Rendiconti
Accademia Nazionale delle Scienze detta dei XL
Memorie di Matematica
102° (1984), Vol. VIII, fasc. 7, pagg. 121-136

OSCAR STEFANI (*)

Ricoprimenti e misure approssimanti (**)

Approximating Measures and Covers

SUMMARY. — In the present work we show several properties of the approximating outer measures of type $\mu_\delta^h(E)$ (i.e. obtained with open covers). In particular we show: 1) if $E_n \uparrow E$, with E open, then $\mu_\delta^h(E_n) \to \mu_\delta^h(E)$ 2) $\mu_\delta^h(E)$, as a function of δ, is right continuous if E is open, and left continuous if E is closed. To obtain these results we have introduced and studied a class of covers with some relevant properties.

Il teorema di passaggio al limite per successioni crescenti di insiemi nell'ambito delle misure approssimanti la misura di Hausdorff è stato ampiamente studiato da vari punti di vista.

Per le misure approssimanti ottenute con ricoprimenti chiusi di diametro non superiore a δ, che indicheremo, seguendo [R], con r_δ^h, Davies [D.1] dimostrava che nello spazio euclideo e con $h(t) = t^s$, $s > 0$, il teorema è valido, mentre per quelle ottenute con ricoprimenti aperti di diametro non superiore a δ, che, sempre seguendo [R], indicheremo con μ_δ^h, dava un controesempio in $\mathbf{R}^2$ con $h(t) = t$.

In successivi lavori ([S.S.] e [D.2]) il risultato di Davies veniva esteso a funzioni h ed a spazi metrici più generali.

Dimostreremo in questo scritto che negli spazi metrici euclidei il teorema vale anche per le μ_δ^h con $h(t) = t$, se la successione crescente d'insiemi tende ad un insieme aperto (Coroll. 10 A). Dimostreremo inoltre, che nelle ipotesi precedenti, $\mu_\delta^h(E)$, considerata come funzione di δ, è continua a destra se E è aperto (Coroll. 10 B), ed, in ipotesi più generali, è continua a sinistra se E è chiuso (Prop. 15).

(*) Indirizzo dell'Autore: I.M.A., Univ. Padova, via Belzoni 7 - 35131 Padova.
(**) Memoria presentata il 18 novembre 1983 da Giuseppe Scorza Dragoni, uno dei XL.
La presente ricerca è stata effettuata con fondi erogati dal Ministero della Pubblica Istruzione.

ISSN-0392-4106

Per conseguire i risultati descritti siamo ricorsi ad una classe di ricoprimenti di un insieme che, lasciando invariate le misure approssimanti (Prop. 4), godono di interessanti proprietà, tra le quali segnaleremo, come particolarmente significative, la 5.3, la Prop. 8 e la Prop. 9.

1. - Notazioni e definizioni

Con (X, ϱ), o semplicemente X, indicheremo uno spazio metrico. Se $E \subset X$, $x \in X$, $r > 0$, con E^*, $\bar{E}$, ∂E, $d(E)$, $d(x, E)$, $B(x, r)$, intenderemo rispettivamente l'interno, la chiusura, la frontiera, il diametro di E, la distanza di x da E e l'intorno circolare di centro x e raggio r.

Con $\mathcal{F}_E$, o semplicemente $\mathcal{F}$, se non c'è possibilità di equivoco, intenderemo un ricoprimento di E che per noi sarà sempre al più numerabile. Con N^*, N, N_0, N_1, N_2, ..., indicheremo insiemi di indici che saranno sempre o l'insieme dei naturali N od un suo segmento iniziale $\{1, 2, \ldots, n\}$. Quindi si potrà scrivere, ad esempio, $\mathcal{F} = \{F_i, i \in N^*\}$. Un sottoricoprimento di $\mathcal{F}$ sarà una sottofamiglia di $\mathcal{F}$, i cui insiemi ricoprono ancora E.

Sia $E \subset X$, diremo che E è diametralmente massimale (in breve d-m) se $A \supset E$ con $d(A) = d(E)$ implica $A = E$.

Siano $E, F \subset X$; diremo che F è (diametralmente) tracciante su E se $d(F \cap E) = d(F)$.

