its sea on contention and the content of the content of the content of the bosonic indicated on the content of the content of the content of the content of the bosonic indicated of the or with respect to the cop for the street of a supplication of the attention are one shaded to a flowest discussive places with specializing state, as diverges, the content of the attention are one shaded to a flowest discussive above, and the content of the content of the attention of the content of

In due recent lavoir (*) è stato provato dei Il processo stocassico a tempo continuo polsoniamo pub estere visto come processo ilmine di due particolari processi discreti (in uan metrica che assume come unità di tempo il passo il padi una couparticitone dei semisso positivo dei tranpi che suon sunti denomicarii hemadiline Patro. ¿ dei propietto dei propietto dei sunti processi dei propietto dei propietto dei propietto dei sunti proretire dei propietto dei propietto dei propietto dei propietto dei principale dei propietto dei propietto dei propietto dei principale dei propietto dei propietto dei principale dei propietto dei propie

(*) Indirizzo dell'A.: Istituno di Statistica dell'Università degli Studi, Cà Foscari di Venezia,

(**) Marsonia prasantas il 26 ostobre 1983 da Giuseppe Soeras Deugad, uno dei XL. (M. Vezaxos, Salia aeraturegeggius, diretrizeggius e intelagine del prasura pairminus, Rend. Act. Nat. Sc. dei St. V. vol. VII (1983), pp. 177-382, C. Lexra, Compani et aemegune da thai d'une atta de prasura de comping, dalora pp. 193-399, G. Vezaxos Maximentas, ed projente dalla constitue, pagine, diluteritguine e simulgium del prasura politicativa, operità artista, equato verhane.

poissoniano è intesa, a dire il vero, nel senso che alcune variabili casuali marginuli tipiche dei due processi a tempi discreti convergono, col divergere di s, alle analoghe variabili che caratterizzano il processo poissoniano.

Notorimente il processo di Poisson può sistere patentato cone un processo alestoto di attri di clienti atto pottrali (ni tamo figurato) che nato servizi. Il questa versione, infarti, sono presentati soche i dei processo i sempi discrezi, convergenti al processo polssonione, considerati in lavvoi chati in (). È di notare però che nel processo a tempo continno poissoniono si munete che in un temposono di prossa rivivere non solo un solo cliente can una probabilità i de, ma anche più di ser diotte con probabilità, allora, che è infinitenta di ordine unescione ai.

Invece, nel due processi a tempi discreti (convergenti come ai è deno a quello piosionino a tempo contino) considerati (ni pi prevede chi a nu qualivoglia intervallo di tempo (di ampieza 1/4) possa atrivate una di ar adiatire con una probabilità (in ora è te un trade finanzo, chi il rapporto 2/4 i ri vela si posteriori come numero medio di clienti arrivabili nell'unità di tempo. Ebbece, si pone il problema se anche en processi discreti climi città il problema si monte en processi discreti climi città il problema se anche en processi discreti climi città il problema se anche en processi discreti climi città il problema se anche en processi discreti climi città il problema se anche en processi discreti climi città il problema se anche en processi discreti climi città con discreti con controli contro

rispettivamente, con delle probabilità come le seguenti

$$\frac{1-2(\lambda|\sigma)}{1-\lambda|\sigma},\frac{\lambda}{\sigma},\left(\frac{\lambda}{\sigma}\right)^{2},\ldots,\left(\frac{\lambda}{\sigma}\right)^{m},\ldots;\left(\frac{1-2(\lambda|\sigma)}{1-\lambda|\sigma}+\sum_{m=1}^{n-1}\binom{\lambda}{\sigma}^{m}-1\right),$$

e non debba essere necessariamente solo

con le probabilità

$$\left(1-\frac{\lambda}{n}\right), \frac{\lambda}{n}$$

come di fatto è previsto nei lavori cit. in (1).

In questa nota viene data una risposta positiva nel caso in cui il processo a tempi discreti è bermalliam a più alternative.

Una novità che appare subtro in questo ampliamento del modello di arrivi di cilenti, è de l'evento di « natileggione ii autimatori » (natiri, (x-2) li nuo dei tratti paratali dell'equipartizione discretizzane il tempo va sostimito coli especare salvo andiziogine di alume » (nitali », apputoro perchè in cogi si sisponte satro antileggione di alume » (nitali », apputoro perchè in cogi si sigolio tratto paratale può arrivare un groppo di clienti formato da più di « clienti, golio tratto paratale può arrivare un groppo di clienti formato da più di « clienti, Tuttavia si poò ancora parlare di «navpa d'attas dell'» on cliente » percei.

^(°) la altre parole, gli artivi, in quesso morre modello, avvengono a grappi di alienti, un grappo poradio essere vascio, oppute formato di un tolo cliente, oppute da due clienti (che atrivano simultaneamento) da tre clienti e così via.

elienti componenti un medesimo gruppo possono sempre pensarsi ordinati secondo un qualsivoglia cristerio.

como un quinte/uga. Autorilla cousale che decurve il rattro particle aleatorio dell'apparente dei carrieratori dell'apparente dell'apparente dell'apparente dell'apparente dell'apparente la totalizzazione di shueno e clienti sia shpanto complessa. Le analogie variabili dei che procederi modelli discori con, ripettivimente una passifiase danini cel un'hira legge (a questa convergenze, con l'infiniteriori multi del passo dell'epiquiparizione) che abbismo chiamino passifiase danini (o condizionata). Questa volta legge silentori che descrive il tempo d'attena mon converge (conce la kottazia) ad una passifiase danini.

Tatteria (tempor con l'inémissionalità del passo dell'ossipitatione che dispectiona il tumojo coverego (a) parti della patallitan chassas cei quella histocata dei data precedenti modelli discerni) venso la legge continua di Eritang, che, ponorimente, è ripion nella descritone del tempo alsociro distuta delche, ponorimente, è ripion nella descritone del tempo alsociro distuta dell'e-mo cliente nel classico modello coetimo di Poisson. La legge d'attest quando per a l'acid qual casso, notorimente, descrive ache il tempo espatanore alsociori fra due arrivi successivi) nos è più quatterinite in questo morov processo a tempi discreti che no al shistone chianzo levenillo se a pia distruttive.

Questa legge che descrive il tempo sepantore appare ora infatti soluzaro come nan conditione nevensia ma non sundicione predit i modello di arrivi sia betnociliano a più alternative. Infine segnaliamo che la legge espinente il montero alternoti e dicienti che possono arrivare complessivamente entro un finato numero di tratti pariali aliterati dell'empiaratione che discentiza il tempo noa è più ima homalitare distanto o silvatare come nei che precedenti modella. E siquanto più complessa. Turavisi, al pari della herroullianza classice e di quella biboccas, converga anche quera volto, con l'infantiseminibi soluzione del republica distante dell'espiratione distrettivame il tempo della più processa di consistenti dell'espiratione distrettivame il tempo della processa di consistenti della signato della signato continuo di Poisson. L'implimento del peresente modello caso in cui dall'uras a più alternative lo schema del estrazioni non sia bernoci-liano beni al chia proci a sesso quello di sua successiva ricerca. Anche per il nuovo modello viene indicisso, transie copportuni flore-chart, un'algoritmo per la simulatione delle leggi marginetto di sua successiva ricerca. Anche per la simulatione delle leggi marginetto.

1. - LE IPOTESI CHE CARATTERIZZANO IL PROCESSO DI ARRIVI

La prima, riguardante l'equipartizione, è sempre la medesima. Eccola: $b)_i^+$: si fissa una equipartizione D_u del semiasse positivo dei tempi in tratti parziali disgiunti

$$T_{i,n} \triangleq \left(t \in \mathbb{R}^+; \frac{i-1}{s} < t < \frac{i}{s}\right), \qquad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \dots \\ s = 1, 2, \dots \end{pmatrix}$$

di uguale ampiezza 1/s che viene assunta come unità di tempo.

Le altre sono:

b) $_{k}^{+}$: si predispone un'urna U_{n}^{+} , da considerersi associata all'equipartizione D_{n} , addirittura ad infinite alternative che indichiamo coi simbolli:

attendibili in ogni singola estrazione (di un processo di estrazioni bernoulliane; e quindi, seguite ogni volta dal reimbussolamento dell'estratto) con le probabilità (appunto, costanti in ogni estrazione)

(2)
$$\frac{1-2\langle \lambda/n \rangle}{1-2\langle \alpha}, \begin{pmatrix} \lambda \\ \pi \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda \\ \pi \end{pmatrix}^n, \dots, \begin{pmatrix} \lambda \\ \pi \end{pmatrix}^m, \dots; \begin{pmatrix} \lambda \\ \pi \end{pmatrix} < \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$
,

di somma uno, e non negative perchè si ipotizza che l'intero u sia abbastanza grande da soddisfare la disuguaglianza

$$\frac{2}{\pi} < \frac{1}{2}$$

b) i si ditiene che nel generico tratto paralla $T_{i,i}$, sinco arrivati simultamentene in gruppo un numero o di clienti se la Plateriati si qui dentico bile, appanos, con un gruppo formato da σ client) che ha vavo nucesso in una estrazione da (T_i, i) que pue in successo in una estrazione da (T_i, i) que pue in successo, das l'antiquenene, a equivalente, anche se formalmente più complesso) si ritiene che in $T_{i,i}$ sinco arrivati e clienti $(\sigma = 0, 1, \dots, m_i)$ se nell'illumi estrazione da (T_i, i) che completa nu cumpione di taglia i ha vatus successo l'alternativa S_i (a prescindere, quindi, differente di cassona delle (T_i) e curvationi prevendenti.