Dato un ricoprimento $\mathcal{F} = \{F_i, i \in N^*\}$ di E, diremo che:

a) $\mathcal{F}$ è aperto se F_i è aperto, per ogni $i \in N^*$,

b) $\mathcal{F}$ è chiuso se F_i è chiuso, per ogni $i \in N^*$,

c) $\mathcal{F}$ è d-m se F_i è d-m, per ogni $i \in N^*$,

d) $\mathcal{F}$ è tracciante se F_i è tracciante su E, per ogni $i \in N^*$,

e) F_p, $p \in N^*$, è essenziale in $\mathcal{F}$ se $F_p \notin \bigcup_{N^* \setminus \{p\}} F_i$,

f) $\mathcal{F}$ è irriducibile (cfr. [Du], VIII.1.1.) se F_i è essenziale in $\mathcal{F}$, per ogni $i \in N^*$,

g) sia $\delta > 0$, $\mathcal{F}$ è un δ-ricoprimento se $d(F_i) < \delta$, per ogni $i \in N^*$.

Dato un δ-ricoprimento $\mathcal{F} = \{F_i, i \in N^*\}$ diciamo che:

h) F_p, $p \in N^*$ è ampliabile in $\mathcal{F}$, se:

1.1 $\quad \exists J \subset N^* : \{p\} \subsetneq J,\ d\left(\bigcup_J F_i\right) < \delta,\ d\left(\bigcup_J F_i\right) < \sum_J d(F_i)$;

k) $\mathcal{F}$ è ottimale se è d-m, tracciante, irriducibile, se, per ogni $i \in N^*$, F_i non è ampliabile in $\mathcal{F}$ e se $\sum_{N^*} d(F_i) < +\infty$.

Indicheremo con $\mathbb{C}_\delta(E)$ la classe dei δ-ricoprimenti chiusi di E, e con $\mathbb{D}_\delta(E)$ la classe dei δ-ricoprimenti ottimali di E.

Se $\mathcal{F} = \{F_i, i \in N^*\}$ è un ricoprimento con $\sum d(F_i) < +\infty$, supporremo sempre che gli insiemi di $\mathcal{F}$ siano ordinati per diametri decrescenti, cioè: se $i, j \in N^*$ e $i < j$ allora $d(F_i) \geq d(F_j)$; si ha inoltre che se $N^* = \mathbf{N}$ allora $d(F_i) \to 0$.

Con $\mathbf{R}^n$ $(n \geq 2)$ normato o semplicemente con $\mathbf{R}^n$ intenderemo $\mathbf{R}^n$ con la metrica indotta da una norma; in particolare, con $\mathbf{R}^n$ euclideo intenderemo $\mathbf{R}^n$ con la norma euclidea; la distanza di due punti $x, y \in \mathbf{R}^n$, in tal caso, verrà indicata $|x - y|$. Con ω_{n-1} intenderemo la superficie sferica unitaria in $\mathbf{R}^n$, cioè: $\omega_{n-1} = \{u \in \mathbf{R}^n : |u| = 1\}$. Ricordiamo che in $\mathbf{R}^n$ euclideo gli insiemi d-m coincidono con quelli ad ampiezza costante.

Con $\nu_\delta(E)$ e $\mu_\delta(E)$ intenderemo rispettivamente $\nu_\delta^h(E)$ e $\mu_\delta^h(E)$, con $h(t) = t$.

Per le definizioni, la simbologia qui non riportata, per le proprietà delle misure di Hausdorff e degli insiemi convessi ad ampiezza costante, facciamo riferimento a [R], [B.F.], [L], [E].

2. - ν_δ E δ-RICOPRIMENTI OTTIMALI

Sia X uno spazio metrico ed $E \subset X$, usando la simbologia sopra introdotta si può scrivere:

$$\nu_\delta(E) = \inf \left\{ \sum_{N^*} d(F_i), \{F_i, i \in N^*\} \in \mathbb{C}_\delta(E) \right\},$$

con la convenzione che se $\mathbb{C}_\delta(E)$ è vuota, si scriva: $\nu_\delta(E) = +\infty$.

Dimostreremo in questo paragrafo che, posto

$$\lambda_\delta(E) = \inf \left\{ \sum_{N^*} d(F_i), \{F_i, i \in N^*\} \in \mathbb{D}_\delta(E) \right\},$$

con la convenzione che se $\mathbb{D}_\delta(E)$ è vuota, si scriva: $\lambda_\delta(E) = +\infty$, si ha: $\nu_\delta(E) = \lambda_\delta(E)$; cioè le misure approssimanti si possono definire usando solo ricoprimenti ottimali.