Poniamo, fin d'ora, la seguente

DISTRICTION: Un processo (di arrivi aleatori) caratterizzato dalle ipotes b_1^{α} , b_1^{α} , b_1^{α} , b_2^{α} etter presente a tenți distrati bernosilinos a più alternatire, e appresentato col simbolo $3b(2)b_1$ 'Appellativo stando a ricordare il medo bernoulliano (cioè, con reimbussolamento) col quale vengono eseguite le estra-zioni dall'urato d_1^{α} a più alternative.

2. - Un primo approccio allo studio della variabile discreta $\xi_{i,j}^*$ che descrive il tempo d'attesa dell'e-mo cliente nel processo $\mathfrak{F}^*(\lambda|g)$.

Indichiamo con $\xi_{s,r}^{\perp}$ il tratto parziale aleatorio nel corso del quale, nel processo $\mathfrak{B}^{+}(\lambda|s)$, si totalizza almess un numero r_{+} (r>1), di clienti arrivati allo sportello.

Richiamismo l'attenzione sul fatto d'aver detto alment. Infatti è possibile, a norma dell'ipotesi h)^a, che anche nel solo primo

tratto parziale $T_{1,n}$ di D_n arrivi un gruppo formato da un numero m di clienti

maggiore di r. Gili sel primo tento allora si totalizza un numero m_i (m > t) di chieni arrival, in questo movo modelo quindi, adifferma di quelli considerari nei lev. cit. in (t), l'evento e statilegegioni di matri minimi e limiti se va sontitulo col seguente altro a natuleggiori di dimar a l'inimi si. Le violente chi a variabile alteroria ξ_{ij} , che indica il tratto paralite di D_i , nel corso del quale si verificia l'evento il trollizzazione nel nuovo verifione, poè obbesismo estero chiamaza anche in questo caso sunpe d'attusi dill'aves (nimi, implicita essendo allora l'iporia che opin giurpo politunio di client che arrivano simularenamene sia un grappo ordinato. Cib premesso ouserviamo dapprima che l'evento $(\xi_{ij} - T_{ij})$ si verifica se ser T_{ij} arriva oni s'alternatione d'internatione d'internat

attendibili rispettivamente con le probabilità

$$\begin{pmatrix} \hat{\lambda} \\ \bar{\sigma} \end{pmatrix}^r$$
, $\begin{pmatrix} \hat{\lambda} \\ \bar{\sigma} \end{pmatrix}^{r+1}$,

Perci

$$P(\xi_{n\sigma} = T_{1,n}) = \sum_{r=0}^{+\infty} {2 \choose r}^r = \frac{(\tilde{\chi}/\sigma)^r}{1 - \tilde{\chi}/\sigma} \triangleq {2 \choose r}^{r-1} (1 - \alpha_n),$$

ove è implicita la posizione

(5)
$$\frac{1-2(\lambda/a)}{1-\lambda/a} \triangleq \alpha_a$$
, quindi $\frac{\lambda/a}{1-\lambda/a} = 1-\alpha_a$; $0 < \alpha_a < 1$,

la doppia disuguaglianza essendo giustificata dalla (3).

Per prohabilizzare invece l'evento $(\xi_{i,r} = T_{i,s})$, con i>1, osserviamo che il suo successo richiede il verificarsi simultaneo dei due eventi di una delle seguenti r coppie di eventi:

 $(\eta_{(i-1)n}^+=t)$: sustinuente $t,\ (t=0,1,\dots,r-1)$ clienti arrivano complessivamente, in uno o più gruppi, nel periodo di tempo

$$\left[0, \sum_{i=1}^{i-1} T_{j,n} = \frac{i-1}{n}\right]$$

formato dai primi (i-1) tratti parziali di D_u , precedenti $T_{i,u}$; arrivo in $T_{i,v}$ di un gruppo formato da alumno (r-t) clienti;

il secondo dei quali ($PA_{\pi_{t+1}t-2}$), prevedendo l'arrivo del gruppo Θ_{t+1} oppure di un qualsiasi altro gruppo successivo a Θ_{t+1} essendo evidentemente attendi-

bile con la probabilità

(6)
$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{\lambda}{n}^{t} = \frac{(\lambda/n)^{p-t}}{1-2/n}.$$

Attesa l'indipendenza dei due eventi $(\eta_{n-1|n}^{-1} = t)$; $A_{T_{n+1} \to t}$, componenti la coppia corrispondente al valore intero t du considerarsi fissato fra gli interi dell'instene $(0,1,\dots,r-1)$, attesa inoltre la mueua incompatibilità di due coppie differenti del tipo $(\eta_{n-1|n}^{-1} = t)$; $A_{T_{n+1} \to t_n}$, si deduce

(7)
$$P(\xi_{n,i}^{*} = T_{t,n}) = \begin{cases} \frac{2}{n} \int_{-\infty}^{2} (1 - \alpha_{n}), & \text{per } i = 1, \\ \sum_{i=1}^{n} P(q_{0-1)n}^{i} = t) \frac{(\lambda(n)^{n-1}}{1 - \lambda/n}, & \text{per } \begin{cases} r = 1, 2, ..., \\ i = 2, 3, ... \end{cases} \end{cases}$$

Si tratta allora di valutare la probabilità

(8)
$$P(\eta_{(i-1)/n}^{+}=t)$$
, $\begin{cases} i=2,3,...\\ t=0,1,2,...,r-1 \end{cases}$,

pari a quella che in un campione di taglia (i-1), estratto da U^* , vi siano

(9)
$$r_0, r_1, r_2, ..., r_t, 0, 0, ...$$

successi, rispettivamente delle alternative

che, appunto nella infinità numerabile indicata in (1), sono presenti in U^*_{*} , con

$$(10) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathbf{r}_1 + 2\mathbf{r}_2 + \ldots + i\mathbf{r}_i &= t \\ \mathbf{r}_0 + \mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 + \ldots + \mathbf{r}_i &= i-1 \end{aligned} \right. \quad \left(\begin{aligned} i &= 2, 3, \ldots \\ i &= 0, 1, 2, \ldots, r-1 \end{aligned} \right),$$

Le probabilità polinomiali porgono in proposito le uguaglianze

(11)
$$P(\eta_{(i-1)n}^{c} = l) = \sum_{q_{\delta}} \frac{(i-1)_{1}}{\eta_{1} \cdot 1 \dots \eta_{l}} \left(\frac{|\lambda|}{\eta} \right)^{n} \cdot ... \left(\frac{|\lambda|}{\eta} \right)^{n} \cdot ... \left(\frac{|\lambda|}{\eta} \right)^{n} \cdot \left(\frac{1-2(\lambda|\eta)}{1-\lambda|\eta} \right)^{n} =$$

 $= \left(\frac{|\lambda|}{\eta}^{s} \cdot \sum_{q_{\delta}} \frac{(i-1)_{1}}{1-\lambda|\eta} \cdot \left(\frac{1-2(\lambda|\eta)}{1-\lambda|\eta} \right)^{n} \cdot d \cdot \left(\frac{|\lambda|}{\eta} \cdot \sum_{q_{\delta}} \frac{(i-1)_{1}}{1-\eta} \cdot \left(\frac{1-\lambda|\eta|}{\eta} \right)^{n} \cdot d \cdot \left(\frac{|\lambda|}{\eta} \cdot \sum_{q_{\delta}} \frac{(i-1)_{1}}{1-\eta} \cdot \left(\frac{1-\lambda|\eta|}{\eta} \right)^{n} \cdot d \cdot \left(\frac{|\lambda|}{\eta} \cdot \sum_{q_{\delta}} \frac{(i-1)_{1}}{1-\eta} \cdot \left(\frac{1-\lambda|\eta|}{\eta} \right)^{n} \cdot d \cdot \left(\frac{|\lambda|}{\eta} \cdot \sum_{q_{\delta}} \frac{(i-1)_{1}}{1-\eta} \cdot \left(\frac{1-\lambda|\eta|}{\eta} \right)^{n} \cdot d \cdot \left(\frac{|\lambda|}{\eta} \cdot \sum_{q_{\delta}} \frac{(i-1)_{1}}{1-\eta} \cdot \left(\frac{1-\lambda|\eta|}{\eta} \right)^{n} \cdot d \cdot \left(\frac{|\lambda|}{\eta} \cdot \sum_{q_{\delta}} \frac{(i-1)_{1}}{1-\eta} \cdot \left(\frac{1-\lambda|\eta|}{\eta} \right)^{n} \cdot d \cdot \left(\frac{|\lambda|}{\eta} \cdot \sum_{q_{\delta}} \frac{(i-1)_{1}}{1-\eta} \cdot \left(\frac{1-\lambda|\eta|}{\eta} \right)^{n} \cdot d \cdot \left(\frac{|\lambda|}{\eta} \cdot \sum_{q_{\delta}} \frac{(i-1)_{1}}{1-\eta} \cdot \left(\frac{1-\lambda|\eta|}{\eta} \right)^{n} \cdot d \cdot \left(\frac{|\lambda|}{\eta} \cdot \sum_{q_{\delta}} \frac{(i-1)_{1}}{1-\eta} \cdot \left(\frac{1-\lambda|\eta|}{\eta} \right)^{n} \cdot d \cdot \left(\frac{1-\lambda|\eta|}{\eta} \cdot \sum_{q_{\delta}} \frac{(i-1)_{1}}{\eta} \cdot \left(\frac{1-\lambda|\eta|}{\eta} \cdot \sum_{q_{\delta}} \frac{(i-1)_{1}}{\eta} \cdot \sum_{q_{\delta}} \frac$