Proposizione 1: Sia $E \subset X$, se $\mathcal{F} = \{F_i, i \in N_0\}$ è un δ-ricoprimento di E, allora esiste un δ-ricoprimento di E, $\mathcal{F}^* = \{F_i^*, i \in N^*\}$, d-m, tracciante, con F_i non ampliabile in $\mathcal{F}$, per ogni $i \in N^*$, e tale che

$$\sum_{N^*} d(F_i^*) \leq \sum_{N_0} d(F_i).$$

Dimostrazione.

Parte I - Per ogni $i \in N_0$, sia $F_i^0 = F_i \cap E$, risulta evidente che $\mathcal{F}_0 = \{F_i^0, i \in N_0\}$ è un δ-ricoprimento di E tale che:

1.1 $F_i^0 \subset E$, per ogni $i \in N_0$,

1.2 $\sum_{N_0} d(F_i^0) \leq \sum_{N_0} d(F_i)$.

Costruiamo per induzione partendo da $\mathcal{F}_0$ una successione di δ-ricoprimenti di E, $\mathcal{F}_k = \{F_i^k, i \in N_k\}$, $k = 0, 1, \ldots$, tali che $\mathcal{F}_k$ verifichi le seguenti proprietà:

1.A.1 se $i < k$, F_i^k è d-m, tracciante e non ampliabile in $\mathcal{F}_k$,

1.A.2 se $i > k$, $F_i^k \subset E$,

1.A.3 se $n < k$, $F_i^n = F_i^k$ per $i < n$,

1.A.4 $\sum_{N_k} d(F_i^k) < \sum_{N_0} d(F_i^0)$,

1.A.5 $\bigcup_{i=1}^{k} F_i^k \supset \bigcup_{i=1}^{k} F_i^0$ (¹).

$\mathcal{F}_0$ verifica le proprietà 1.A.

Parte II - Supponiamo di aver costruito i δ-ricoprimenti $\mathcal{F}_i$ con $i < k-1$, con le proprietà 1.A, e costruiamo $\mathcal{F}_k$.

Sia $N'_{k-1} = N_{k-1} \setminus \{1, 2, \ldots, k-1\} \neq 0$. (Se N'_{k-1} fosse vuoto $\mathcal{F}_{k-1}$ sarebbe il ricoprimento $\mathcal{F}^*$ cercato).

Consideriamo la famiglia $\mathfrak{I}^k$ dei sottoinsiemi I di N'_{k-1} tali che:

1.B.1 $\bigcup_I F_i^{k-1} \supset F_k^{k-1}$,

1.B.2 $d\left(\bigcup_I F_i^{k-1}\right) < \delta$,

1.B.3 $d\left(\bigcup_I F_i^{k-1}\right) < \sum_I d(F_i^{k-1})$.

$\mathfrak{I}^k$ non è vuota poichè $\{k\} \in \mathfrak{I}^k$, è parzialmente ordinata per inclusione e se $\{I_n\}_n$ è una catena in $\mathfrak{I}^k$, non è difficile vedere che $\bigcup_n I_n \in \mathfrak{I}^k$, il che implica che ogni catena ha una limitazione superiore; per il lemma di Zorn, quindi esiste un J_k massimale (rispetto all'inclusione) per $\mathfrak{I}^k$. Dato che $J_k \cup \{k\}$ verifica le proprietà 1.B si ha:

1.3 $k \in J_k$

altrimenti J_k non sarebbe più massimale.

Posto $d_k = d\left(\bigcup_{J_k} F_i^{k-1}\right)$, per la 1.B.2, $d_k < \delta$.

Sia F_k^k un insieme d-m di diametro d_k tale che:

1.4 $F_k^k \supset \bigcup_{J_k} F_i^{k-1}$.

Poichè per $i \in J_k$ è $i > k$, per la 1.A.2 si ha $F_i^{k-1} \subset E$ per ogni $i \in J_k$; allora $F_k^k \cap E \supset \bigcup_{J_k} F_i^{k-1} \cap E = \bigcup_{J_k} F_i^{k-1}$, da cui segue:

1.5 $d(F_k^k) = d\left(\bigcup_{J_k} F_i^{k-1}\right) = d(F_k^k \cap E) = d_k < \delta$;

(¹) Se $k = 0$, con $\bigcup_{i=1}^{0} F_i$ si intende l'insieme vuoto.

e tenendo conto di 1.B.3 si ha anche:

1.6 $d(F_k^k) < \sum_{J_k} d(F_i^{k-1})$.