ove evidentemente si è tenuto conto delle (5) e si è posto

(12)
$$A_{n,r-1,n} \triangleq \sum_{p_0 \mid p_1 \mid 1,...,p_\ell \mid} (\alpha_n)^{r_0}$$
,

la sommatoria essendo estesa a tutte le soluzioni intere non negative del sistema di equazioni (10).

È appena il caso di osservare che l'evento $(\eta_0^+=t)$ con t>0, è impaibili, perchè nell'istante medesimo in cui si comincia la conta dei tempi, non essendo trascorsa alcuna unità di tempo, per l'ipotesi h), non può essere arrivato alcun gruppo non vuoto di clienti. Perciò, necessariamente, dev'essere $P(\eta_{+}^{+}=t)=0$, per t>0. Questo risultato è anche deducibile dalla (11) non appena si ponga

(13)
$$A_{t,0} \triangleq 0$$
, per $t = 1, 2, ...,$

giustificabile peraltro dal fatto che per t > 0, e (t-1) = 0 il sistema (10) non ammette soluzioni nella classe delle soluzioni intere non negative.

Quando invece è t=0 ed (i-1)=0,1,2,..., il sistema (10) è compatibile anche nella classe delle soluzioni intere non negative. Ammette infatti la soluzione (unica): $v_i=i-1,v_1=v_2,...,v_n=v_n=0$.

La (11) porge allora le uguaglianze

(14)
$$A_{\alpha_i \leftarrow 1, \alpha} = P(\eta_{(i-1)|\alpha}^+ = 0) = \alpha_n^{i-1}, \text{ per } i = 1, 2,$$

Attese queste osservazioni e la (11), la (7) diventa

(15)
$$P(\xi_{h,r}^{*} = T_{i,u}) = \begin{cases} \frac{2}{u}^{-1}(1 - \alpha_{u}), & \text{per } i - 1 = 0, \\ \frac{2}{u}^{-1}(1 - \alpha_{v})\sum_{i=1}^{r-1} A_{h_{1} - 1 - i}; & \binom{r}{i} = 1, 2, ..., \\ \frac{2}{i} = 1, \frac{2}{u}, ..., \end{cases}$$

sufficiente ad evidenziare, a norma delle (13) e (14), che sussiste l'uguaglianza

(16)
$$P(\hat{s}_{n,r}^{t} = T_{i,n}) = \begin{cases} s_{n}^{t+1}(1 - \alpha_{n}), & (r = 1; i = 1, 2, ...), \\ \frac{1}{n}P(\hat{s}_{n,r-1} = T_{i,n}) + \left(\frac{\lambda}{n}\right)^{t-1}(1 - \alpha_{n})A_{r-1,t-1,n}; & j = 1, 2, ...\end{cases}$$

A questo punto sospendiamo lo studio della variabile casuale $\xi_{n,r}$ per riprenderlo più avanti dopo che avremo calcolato la probabilità indicata in (8).

derio più avanti dopo che avremo cascolato la probabilità indicata in (a).

Anzi, con l'occasione, inizieremo e completeremo lo studio della variabile
casuale che descrive il numero aleatorio complessivo di clienti che possono
arrivare in un fissato periodo di tempo,

 RICERCA DELLA VARIABILE CASUALE CHE DESCRIVE IL NUMERO COMPLESSIVO ALEATORIO DI CLIENTI ARRIVABILI IN UN FISSATO INTERVALLO TEMPORALE

Fissato x reale positivo qualsivoglia sul semiasse positivo dei tempi, e detto $i(\theta_i,x)$, con $i(\theta_i,x)>1$, il particolare valore dell'indice i che individua il tratto parziale $T_{i(\theta_i,x),n}$ (di D_n) contenente l'x fissato, vogliamo probabilizzare l'evento

$$\eta_{\ell(s,s):s}^* = k,$$

e cioè: nell'intervallo temporale]0, (i(n, x))/n] arrivano complessinamente le clienti,

senza alcuna pretesa che nell'ultimo tratto $T_{(0,\kappa,0,\kappa)}$ contenente l'x fissato, si debba verificare necessariamente un qualsivoglia arrivo singolo o plurimo. È evidente che k è un numero aleatorio.

Osserviamo subito che i k client, arrivabili in [0, (i[e,x))]el possono piazzari (col loro colfine di arrivo in gruppi) su un numero k dei possibili, di ratti parziali, di guiste che il piazzamento dei gruppi su una k-upla di tratti parziali può allora verificarsi in $\binom{f(e,x)}{k}$ modi differenti. È implicito che sarà $\binom{f(e,x)}{k}$

 $b < i(\pi, x)$.

Ma sarà anche

b<k.

perchè i k clienti in arrivo si piazzeranno su k tratti perziali (disgiunti come sono i tratti di D_s) soltanto se arriva il gruppo \mathfrak{G}_1 (comprendente un solo cliente) per ogni singolo ratto. Quindi il massimo valore possibile per b è

(18) $b_{\text{max}} = \min(k, i(\epsilon, x))$.

È evidente d'altronde che il piazzamento d'arrivo dei k clienti (con k>0) avvertà almeno su uno dei tratti parziali (precisamente, almeno su uno dei primi i(n, v) tratti). Quindi ad k (quando è k>0) sono ammissibili i valori naturali soddisfacenti le disuguaglianze

(19) 1<b<k.

(20) $\binom{k-1}{b-1}$.

Per comodità del leutore tiportiano, riferito al nostro caso, Frenena del rapionamento che riguenta la soluzione di un noto problem di analisi continuo tota (P. É opportuno identificare i k clienti in strivo (perattro ordinala) nonche se attivano a gruppi, con un qualivorgità criterio) ome altrettante inpui (k dei a due distinti) disseti su una testa e determinanti allora (k -1) intervalli sepazone di degiunti, cisacono versee per estretta de de di k junii. Per valli sepazone di degiunti, cisacono versee per estretta de de di k junii. Per valli sepazone di degiunti, cisacono versee per estretta de de di k junii. Per valli sepazone di degiunti, cisacono versee per estretta de de di k junii. Per valli sepazone di superiori de de k junii. Per valli sepazone di superiori de de k junii. Per valli sepazone di superiori de de k junii k juniii k juniii k junii k

^(*) J. RIOKININ, An Introduction to Combinatorial Analysis, J. Wiley (1958), c. 3, p. 92,

effettuare una partizione dei & clienti così allineati in

gruppi disgiunti, basta fissare, rispettivamente

punti (qualificialiti come panti aparatira) nell'interno di alternanti internali inte

Anzitutto segue che il piazzamento dei gruppi in arrivo su una qualsivoglia b-upla degli i(n, x) tratti parziali è possibile allora complessivamente in

$$\binom{k-1}{b-1} \binom{i(n,x)}{b}$$

mod idferent. Però, qualmope sia la modalità di piazzamento, sono sempre k i clienti che attivono complessi vamene nell'intervalto emporale $[0, (i, s, s)\phi]$. Quindi a norma dell'ipocesi b_{ij}^{\dagger} , celle i(s, s) estrazioni da eseguire dall'uras U_i^{\dagger} (succioria D_i , appunto, per determinare gli arrivi, che complessimone possono verificarsi in i(s, s) virsti paraishi dovranno aver avuto successo, fra i remoli non vuccio, tolo è tra i seguenti

$$g_1, g_2, ..., g_{k-k+1},$$

rispettivamente con le frequenza

(23)
$$r_1, r_2, ..., r_{k-k+1}$$

soddisfacenti le uguaglianze

(24)
$$\begin{cases} r_1 + 2r_2 + ... + (k - b + 1)r_{k-k+1} = k \, \binom{a}{2}, \\ r_1 + r_2 + ... + r_{k-k+1} = b, \end{cases}$$

ed il gruppo vuoto 80 con la frequenza

$$y_0 = i(u, x) - (r_1 + r_2 + ... + r_{k-k+1}) = i(u, x) - b$$

(*) Le (26), ove sob à della frequence in gioco tono positive, esquimono che i gruppi in strivo si piazzano occupando (conti e soli) è tratti degli $R_c \times I_c$ a tolulizzano su manero complanto di A cilicati in artivo. Si appenui il caso di conversor dei il manistro muerzo di diferit dei si possoco piazzane in un solo (daggodo) tratto paralale è k - k + 1, altrimenti i è cliquii in artivo non potrebbero distributivi composito dei R_c il sur solo (daggodo) tratto paralale è R_c - R_c + R_c - R_c + R_c - $R_$