Poniamo

1.7 $\mathcal{F}_k = \{F_i^{k-1}, i < k-1\} \cup \{F_k^k\} \cup \{F_i^{k-1}, i \in N'_{k-1} \setminus J_k\}$.

Risulta evidente, tenendo conto del fatto che $\mathcal{F}_{k-1}$ era un δ-ricoprimento di E, di 1.4 e di 1.5, che $\mathcal{F}_k$ è un δ-ricoprimento di E.

Parte III - Riordiniamo gli indici degli insiemi di $\mathcal{F}_{k-1}$ che fanno ancora parte di $\mathcal{F}_k$, mediante opportune funzioni, di cui studieremo anche le proprietà che ci saranno utili nelle parti IV e V.

A tal fine consideriamo la funzione $f_k: N_{k-1} \to \mathbf{N}$ così definita:

$$f_k(i) = \begin{cases} \text{Card}\,[\{1, 2, \dots, i\} \setminus (J_k \setminus \{k\})]\,, & i \in N_{k-1} \setminus J_k\,, \\ k\,, & i \in J_k\,. \end{cases}$$

Sia $N_k = f_k(N_{k-1})$; non è difficile vedere che f_k verifica le seguenti proprietà:

1.C.1 $f_k(i) < i$ per ogni $i \in N_{k-1}$,

1.C.2 $f_k^{-1}(\{k\}) = J_k$,

1.C.3 se $n \in N_k$, allora $f_k^{-1}(\{1, 2, \dots, n\}) \supset \{1, 2, \dots, n\}$,

1.C.4 f_k subordina una corrispondenza biunivoca fra $N_{k-1} \setminus J_k$ e $N_k \setminus \{k\}$, coincidente con l'identità su $\{1, 2, \dots, k-1\}$.

Sia, per $i \in N_k \setminus \{k\}$,

1.8 $\{I\} = f_k^{-1}(\{i\})$ e $F_i^k = F_I^{k-1}$,

si ha subito:

1.7' $\mathcal{F}_k = \{F_i^k, i \in N_k\}$.

Inoltre, se $I \subset N_k$ ed $I' = f_k^{-1}(I)$, si ha:

1.C.5 $\bigcup_{I'} F_i^{k-1} \subset \bigcup_I F_i^k$,

1.C.6 $\sum_I d(F_i^k) < \sum_{I'} d(F_i^{k-1})$.

Dimostriamo 1.C.5. Se $k \notin I$, da 1.C.4 ed 1.8 segue che:

1.9 $\bigcup_{I'} F_i^{k-1} = \bigcup_{I} F_i^k$;

se $k \in I$, sia $I_1 = I \setminus \{k\}$ ed $I_1' = f_k^{-1}(I_1)$ si ha, tenuto conto di 1.C.2, $I' = I_1' \cup J_k$, da cui

$$\bigcup_{I'} F_i^{k-1} = \left(\bigcup_{I_1'} F_i^{k-1}\right) \cup \left(\bigcup_{J_k} F_i^{k-1}\right) \subset \left(\bigcup_{I_1} F_i^{k-1}\right) \cup F_k^k = \bigcup_{I} F_i^k$$

ove la relazione di inclusione è giustificata da 1.9 e 1.4.

Dimostriamo la 1.C.6. Se $k \notin I$, da 1.C.4 ed 1.8 segue che:

1.10 $\sum_{I} d(F_i^k) = \sum_{I'} d(F_i^{k-1})$.

Se $k \in I$, con le stesse notazioni della dim. precedente, si ha:

$$\sum_{I} d(F_i^k) = \sum_{I_1} d(F_i^k) + d(F_k^k) < \sum_{I_1'} d(F_i^{k-1}) + \sum_{J_k} d(F_i^{k-1}) = \sum_{I'} d(F_i^{k-1}),$$

ove il $<$ è giustificato da 1.10 e da 1.6 e l'ultima uguaglianza dal fatto che 1.C.4 implica $I_1' \cap J_k = 0$.

Siano f_j: $N_{j-1} \to \mathbf{N}$, $0 < j < k-1$, le funzioni definite analogamente a f_k, nei passi induttivi precedenti k, e quindi con le proprietà 1.C; poniamo per $0 < s < k$, $f_{s,k}$: $N_s \to \mathbf{N}$ la funzione così definita:

$$f_{s,k} = f_{s+1} \circ f_{s+2} \circ \ldots \circ f_k\,;$$

ovviamente $f_{s,k}(N_s) = N_k$ e $f_{k-1,k} = f_k$.

Per le $f_{s,k}$ valgono le seguenti proprietà:

1.D.1 $f_{s,k}(i) < i$, per ogni $i \in N_s$,

1.D.2 $f_{s,k}^{-1}(\{s+1\}) = f_{s+1}^{-1}(\{s+1\}) = J_{s+1}$,

1.D.3 se $n \in N_k$, $f_{s,k}^{-1}(\{1, 2, \ldots, n\}) \supset \{1, 2, \ldots, n\}$,

1.D.4 $f_{s,k}$ subordina una corrispondenza biunivoca di $\{1, 2, \ldots, s\}$ in sè coincidente con identità.

Inoltre se $I \subset N_k$ ed $I^* = f_{s,k}^{-1}(I)$ si ha:

1.D.5 $\bigcup_{I^*} F_i^s \subset \bigcup_{I} F_i^k$,

1.D.6 $\sum_{I} d(F_i^k) < \sum_{I^*} d(F_i^s)$,

1.D.7 $\min(I^*) > \min(I)$.

Le proprietà 1.D.1, 1.D.3, 1.D.4, 1.D.5 e 1.D.6 si dimostrano con tecniche induttive sfruttando le corrispettive proprietà 1.C.

Per dimostrare 1.D.2 si tenga conto che $f_{s,k} = f_{s+1} \circ f_{s+1,k}$ e che per 1.D.4 $f_{s+1,k}$ subordina l'identità su $\{1, 2, \ldots, s+1\}$ e quindi

$$f_{s,k}^{-1}(\{s+1\}) = f_{s+1}^{-1}\left(f_{s+1,k}^{-1}(\{s+1\})\right) = f_{s+1}^{-1}(\{s+1\}) = J_{s+1} \qquad \text{per la 1.C.2.}$$

La 1.D.7 segue da 1.D.1, infatti, posto $q = f_{s,k}(\min(I^*))$, si ha: $q < \min(I^*)$, ma $q \in I$, per cui $\min(I) < q < \min(I^*)$.

Parte IV - Abbiamo ora gli strumenti per dimostrare che $\mathcal{F}_k$ verifica le proprietà 1.A.

1.A.2 e 1.A.3 sono immediate; in 1.A.1 l'unica non immediata è la dimostrazione che F_i^k, per $i < k$, non sono ampliabili in $\mathcal{F}_k$.

Supponiamo che esiste un F_p^k, con $p < k$, ampliabile in $\mathcal{F}_k$, per la 1.1 esiste $J \subset N_k$ tale che:

1.E.1 $\{p\} \subsetneq J$,

1.E.2 $d\left(\bigcup_J F_i^k\right) < \delta$,

1.E.3 $d\left(\bigcup_J F_i^k\right) < \sum_J d(F_i^k)$.

Detto $q = \min(J)$, consideriamo la funzione $f_{q-1,k}: N_{q-1} \to \mathbf{N}$; posto $J^* = f_{q-1,k}^{-1}(J)$ si ha, per la proprietà 1.D.7, $\min(J^*) > q$ e quindi

1.E.4 $J^* \subset N_{q-1}^c$;

per la proprietà 1.D.5, $\bigcup_{J^*} F_i^{q-1} \subset \bigcup_J F_i^k$ e quindi per la 1.E.2

1.E.5 $d\left(\bigcup_{J^*} F_i^{q-1}\right) < d\left(\bigcup_J F_i^k\right) < \delta$,

per la proprietà 1.D.6 $\sum_J d(F_i^k) < \sum_{J^*} d(F_i^{q-1})$ e quindi, tenuto conto anche di 1.E.5 ed 1.E.3,

1.E.6 $d\left(\bigcup_{J^*} F_i^{q-1}\right) < d\left(\bigcup_J F_i^k\right) < \sum_J d(F_i^k) < \sum_{J^*} d(F_i^{q-1})$.

Per la 1.E.1 $J \supsetneq \{q\}$, quindi J^* contiene propriamente $J_q = f_{q-1,k}^{-1}(\{q\})$ (cfr. 1.D.2), pertanto per 1.3 J^* contiene q, ma allora si ha anche

1.E.7 $\bigcup_{J^*} F_i^{q-1} \supset F_q^{q-1}$.