Attese le probabilità con cui sono attendibili i singoli gruppi, segue allora che per egni inquia modalità con cui parmo piarqueri (su h'tratti fissati) i gruppi la arrire, la probabilità dell'arrivo di complessivi k clienti in [0, (i(s, v)), e] è allora

$$(26) \qquad \left(\frac{\lambda}{c}\right)^{a_1} \left(\left(\frac{\lambda}{c}\right)^{b_1^{a_1}} \cdots \left(\left(\frac{\lambda}{c}\right)^{b_1 b_2 + 1}\right)^{a_1 b_1 a_1} z_a^a = \left(\frac{\lambda}{c}\right)^{(a_1 + b_1 a_1 - (c - b + 1)a_1 b_2 a_2)} z_a^{a_1 a_2 b_2} = \\ = \left(\frac{\lambda}{c}\right)^{b_1} z_a^{(b_1 c - b)} ;$$

per cui la probabilità con cui possono arrivare in]0, (i(s,x))/s] k clienti e piuzzarsi su una qualsiasi delle δ -uple di tratti, fra le $\binom{\widetilde{I}(s,x)}{\delta}$ possibili, è

(27)
$$\begin{pmatrix} \tilde{k} - 1 \\ \tilde{\sigma} - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{i}(\sigma_s, x) \\ \tilde{\sigma} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ \tilde{\sigma} \end{pmatrix}^b \sigma_u^{(\tilde{\sigma}_s, r) - b}.$$

Per ottenere allora la $P(\eta_{(s,s))a}^{\perp}=k)$ non resta che sommare rispetto ad b da uno al min (k,i(s,s)). Quindi, quando k>0, risulta

$$(28) \qquad P(\eta_{\delta(n,c)|n}^{\perp} = k) = \sum_{k=1}^{\min\{k, k', n, c\}} {k-1 \choose b-1} {l(n, x) \choose b} {l \choose a}^b a_n^{\delta(n,c)-b}.$$

Per k=0 il calcolo della probabilità è immediato. Infatti, in ciascuna della $i(\pi,x)$ estrazioni da U_n^+ deve aver successo soltanto l'alternativa \mathfrak{F}_0 , attendibile in ciascuna estrazione, con la probabilità α_n . Quindi

(29)
$$P(\eta_{(0,r)|u}^+=0)=a_u^{((u,r)}$$
.

4. - Verifica che è uguale ad uno la somma delle probabilità

ASSOCIATE AGLI INFENTIT VALORI POSSIBILI DELLA VARIABILE $\eta_{i(n,s)}^+$

Verifichiamo subito che qualunque sia s (da considerarsi fissato; e con a quindi è fissato anche l'indice l(s,x) che individua il tratto contenente l'x fissato) sussiste l'uguaglianza

$$\sum^{+\infty}_{} P(\eta^{+}_{((a,b))a} = k) = 1.$$

(30)

Infatti scrivendo per semplicità solo i al posto di i(n, n), utilizzando la (29), si ottiene

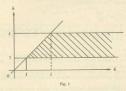
$$(31) \qquad \sum_{k=0}^{\infty} P(g_{n,k}^{*} = k) = a_{n}^{*} + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\min(k-1)} \binom{k-1}{k-1} \binom{k}{s} \binom{2s}{s} a_{n}^{*} a_{n}^{*} =$$

$$= a_{n}^{*} + \left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \binom{k-1}{k-1} \binom{k}{s} \binom{2s}{s} a_{n}^{*} a_{n}^{*} + \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \binom{k-1}{k-1} \binom{k}{s} \binom{2s}{s} a_{n}^{*} a_{n}^{*} \right)$$

È facile convincersi che la somma delle due doppie sommatorie equivale alla somma dei termini che si ottengono dall'espressione

$$\begin{pmatrix} \tilde{\epsilon} - 1 \\ \tilde{b} - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{t} \\ \tilde{b} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{c} \\ \tilde{a} \end{pmatrix}^{\tilde{c}} \alpha_{n}^{\tilde{c} - \tilde{b}},$$
(32)

ponendo ivi al posto di k ed b due interi per i quali la coppia ordinata (k,b) ha come immagine sul piano carresiano (k,b), i punti di coordinate intere della parte di piano che nella figura che segue è oscurata da tratteggio.



Ne segue allora l'uguaglianza

33)
$$\sum_{k=0}^{+\infty} P(\eta_{k|n}^{+} = k) = a_{n}^{k} + \sum_{k=1}^{k} {i \choose k} a_{n}^{k-k} {k \choose k} \sum_{k=1}^{+\infty} {k-1 \choose k-1} {i \choose k}^{k-k}$$

ove

$$\sum_{k=1}^{n-m} {k-1 \choose k-1} \left(\frac{2}{s}\right)^{k-k} = \left(1-\frac{2}{s}\right)^{-k} {n \choose 2}.$$

Pertanto risulta

$$(35) \sum_{k=0}^{nm} P(\eta_{i,n}^{\pm} = k) = u_n^{\pm} + \sum_{k=1}^{k} {l \choose k} u_n^{\pm n} \left(\frac{\lambda |\sigma|}{1 - \lambda |\sigma|} \right)^k = u_n^{\pm} + \left(u_n + \frac{\lambda |\sigma|}{1 - \lambda |\sigma|} \right)^k - u_n^{\pm} = 1,$$

(?) Posendo $h+t=h,\ (t=0,1,2,\ldots)$ si ottier

$$\binom{k-1}{b-1} = \binom{k-1}{k-b} = \binom{b+s-1}{s} = (-1)^s \binom{-b}{s}$$
.

e quindi

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \binom{k-1}{k-1} \binom{2}{k}^{2-k} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^{k} \binom{-k}{k} \binom{2}{k}^{k} = \left(1-\frac{2}{k}\right)^{-k}.$$

perchi

$$\alpha_n + \frac{\lambda/a}{1 - \lambda/a} \triangleq \frac{1 - 2(\lambda/a)}{1 - \lambda/a} + \frac{\lambda/a}{1 - \lambda/a} = 1$$
.

Possiamo quindi concludere che $\eta^+_{i(n,e)|u}$ è una variabile casuale che assume gli infiniti valori interi

rispettivamente con le probabilità

(37)
$$a_{i}^{i}$$
, $\frac{1}{a}[a_{i}^{i-1}; {2 \choose a}^{i}]^{i}$.

$$\begin{cases}
1, & \text{se } i = 1, \\
\binom{1}{i}, a_{i}^{i-1} + \binom{1}{i}; a_{i}^{i-1}, & \text{se } i > 2, \\
\vdots; \sum_{k=1}^{n-1} \binom{k-1}{k-1} \binom{k}{i} \binom{2}{a}^{i} a_{i}^{k-1}; \dots \\
\binom{n}{i} a_{i}^{n-1} + \binom{n}{i$$

di somma uno.

È appena il caso di osservare che contrariamente alle analoghe variabili dei due modelli precedenti studiati nel lav. cit. in (3), la variabile $\eta_{ila,clin}^{ila}$ può assumere valori maggiori di i(n, x).

Addirittura può assumere tutti i valori interi positivi, appunto perchè per ipotesi i gruppi arrivabili possono contenere un numero di clienti grande quanto si vuole.

Per ricordare lo schema bernoulliano ad infinite alternative che genera la $\eta_{(s_{cub}),a}^{(s)}$ ed il fatto che sono infiniti i suoi possibili valori noi chiamiamo tale variabile col nome di « polimmiale infinita ».

5. - Valor medio e varianza di η_{Da}^{+}

Calcoliamo dapprima il valor medio. Si ottiene

(38)
$$q_{ijn}^{*} \triangleq \sum_{j=k}^{\infty} kP(\gamma_{ijn}^{*} = k) - \sum_{k=1}^{\infty} kP(\gamma_{ijn}^{*} = k) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\min(k)} k \binom{k-1}{k-1} \binom{i}{k} \binom{j_k}{q_k}^{k} a_n^{i_k k}$$

Di qui, con analogo procedimento con cui si passa dalla (31) alla (33), si ottiene:

(39)
$$\bar{\eta}_{l,a}^{+} = \sum_{k=1}^{l} {l \choose b} a_n^{l-k} \begin{pmatrix} \hat{k}_{l}^{k} \end{pmatrix} \sum_{k=1}^{l-k} k \begin{pmatrix} k-1 \\ b-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \end{pmatrix}^{k-k} - \sum_{k=1}^{l} \begin{pmatrix} k \\ b \end{pmatrix} a_n^{l-k} \begin{pmatrix} \lambda \\ \bar{n} \end{pmatrix}^{k} b \sum_{k=1}^{l-k} \begin{pmatrix} k \\ b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ \bar{n} \end{pmatrix}^{k-k}$$
perché

$$\binom{k-1}{b-1} = \binom{k}{b} \frac{b}{k}$$
.

$$\sum_{k=1}^{\infty} {k \choose k} {2 \choose n}^{k-k} = \left(1 - \frac{2}{n}\right)^{-(k+2)} {9 \choose n}$$

e allora, a norma della (5), segue che

$$\begin{aligned} \hat{\eta}_{i,0}^{i} &= \frac{1}{\lambda |a} \sum_{i=1}^{i} \int_{0}^{1} da_{i}^{i} a^{i} (1 - \alpha_{i})^{b+1} := \\ &= \frac{i(1 - \alpha_{i})^{a}}{\lambda |a} \sum_{i=1}^{i} \int_{0}^{1} \frac{i-1}{(i-1)} a_{i}^{b+1-(b-1)} (1 - \alpha_{i})^{b+1} := \frac{\lambda(\beta|a)}{(1 - \lambda|a|^{2})}. \end{aligned}$$

Occupiamoci ora della varianza della η_{in}^+ , e, a rule scopo, calcoliamo dapprima il momento secondo rispetto all'origine. Anche qui, utilizzando il procedimento con cui dalla (31) si passa alla (33), e l'uguaglianza

$$\binom{k-1}{b-1} = \frac{b(b+1)}{k(k+1)} \binom{k+1}{b+1}.$$

si ottiene

$$(42) \qquad \sum_{k=1}^{+\infty} k^2 P(\eta_{im}^+ = k) = \sum_{k=1}^{+\infty} k(k+1) P(\eta_{im}^+ = k) - \sum_{k=1}^{+\infty} k P(\eta_{im}^+ = k) =$$

$$= \sum_{k=1}^{l} \binom{l}{b} \alpha_n^{l-k} \binom{2}{a}^k \sum_{k=k}^{l-m} b(b+1) \binom{k+1}{b+1} \binom{2}{a}^{k-k} - \widetilde{\eta}_{kn}^{-k}.$$

Ma, questa volta, vale l'uguaglianza

$$(43) \qquad \sum_{k=1}^{4} {k+1 \choose k+1} {k \choose k}^{k-k} = \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-(k+2)} (7).$$

(*) Basta poere, come al solito, $\dot{x}+t=\dot{x},~(t=0,1,2,...).$ Si orriene

$$\binom{k}{k} = \binom{k}{k-k} = \binom{k+\ell}{\ell} = (-1)^{\ell} \binom{-(k+1)}{\ell};$$

quindi

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \binom{k}{k} \binom{2}{k}^{k-k} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \binom{-(k+1)}{\ell} \binom{2}{k}^\ell - \left(1-\frac{2}{n}\right)^{-(k+2)}.$$

(?) Si giantifica col solito cambiamento di variabile: $b+t=k_{\epsilon}$ (t=0,1,2,...), che, cel caso artuale, porge

$$\binom{k+1}{b+1} = (-1)^t \binom{-(b+2)}{t}.$$

Quindi, ricorrendo alle (5), si ottiene

$$(44) \sum_{k} k^{2} F(\eta_{0}^{1} = k) = \frac{1}{(\lambda \phi)} \sum_{k} h(\beta + 1) \binom{1}{\delta} y_{n}^{-k} (1 - x_{n})^{k+2} - q_{0}^{-k} =$$

$$= \frac{1}{(\lambda \phi)^{2}} \sum_{k} \binom{1}{\delta - 1} ((\delta - 1) + 2) x_{n}^{-k} (1 - x_{n})^{k+2} - q_{0}^{-k} =$$

$$= \frac{(\ell - 1)}{(\lambda \phi)^{2}} \sum_{k} \binom{\ell - 2}{\delta - 2} x_{n}^{-k} (1 - x_{n})^{k+2} + \frac{2\ell}{(\lambda \phi)^{2}} \sum_{k} \binom{\ell - 1}{\delta - 1} x_{n}^{-k} (1 - x_{n})^{k+2} - q_{0}^{-k} =$$

$$= \frac{(\ell - 1)(1 - x_{n})^{k}}{(\lambda \phi)^{2}} \sum_{k} \binom{\ell - 2}{\delta - 2} x_{n}^{-k} - (1 - x_{n})^{k+2} + \frac{2\ell(1 - x_{n})^{k}}{(\lambda \phi)^{2}}$$

$$= \frac{\ell(\ell - 1)(1 - x_{n})^{k}}{(\lambda \phi)^{2}} \sum_{k} \binom{\ell - 1}{\delta - 2} x_{n}^{-k} - (1 - x_{n})^{k+2} - \frac{\ell(\ell - x_{n})^{2}((\ell - 1)(1 - x_{n}) + 2)}{k} - \frac{\ell(\ell - x_{n})^{2}(\ell - 1)(1 - x_{n}) + 2}{k} - \frac{\ell(\ell - x_{n})^{2}(\ell - 1)(1 - x_{$$

ove, è appena il caso di avvertire che si è tenuto conto della consueta convenzione che, nel nostro caso, porge $\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$.

Di qui utilizzando la formula di Köenig, si ottiene

(45)
$$\operatorname{Var} \eta_{0n}^{+} = \lambda \frac{i}{n} \frac{1 - \lambda/n - (\lambda/n)^{2}}{(1 - 2in)^{4}}$$

6. - Convergenza della polinomiale infinita $\eta_{(s,t)a}^+$ alla poissoniana

Si tratta di provare la convergenza

(46)
$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{\min(0,c)} \begin{pmatrix} k-1 \\ \delta-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda^k \\ 0 \end{pmatrix} \alpha_n^{i-k} = \frac{(\lambda \kappa)^k}{k!} e^{-\lambda s}.$$

Anzi, atteso che

- k è un intero non negativo fissato,

— x è un reale positivo fissato, per il quale valgono le solite relazioni

$$(47) \qquad -\frac{1}{s} < x - \frac{i(s,x)}{s} < 0 \; , \quad \lim_{s \to +\infty} \frac{i(s,x)}{s} = x \neq 0 \; , \quad \lim_{s \to +\infty} i(s,x) = + \; \infty \; ,$$

sia pur con i(n,n) che può anche oscillare come è stato rilevato nella nota (*) del primo lav. cir. in (*),

e quindi che, per π sufficientemente grande, sussiste l'uguaglianza

$$\min(k, i(n, x)) = k$$
,

si tratta di provare la convergenza

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{k} {k-1 \choose k-1} {i \choose k} {\lambda^k \choose r} x_n^{r,k} = \frac{(\lambda s)^k}{k!} e^{-\lambda s}.$$

A tale scopo osserviamo che

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k-1}{k} \binom{2}{k} e^{kx} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k-1}{k-1} \binom{2}{k} \binom{2}{k} e^{kx} + \binom{k}{k} \binom{2}{k} e^{kx} = \\
- \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k-1}{k-1} \binom{2}{k} \lim_{n\to\infty} \binom{k-1}{k-1} \frac{1}{n} \frac{1}{n} \frac{1}{n} \frac{1}{n} \frac{1}{n} \frac{1}{n} \frac{1}{n} \frac{1}{n} \frac{1}{n} e^{kx} + \\
+ \frac{2k}{k!} \lim_{n\to\infty} \binom{k-1}{k-1} \frac{1}{n} \frac{1}{n} \frac{1}{n} \frac{1}{n} \frac{1}{n} e^{kx} = 0 + \frac{(2n)^n}{k!} e^{-kx}.$$

perchè

(51)
$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n^{i,k} = \lim_{n\to\infty} \alpha_n^{i,k} = \lim_{n\to\infty} \left[\left(\frac{1-2(\lambda/a)}{1-\lambda/a} \right)^n \right]^{(i-1)n} = \frac{e^{-2\lambda a}}{e^{-\lambda a}} = e^{-\lambda a},$$

(52)
$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{i}{n}\frac{i-1}{n}\dots\frac{i-b+1}{n}\right) = s^{\lambda}; \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{i}{n}\frac{i-1}{n}\dots\frac{i-k+1}{n}\right) = s^{\lambda}.$$

(53)
$$\lim_{k \to 0} \frac{1}{k} = 0$$
, $k - b > 0$.