Ora 1.E.4, 1.E.7, 1.E.5 e 1.E.6 implicano, per le 1.B, che $J^* \in \mathcal{J}^q$, questo

però è in contraddizione col fatto che J^* contenga propriamente J_k (che era massimale in $\mathcal{F}^i$), e quindi tutti gli F^i_n, $i<k$ non sono ampliabili.

1.A.4 segue da 1.D.6 applicata a $f_{0,k}$ con $I=N_k$,

1.A.5 segue, tenuto conto della 1.D.3, dalla 1.D.5 sempre applicata a $f_{0,k}$ con $I=\{1,2,\dots,k\}$.

Parte V - Siamo ora in grado di dimostrare l'esistenza del ricoprimento $\mathcal{F}^*$ di cui all'enunciato. Se esiste un k tale che N_k sia finito allora è immediato vedere che esiste un p tale che $N'_p=N_p\setminus\{1,2,\dots,p\}=0$, e che $\mathcal{F}_p$ è il δ-ricoprimento $\mathcal{F}^*$ cercato. In caso contrario $N_k=\mathrm{N}$ per ogni k.

Consideriamo allora $\mathcal{F}'=\{F^n_n, n\in\mathrm{N}\}$. Verifichiamo che $\mathcal{F}'$ è il δ-ricoprimento $\mathcal{F}^*$ cercato.

Cominciamo col verificare che $\mathcal{F}'$ è un ricoprimento di E. Per la 1.A.3 e la 1.A.5, per ogni k si ha:

$$\bigcup_{n=1}^{k} F^n_n=\bigcup_{n=1}^{k} F^n_n\supset\bigcup_{n=1}^{k} F^n_n,$$

e quindi

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} F^n_n\supset\bigcup_{n=1}^{\infty} F^n_n=E.$$

Per la scelta degli F^n_n nei vari passi induttivi, si ha poi immediatamente che ogni F^n_n è d-m, tracciante su E, con $d(F^n_n)<\delta$ (cfr. 1.4, 1.5).

Dimostriamo che per ogni n, F^n_n non è ampliabile in $\mathcal{F}'$. Supponiamo che esista un F^p_p ampliabile in $\mathcal{F}'$ allora esiste un $J\subset\mathrm{N}$ tale che:

1.F.1 $\{p\}\subsetneq J$,

1.F.2 $d\left(\bigcup_J F^p_n\right)<\delta$,

1.F.3 $d\left(\bigcup_J F^p_n\right)<\sum_J d(F^p_n)$.

Sia $q=\min(J)$ e per ogni $n\in J$, sia $J_{q-1,n}=f^{-1}_{q-1,n}(\{n\})$, si ha:

1.G.1 $J_{q-1,n}=J_q$,

1.G.2 $\min\left(\bigcup_J J_{q-1,n}\right)>q$,

1.G.3 $F^n_n\supset\bigcup_{J_{q-1,n}} F^{q-1}_i$, per ogni $n\in J$,

1.G.4 $d(F^n_n)<\sum_{J_{q-1,n}} d(F^{q-1}_i)$, per ogni $n\in J$,

1.G.5 $d\left(\bigcup_{J_{q-1,n}} F^{q-1}_i\right)<\sum_{J_{q-1,n}} d(F^{q-1}_i)$, per ogni $n\in J$,

1.G.6 se $r,s\in J$, $r\neq s$, allora $J_{q-1,r}\cap J_{q-1,s}=0$.

1.G.1 segue dal fatto che $f_{s-1,s}=f_s$ e da 1.C.2; 1.G.2 segue dal fatto che 1.D.7 implica $\min(J_{s-1,n})>n$, per ogni $n\in J$; 1.G.3 e 1.G.4 seguono rispettivamente da 1.D.5 e 1.D.6 applicate a $f_{s-1,s}$, con $I=\{r\}$; 1.G.5 segue da 1.G.3 e 1.G.4; 1.G.6, supposto $r>t$, segue dal fatto che, poichè $f_{s-1,r}=f_{s-1,s-1}\circ$ $\circ f_{s-1,r}$, tenuto conto di 1.D.2,

$$f^{-1}_{s-1,r}(\{t\})=f^{-1}_{s-1,s-1}[f^{-1}_{s-1,r}(\{t\})]=f^{-1}_{s-1,s-1}[f^{-1}_{s}(\{t\})]=f^{-1}_{s-1,s}(\{t\})$$

e dal fatto che $f^{-1}_{s-1,r}(\{r\})\cap f^{-1}_{s-1,s}(\{t\})=0$.