Conclusiamo quindi che, anche nel processo $S^{*}(\lambda|\theta)$, la variabile $v_{n,i,m}^{*}(chi)$ mant, polimonide fightigh che descrive il muntero alcatrori di client arrivamant, polimonide fightigh che descrive il muntero alcatrori di client arrivain un finasto intervallo temporale, converge, col tendere a zero del pauto $|0\rangle$ dedella partizione di discertizzante il tempo, vero la clasifesa variabile examise l'associazante proportione del pauto più o
soninas (di valor medio e varianza uguate a λv), che, notoriamente, descrivel'analogo numero alcatrori ori processo (di arrivi) a rempo continuo di Porta.

ranango numero acestorio nei processo (di arrivi) a ompo continuo di roisson. Le (41) e (45), attese le (47) mostrano che anche la media e la varianza della polinomiale infinita convergono, col divergere di s, alla media e varianza della poissoniana.

7. - STUDIO DELLA VARIABILE To

ESPRIMENTE IL TEMPO ALEATORIO SEPARATORE DI DUE ARRIVI SUCCESSIVI

Perima dil riprendere lo studio della variabile ξ_{∞}^{-} (che descrive il tumpo di attesa dell'-mo cliente) inkinio ancora nel n. 2, eccupiamo di det tempo alsacotto spenatore di doca arrivi successiri (im arrivo, come è previsto dall'ipotesi $|\hat{h}|_{\infty}^{-}$) portado essere costituito di un gruppo formato da uno o più clienti). Una late tempo separazore si identifica norotiamente con ξ_{∞}^{-} con appena si nogeo l'origine dei tempi in uno qualivroglia degli intauti in cui si verifica un arrivo (composto, come a i detto, da uno a canche più clienti). Con questro posizioni namento dell'origine dei tempi (che noi ipotizziamo) i due eventi

$$(54) \qquad \langle \xi_{ab}^{+} = T_{ba} \rangle; \quad \left(\nabla_{a}^{+} = \frac{t}{a} \right)$$

si identificano. Il primo prevede il verificarsi dell'arrivo di alesses un cliente nel corso del generico intervallo parziale T_{k_0} . Un siffatto evento avrà successo solo quando si verificano entrambi i seguenti eventi:

- gers arriri nel periodo di tempo

$$\left[0, \sum_{i=1}^{i-1} T_{j,n} = \frac{i-1}{n}\right],$$

formato dai primi (i-1) tratti parziali precedenti il tratto $T_{i,v}$. Tale evento, attese le (1), (2), l'ipocesi h) $_i^v$ e le posizioni (5) può verificarsi con la probabilità $g^{(-1)}$

— almens un arrivo (e quindi: 1, 2, 3, ... arrivi) in $T_{i,n}$ il che è attendibile, sempre per le (1), (2), l'ipotesi h) $_n^*$ e le posizioni (5), con la probabilità

$$\sum_{i=1}^{+\infty} \binom{\lambda}{i}^i = \frac{\lambda}{\pi} \sum_{i=1}^{+\infty} \binom{\lambda}{\pi}^{i-1} = \frac{\lambda}{\pi} \frac{1}{1-\lambda/\pi} = 1-\alpha_n.$$

Quindi, per l'indipendenza implicata dalle bernoullianità delle estrazioni cui sono legati gli arrivi, l'evento (54) è attendibile con la probabilità

$$P(\xi_{a,i}^+ = T_{i,a}) = (1 - z_a)z_a^{i-1}$$
,

come peraltro è indicato nella (16). È immediata l'unusolianza

6)
$$\sum_{i=1}^{+\infty} P(\xi_{n,i}^{+} = T_{t,n}) = (1 - \alpha_s) \sum_{i=1}^{+\infty} a_s^{i-1} = (1 - \alpha_s) \frac{1}{1 - \alpha} = 1.$$

Attesa la doppia corrispondenzi

$$T_{in} \neq \frac{i}{g}$$

si può dire allora che $\mathfrak{T}_{\mathbf{s}}^+$ è una variabile casuale che può assumere i valori

(57)
$$\frac{1}{s}, \frac{2}{s}, ..., \frac{i}{s}, ...$$

rispettivamente, con le probabiliti

(58)
$$(1-\alpha_n), (1-\alpha_n)\alpha_n, ..., (1-\alpha_n)\alpha_n^{i-1}, ...$$

che la qualificano come una soriabile geneutrica, nella quale le probabilità (complementari) di successo ed insuccesso sono rispettivamente

(59)
$$p_n \triangleq (1 - \alpha_n), \quad q_n = \alpha_n$$

con a, definita in (5).

Con calcoli elementari si trova che

(60)
$$\overline{C}_a^+ = \frac{1}{\lambda} \left(1 - \frac{\lambda}{a}\right), \quad \text{Var } \overline{C}_a^+ = \frac{(1 - \lambda/a)^2}{\lambda^2} \, (^4).$$

Proviamo che \overline{G}_{k}^{*} non caratterizza il processo a tempi discreti bernoulliano a più alternative $3b^{*}(\lambda/a)$, nel senso che si qualifica solo come condizione necessaria ma non sufficiente.

Infatti abbiamo appena visto che se il processo è un $\mathcal{B}^{\alpha}(\lambda/n)$, il tempo separatore di due arrivi successivi è espresso dalla variabile $\mathfrak{T}_{+}^{\alpha}$.

Viceversa, fissando l'origine dei tempi nell'estremo destro del tratto purziale dell'equipartizione D_c nel corso del quale si è verificato uno qualato, degli artivi (formato, ricordiamoto, da uno o più (clenti), suppiamo per ipotesi che la probabilità che possa arrivate alleuse un cliente nel generico tratto T_{tot} (e quindi, che il tempo separatore fra doe arrivi successivi sia dv).

(61)
$$(1 - \alpha_s) \alpha_s^{i-1}$$

con a_i sold-inferente le dissuguațilarue $0 < a_i < 1$, ma non mecessarimement edinini dulle (5). Inferit îni (64) obret e descere la probabilită con la quale în un eumpione di taglia l_i estrato da un'urua come la U_{ii}^{μ} pub comparire l'alternativo 0, andie prime (-1) estratorio i unu delle qualityoigh rimmenti ilaternative 0, 0, ..., nella l-ma serrazione, è anche la probabilità con la quale în un analogo cumpione estratori du un'urua come la U_i previsit nel primo lucit. in (γ) a due sole alternative; successo el introcesso metarilibii rimettrinicionecesi nella prime (-1) estratorio el un successo metarilibii rimettrinicionecesi nella prime (-1) estratorio el un successo mela l'ima terrazione. In altre parole, il processo a tempi discreti potrebbe esere un $3^{\mu}(\lambda)\phi_i$ ma anche $3(p^{\mu} = 1 - \alpha)$

Perciò il fatto che i possibili valori del tempo separatore di due arrivi successivi siano probabilizzati con legge geometrica non permette, in questo caso, di dire che il processo di arrivi a tempi discreti è un 31 (2016).

Comunque concludiamo lo studio della variabile casuale $\xi_{n,1}^+ = G_n^*$ dimostrando la convergenza all'esponenziale $\lambda e^{-\lambda c}$ col divergere di s a $+\infty$.

(*) Busta utilizzare le note uguaglianze

$$\sum_{i=1}^{+\infty} is_n^{i-1} = \frac{1}{(1-\alpha_n)^i}\;; \qquad \sum_{i=1}^{+\infty} i^i s_n^{i-1} = \frac{d}{dx_n} \sum_{i=1}^{+\infty} is_n^i = \frac{2}{(1-\alpha_n)^i}$$

Seguendo il ragionamento sviluppato nel n. 5 dei lav. cit. in (?), definiamo la variabile casuale continua $\tilde{\xi}_{n,k}^{+} = \overline{G}_{n}^{+}$ avente come densità, per ogni fissato x_i la funzione.

$$(62) f_{n,1}(x) = \begin{cases} 0, & \text{per } x < 0, \\ \frac{P(\xi_{n,1}^+ = \xi_n^+ = T_{d(n,d),n})}{1/n} = n(1 - \alpha_n) x_n^{(n,d)-1}, & \text{per } x > 0, \end{cases}$$

ove, come al solito, i(n, s) è quel particolare indice i che individua il tratto parziale $T_{(i,n),s}(d)$ D_n che contiene il numero reale s fissato. Poichè a norma delle (5) risulta

$$f_{v,l}(x) = \begin{cases} 0, & \text{per } x < 0, \\ \frac{\lambda}{1 - \lambda/n} \left[(1 - 2(\lambda/n))^n \right]^{((v,\omega) - 1)/n}, & \text{per } x > 0 \end{cases}$$

e sussistono anche in questo caso le (41), è evidente che

(63)
$$\lim_{n\to+\infty} f_{n,1}(x) \triangleq f_1(x) = \begin{cases} 0, & \text{per } x \leqslant 0, \\ \lambda \frac{e^{-2\lambda_x}}{e^{-\lambda_x}} = \lambda e^{-\lambda_x}, & \text{per } x > 0 \end{cases}$$

con

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x) dx = \int_{0}^{+\infty} f_1(x) dx = 1.$$

Di qui a, norma del criterio generalizzato di computabilità di Volpto-Bresan tiroritata nel n. 4 del liv. cti. in $\langle V_i \rangle$ a conclute che i a variable $\xi_{r_0}^* = \mathbb{T}_k^*$ conè cone la variable exponentiale k^{-1} ripica del processo di arrivi a tempo contino di Position per la descrizione del tempo septanto di disc arrivi successivi. È evidente che anche il valor medio e la varianza convergono, col divergere di n_i al valor medio 1/k e al la varianza 1/k della exponenziati.