Posto $J^*=\bigcup_J J_{s-1,n}$, da 1.G.2 segue che

1.H.1 $\quad J^*\in N^{r}_{s-1}$,

da 1.G.3 e 1.F.2 segue che

1.H.2 $\quad d\Big(\bigcup_{J^*}F^{r-1}_{t}\Big)=d\Big(\bigcup_{J}\Big(\bigcup_{J_{s-1,n}}F^{r-1}_{t}\Big)\Big)<d\Big(\bigcup_{J}F^{s}_{n}\Big)<\delta$;

da 1.H.2, 1.F.3, 1.G.4 e 1.G.6 segue che

1.H.3 $\quad d\Big(\bigcup_{J^*}F^{r-1}_{t}\Big)<d\Big(\bigcup_{J}F^{s}_{n}\Big)<\sum_{J}d(F^{s}_{n})<\sum_{J}\sum_{J_{s-1,n}}d(F^{r-1}_{t})=\sum_{J^*}d(F^{r-1}_{t})$.

Per 1.G.1 si ha $J^*\supset J_s$ e, per 1.3 $q\in J^*$, pertanto

1.H.4 $\quad \bigcup_{J^*}F^{r-1}_{t}\supset F^{r-1}_{q}$.

J^* in base a 1.H.1, 1.H.4, 1.H.2, 1.H.3 appartiene a $\mathcal{F}^r$ (cfr. prop. 1.B) e poichè, per 1.F.1, $J^*\supsetneq J_s$, siamo in contraddizione col fatto che J_s è massimale (rispetto all'inclusione) per $\mathcal{F}^s$; quindi, per ogni n, F^s_n non è ampliabile in $\mathcal{F}^r$.

Poichè per 1.2 $\sum_1^\infty d(F^r_i)<\sum_1^\infty d(F_i)$ rimane da dimostrare che

1.11 $\quad \sum_1^\infty d(F^r_n)<\sum_1^\infty d(F^s_n)$;

ma per 1.A.3 e 1.A.4 si ha, per ogni k,

$$\sum_{n=1}^{k}d(F^r_n)=\sum_{n=1}^{k}d(F^s_n)<\sum_{1}^{\infty}d(F^s_n)<\sum_{1}^{\infty}d(F^r_n)\,.$$

Quindi, per ogni k

$$\sum_{n=1}^{k}d(F^r_n)<\sum_{n=1}^{\infty}d(F^s_n)\,,$$

da cui, passando al limite si ha 1.11. //

Proposizione 2: Sia $E \subset X$, se $\mathcal{F} = \{F_i, i \in N^*\}$ è un δ-ricoprimento di E tale che, per ogni $i \in N^*$, F_i non è ampliabile in $\mathcal{F}$, e $\sum d(F_i) < +\infty$, allora valgono le seguenti proprietà:

2.1 se $i, j \in N^*$, $i \neq j$ e $F_i \cap F_j \neq 0$, allora $d(F_i) + d(F_j) > \delta$;

2.2 se $i, j \in N^*$, $i > j$ e $d(F_j) < \delta/2$, allora $F_i \cap F_j = 0$;

2.3 $\mathcal{F}$ è puntualmente finito;

2.4 $\mathcal{F}$ ammette un sottoricoprimento irriducibile.

Dim.: Da $F_i \cap F_j \neq 0$ e $d(F_i) + d(F_j) < \delta$, segue subito che $d(F_i \cup F_j) < d(F_i) + d(F_j) < \delta$. Ma allora per la 1.1, con $J = \{i, j\}$, sia F_i che F_j sarebbero ampliabili in $\mathcal{F}$ in contrasto con l'ipotesi; pertanto 2.1 è dimostrata.

2.2 è conseguenza immediata di 2.1.

Per dimostrare che 2.2 implica 2.3, supponiamo $N^* = N$ altrimenti la 2.3 sarebbe comunque verificata. Sia m tale che $d(F_m) < \delta/2$; se x appartenesse ad F_i per infiniti indici i, esisterebbero due indici p, q con $p > q > m$ tali che $x \in F_p$ e $x \in F_q$; ma questo sarebbe evidentemente in contrasto con 2.2.