8. - Depinitiva espressione della variabile descrita $\xi^{\nu}_{\alpha,\sigma}$ che descrive il tempo d'attesa dell's-mo cliente

Siamo ora in grado di riprendere e completare lo studio della variabile $\xi_{s,s}^*$ iniziato nel n. 2. Vediamone intanto la sua definitiva espressione. Utilizzando la (11) e la (28) con i simboli opportunamente adeguati, si trova l'uguaglianza

(64)
$$\binom{\lambda}{a}^{i} A_{i,i-1,u} = \sum_{j=1}^{\min(i,j-1)} \binom{i-1}{b-1} \binom{i-1}{b} \binom{\lambda}{a}^{i} \alpha_{u}^{(i-1)-k},$$

e quindi per la (14) e la (29), la seguente altra

(65)
$$A_{i,i-1,u} = \begin{cases} a_{i}^{i-1}, & \text{per } t = 0 \\ \sum_{k=1}^{\min(i_{i},i-1)} {i-1 \choose k-1} {i-1 \choose k} x_{k}^{i_{k-1,i-k}}, & \text{per } t > 1, \end{cases}$$

implicito essendo che sia (i-1)>1, perchè quando (i-1)=0, a norma della (13), risulta $A_{i0,c}=0$, per i>1. Attesi questi risultati, la (15) porge

(66)
$$P(\xi_{n,r}^+ = T_{i,n}) =$$

$$= \begin{vmatrix} \left[\frac{2}{\pi}\right]^{r-1}(1-\alpha_s)\,, & \text{per } (l-1)=0\,, \\ \left[\frac{2}{\pi}\right]^{r-1}(1-\alpha_s)\left\{a_s^{r-1}+\sum_{l=1}^{r-1}\max_{j=1}^{\max(l,l-1)}\binom{\ell-1}{b-1}\binom{\ell-1}{b}a_s^{(l-1)-k}\right\}, & \text{per } (l-1)>1\;. \end{vmatrix}$$

Ne segue che, sempre a norma della doppia corrispondenza

$$T_{i,n} \rightleftharpoons \frac{i}{n}$$
,

i valori ammissibili alla variabile &*, sono i seguenti

attendibili, rispettivamente, con le probabilità

(68)
$$\binom{\lambda}{q}^{r-1}(1-\alpha_n), \binom{\lambda}{q}^{r-1}(1-\alpha_n)(\alpha_n+r-1), ..., \binom{\lambda}{q}^{r-1}(1-\alpha_n) \cdot \left\{ \alpha_n^{r-1} + \sum_{l=1}^{r-1} \min_{k=l}^{r-1} \binom{l}{r} - 1 \choose l - 1 \choose k} \alpha_{n-1}^{r-1} \alpha_n^{r-1} \right\}, ...$$

che, per r=1 e la convenzione che sia (come è abitudine in casi simili) $\sum_{i=1}^{n}... \stackrel{a}{=} 0$, restituiscono le (58).

9. - Verifica сне й имтавіа
 La probabilità distribuità dalla $\xi_{n,i}^+$ Sappiamo già dalla (56) che l'ugu
aglianza

(69)
$$\sum_{i=1}^{+\infty} P(\xi_{n,i}^+ = T_{i,n}) = 1,$$

è soddisfatta quando r=1. Applicando allora il principio di induzione completa, la supporremo soddisfatta per (r-1) e proveremo che allora è sod-

disfatta anche per r. Applicando la (16) e l'ipotesi che la (69) sia soddisfatta per r-1, si ottiene

(70)
$$\sum_{k=1}^{n-1} P(\hat{z}_{n,r}^* = T_{n,n}) = \frac{2}{n} + \left(\frac{2}{n}\right)^{r-2} (1 - \alpha_n) \sum_{k=1}^{n-1} A_{r-1, r-1, n}, \quad \text{per } r > 2,$$

ove, a norma delle (13) e della (65) è

$$A_{r-1,i-1,a} = \begin{cases} 0, & \text{per } (i-1) = 0, \\ \min_{k=1}^{(r-1,i-1)} \binom{r-2}{k-1} \binom{i-1}{k} z_a^{(i-1)-k}, & \text{per } (i-1) > 1. \end{cases}$$

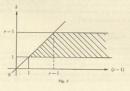
Ne risultano allora le uguaglianze

(72)
$$\sum_{i=1}^{n} P(G_{ir}^{i} = T_{i:i}) - \frac{i}{\sigma} + \binom{n}{2}^{i} (-1 - a_i) \sum_{i=1}^{n} \binom{n-2}{i} \binom{i}{r} - \binom{n}{r} \sum_{i=1}^{n} \sum_{i=1}^{n-1} (-1 - a_i) \binom{n-2}{r} \binom{i}{r} - \binom{n}{r} \binom{n-2}{r} \binom{i}{r} - \binom{n-2}{r} \binom{i}{r} - \binom{n-2}{r} \binom{n$$

A questo punto osserviamo che la somma delle due doppie somme equivale alla somma dei termini che si ottengono dall'espressione

(73)
$$\binom{r-2}{b-1} \binom{i-1}{b} 2^{a-b-b},$$
 powerdo ivi al pouro di i . Led b must apply in legal i and i . Let b

ponendo ivi al posto di i-1 ed b tutti quei valori interi per i quali la coppia ordinata (i-1,b) ha come immagine, sul piano (i-1,b), i punti di coordinate intere della parte di piano tratteggiata nella figura seguente.



Ne seguono allora le uguaglianze

(74)
$$\sum_{i=1}^{n} P(\hat{s}_{n,i}^{*} = T_{i,n}) = \frac{\lambda}{n} + {2 \choose n}^{r-1} (1 - \alpha_n) \sum_{j=1}^{r-1} {r-1 \choose j-1} \sum_{i=1}^{r-1} {r-1 \choose j} \alpha_n^{(i-1)-1} = (r)$$

$$= \frac{\lambda}{n} + {2 \choose n}^{r-1} (1 - \alpha_n) \sum_{j=1}^{r-1} {r-1 \choose j-1} (1 - \alpha_n)^{-(k+1)},$$

e infine, ponendo $b-1=\nu$, si ottieno

$$\begin{split} \langle 75 \rangle & \sum_{i=1}^{n} \mathcal{F}(\xi_{2r} = T_{i,n}) = \frac{\lambda}{\pi} + \binom{2}{\pi}^{-1} (1 - x_s) \sum_{i=1}^{n-2} \binom{r-2}{r} (1 - x_s)^{-(r+2)} = \\ & = \frac{\lambda}{\pi} + \binom{2}{\pi}^{-1} (1 - x_s)^{-1} \sum_{i=1}^{n-2} \binom{r-2}{r} (1 - x_s)^{-n} \\ & = \frac{\lambda}{\pi} + \binom{2}{\pi}^{-1} (1 - x_s)^{-1} \left(\frac{1}{\pi} + \frac{1}{1 - x_s}\right)^{r-1} = \frac{\lambda}{\pi} + \binom{\lambda}{\pi}^{-1} \left(\frac{1 - \lambda(\theta)}{\lambda(\theta)} \frac{\theta}{(2\theta)^{n-2}} = 1\right). \end{split}$$

 CONVERGENZA DELLA VARIABILE DISCRETA EN-VERSO LA VARIABILE ASSOLUTAMENTE CONTINUA DI ERLANG

Provertino ora che, anche nel processo (di arrivi) a tempi discreti 8º/¿[n]e, la vatabile cassula menginale discreti 8º/¿[n]e, none sapiamo, describe tempo di attesa dell'i-mo cliente, nel senso ampliato descritto nel n. 2) conoverge, col divergere di s, vero la variable assolumente continua di l'ence, che, nel processo di arrivi a tempo continuo di Poisson descrive l'analogo tempo d'attesa.

Per questo si definisce anche questa volta una variabile casuale continua $\tilde{\xi}_{xx}^{-}$ (ssociata alla ξ_{xx}^{-}) la cui densifa, costante a tratti (precisamente costante in ogni singolo tratto pazziale $T_{t,n}$ dell'equipartizione D_n discretizzante il tempo), è definita per ogni fissato x_t dalla funzione

76)
$$f_{n\sigma}(x) \triangleq \begin{cases} 0, & \text{per } x < 0, \\ \frac{P(\xi_{n\sigma}^{+} = T_{c(n\sigma)^{-}})}{1/\sigma}, & \text{per } x > 0, \end{cases}$$

ove, come al solito, i(n, x) è quel particolare valore dell'indice i che individua il tratto parziale (unico) $T_{n(n,n),n}$ che contiene il fissato x. È evidente, anche in questo caso, che la $f_n(x)$ è l'espressione analitica del profilo superiore di

(*) Come al solito, ponendo $\delta+\kappa=i-1$, $(\kappa=0,1,2,...)$ si otticos

$$\binom{i-1}{k} - \binom{i-1}{i-k-1} - \binom{k+2}{k} - (-1)^2 \binom{-(k+1)}{k}$$
.

e quindi

$$\sum_{i=1-k}^{+\infty} \binom{i-1}{b} s_n^{(i-1)-k} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \binom{-(b+1)}{a} s_n^n = (1-s_n)^{-(b+1)}.$$

un istogramma statistico a colonne aventi ciascuna la base che si identifica con uno dei tratti parziali di D, e per il cui tracciato rimandiamo alle figure corrispondenti dei lav. cit. in (3). Ebbene ora proveremo che sussiste la convergenza

(77)
$$\lim_{x \to +\infty} f_{x,r}(x) \triangleq f_r(x) = \begin{cases} 0, & \text{per } x < 0, \\ \lambda \frac{(2x)^{r-1}}{(r-1)!} e^{-\lambda x}, & \text{per } x > 0, \end{cases}$$

(78)
$$\lim_{n \to +\infty} \langle sP(\xi_{nr}^{+} = T_{s(nabs)}) \rangle = \lambda \frac{(\lambda \kappa)^{r-1}}{(r-1)!} e^{-\lambda x}.$$

Quando si fa divergere n, il particolare valore i(n, x) dell'indice i è pure divergente, come mostrano le (47). Non si lede perciò la generalità se ipotizziamo che nell'espressione (66), ove però dobbiamo leggere i(n, x) al posto di i, supponiamo che sia min $\{t, i(u, x) - 1\} = t$, perchè, per u abbastanza grande, questa ipotesi è senz'altro soddisfatta. Atteso poi che per le (5) risulta

(79)
$$\lim_{n\to+\infty} n(1-\alpha_n) = \lambda,$$

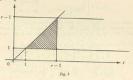
il nostro compito si riduce a dimostrare che

(80)
$$\lim_{n \to +\infty} {2 \choose i}^{r-1} \left\{ z_n^{i-1} + \sum_{l=1}^{r-1} \sum_{h=1}^{l} {r \choose b-1} {i-1 \choose h} z_n^{i-n-h} \right\} = \frac{(\lambda x)^{r-1}}{(r-1)!} t^{r-1s},$$

ove, come al solito per semplicità, si è scritto solo i al posto di i(n, x). Per facilitare il compito osserviamo che la doppia somma che figura nel primo membro di (80) è estesa a tutti i termini che si ottengono dall'espressione

$$\binom{t-1}{b-1}\binom{t-1}{b}\alpha_a^{kl-1)-k}\,.$$

ponendo ivi al posto di / ed // quei numeri naturali che sono coordinate intere dei punti della parte del piano (t. li) che nella figura che segue è oscurata da tratteggio.



Ne seguono allora le uguaglianze

(81)
$$\sum_{i=1}^{r-1} \sum_{b=1}^{i} {i-1 \choose b-1} {i-1 \choose b} \mathbf{z}_{a}^{(i-1)-b} = \sum_{b=1}^{r-1} {i-1 \choose b} \mathbf{z}_{a}^{(i-1)-b} \sum_{b=1}^{r-1} {i-1 \choose b-1} = \\ = \sum_{b=1}^{r-1} {i-1 \choose b-1} \mathbf{z}_{a}^{(i-r)-b} \sum_{b=1}^{r-1} {i-1 \choose b-1} + {i-1 \choose r-1} \mathbf{z}_{a}^{(i-r)}.$$

con le quali il primo membro di (80) si trasforma nel seguente

$$\begin{split} & \lambda^{r-1} \lim_{s \to -\infty} \left[\frac{s_s^{r-1}}{s^{r-1}} + \sum_{k=1}^{r-2} \frac{1}{s^{r-1}} \binom{i-1}{b} s_s^{n-1-k} \sum_{k=1}^{r-1} \binom{i-1}{b-1} + \\ & + \frac{1}{(r-1)!} \frac{1-i}{s} \frac{i-r}{s} - \frac{i-(r-1)}{s} s_s^{n-1} \right] = \frac{\lambda^{r-1}}{(r-1)!} \left[0 + 0 + x^{r-1} \lim_{s \to -\infty} s_s^{n-1} \right], \end{split}$$

ove si sono utilizzate le (41) ed il fatto che ogni prodotto del tipo

(83)
$$\frac{1}{s^{r-1}} \binom{i-1}{b} a_n^{(i-1)-b} = \frac{1}{s^{r-(b+1)}} \frac{1}{b} \frac{i-1}{s} \frac{i-2}{s} \dots \frac{i-b}{s} \left[\left(\frac{1-2(2/s)}{1-\lambda/s} \right)^s \right]^{((i-1)-b)/s},$$

$$1 < b < r-2,$$

converge a zero col divergere di a. Osservato che

(84)
$$\lim_{n \to +\infty} a_n^{j-r} \triangleq \lim_{n \to +\infty} \left[\left(\frac{1 - 2(\lambda | a)}{1 - \lambda / a} \right)^n \right]^{(i-r)/n} = \frac{e^{-2\lambda c}}{e^{-2c}} = e^{-2c}$$

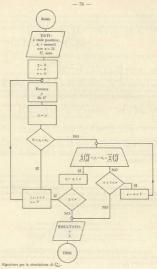
possiamo concludere che la convergenza indicata in (71) è acquisita. Questo fatto, l'uguaglianza

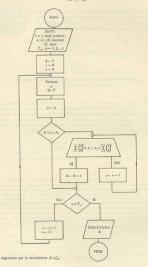
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \, dx = 1$$

e l'estensione del criterio di compatibilità di Volpato-Bressan (entrambe stabilite nel primo dei lav. cit. in (¹)), permetrono di concludere che la variabile casuale continua $\tilde{g}^+_{n,p}$ e la sua ausoiata (discreta) $\tilde{g}^+_{n,p}$, convergono in lege verso la variabile assolutamente continua di Erlang.

 Un algoritmo per la simulazione delle variabili marcinali discrete del processo 3º(2/8). Convergenti alle analogie leggi del processo A Telejo Continuo di Posson

Sempre in vista di possibili applicazioni del modello dianzi esposto, è opportuno indicare, con un conveniente flow-chart, un algoritmo per la simulazione delle variabili $\xi_{sc}^+ \in \eta_{los}^+$.





A tale scopo conviene immaginare l'intervallo (0,1) suddiviso in una infinità numerabile di sottointervalli adiacenti, aperti a sinistra (quindi, disgiunti) di ampiezza: α_{ij} , $\lambda(\theta_i)$, $\lambda(\theta_i)$, ..., i cui estremi risultano allora essere le componenti del vettore delle probabilità comuniate

$$\alpha_n : \alpha_n + \frac{2}{n} : ... : \alpha_n + \sum_{i=0}^{n} (\frac{2}{n})^i : \alpha_n + \sum_{i=0}^{n-1} (\frac{2}{n})^i : ... : 1$$

relative alle probabilità

$$\alpha_n, \frac{\lambda}{n}, \left(\frac{\lambda}{n}\right)^2, \dots$$

con le quali, a norma dell'ipotesi h); possono arrivare, rispettivamente,

clier

Per simulare, nel rispetto delle ipotesi caratterizzanti il notros modello, il processo della ristiv, basta allora estrare un numero di nu'uru L', condendo un insieme di numeri y equidistributi nell'intervallo (0, 1) e ritenere che, se l'estratto si plazza aul primo dei sottoinervalli di (0, 1) diani decircità, nel tratto patrale di D., corrispondente all'estrazione dall'uran non arriva alcun cliente; mentre se l'estratto si plazza del piùcoliervallo.

$$\left[\alpha_n + \sum_{i=0}^{n} {n \choose \overline{\lambda}}^i, \alpha_n + \sum_{i=0}^{n-1} {\lambda \choose \overline{n}}^i\right],$$

allora nle tratto parziale di D_κ corrispondente all'estrazione arrivano ε clienti.

Sourcesson. — Un processo recention a temp idented il aintri di dienti al sono operatio (na stronto il persono littoria concessione di Au Visione end questio in pittoria respitato persono persono di considera il considera il persono di considera il co

Direttere emponosisii: Prof. A. Bazzio - Ausorizz, Trib, di Roma n. 7269 dell'8-12-1959 e Monograf » - Via Collamarini, 5 - Bologou