2.4 è implicata da 2.3 (cfr. [Du], VIII.1.1). //

Proposizione 3: Sia $E \subset X$, se $\mathcal{F} = \{F_i, i \in N\}$ è un δ-ricoprimento di E con $\sum d(F_i) < +\infty$, allora esiste un $\mathcal{F}^* = \{F_i^*, i \in N^*\} \in \mathbb{D}_\delta(E)$ tale che

$$\sum_{\mathcal{F}^*} d(F_i^*) < \sum_{\mathcal{F}} d(F_i) .$$

In particolare se $\mathcal{F}$ è finito, anche $\mathcal{F}^*$ è finito.

Dim.: Segue dalla Prop. 1, da 2.4 e dal fatto che, dato un δ-ricoprimento, se un insieme fosse ampliabile in un sottoricoprimento, a maggior ragione lo sarebbe nel δ-ricoprimento. //

Dimostriamo ora quanto enunciato all'inizio del paragrafo, cioè:

Proposizione 4: Dato $E \subset X$, si ha: $\nu_\delta(E) = \lambda_\delta(E)$.

Dim.: Poichè $\mathbb{D}_\delta(E) \subset \mathbb{C}_\delta(E)$ è ovvio che

4.1 $\nu_\delta(E) < \lambda_\delta(E)$;

quindi se $\nu_\delta(E) = +\infty$, l'asserto è banale. Se poi $\nu_\delta(E) < +\infty$, l'uguaglianza nella 4.1 segue subito dalla Prop. 3. //

Osservazione 4.A: Con facili modifiche, che avrebbero soltanto ulteriormente appesantito le notazioni, si può vedere che quanto affermato per le ν_δ

in questo paragrafo, vale anche per le ν_δ^b, se b verifica le seguenti proprietà:

4.A.1 $b \in \mathcal{K}_0$ (cfr. [R], II.1.1),

4.A.2 $b(t_1+t_2) < b(t_1)+b(t_2)$, per ogni $t_1, t_2 > 0$.

3. - Proprietà dei δ-ricoprimenti ottimali

Proposizione 5: Sia $E \subset X$, se $\mathcal{F} = \{F_i, i \in N^*\}$ è un δ-ricoprimento ottimale di E, valgono le seguenti proprietà:

5.1 se $i, j \in N^*$, $i \neq j$ e $F_i \cap F_j \neq \emptyset$, allora $d(F_i)+d(F_j) > \delta$;

5.2 se $i, j \in N^*$, $i > j$ e $d(F_j) < \delta/2$, allora $F_i \cap F_j = \emptyset$;

5.3 $\mathcal{F}$ è puntualmente finito;

5.4 se $k \in N^*$ e $x \in \left(\bigcup_{i=1}^{k} F_i\right)^\circ$, allora esiste un $\eta > 0$ tale che $B(x, \eta)$ interseca al più un numero finito di F_i.

Dim.: 5.1, 5.2, 5.3 seguono subito dalla Prop. 2. Resta da dimostrare 5.4 nel caso non banale che $N^* = \mathbf{N}$.

Supponiamo che 5.4 sia falso, cioè che esista un $x \in \left(\bigcup_{i=1}^{k} F_i\right)^\circ$ tale che, per ogni $\eta > 0$, $B(x, \eta)$ intersechi infiniti F_i. Sia $\eta_1 > 0$ tale che $B(x, \eta_1) \subset \bigcup_{i=1}^{k} F_i$ e sia m un indice tale che $d(F_m) < \eta_1/3$; posto $p = \max\{k, m\}$, $B(x, \eta_1/3)$ intersecherebbe infiniti F_i anche con la condizione $i > p$. Scelto un $q > p$ tale che $F_q \cap B(x, \eta_1/3) \neq \emptyset$, si avrebbe: $F_q \subset B(x, \eta_1)$ e quindi $F_q \subset \bigcup_{i=1}^{k} F_i$; ma questo sarebbe in contrasto col fatto che F_q è essenziale in $\mathcal{F}$. //

Proposizione 6: Sia $E \subset \mathbf{R}^m$ e sia $\mathcal{F} = \{F_i, i \in N^*\}$ un δ-ricoprimento ottimale di E; se esiste un p tale che $d(F_p) = 0$, posto $k+1 = \min\{i \in N^*: d(F_i) = 0\}$ si ha:

$$\left(\bigcup_{N^*} F_i\right)^\circ = \left(\bigcup_{i=1}^{k} F_i\right)^\circ. \text{ (*)}$$

Dim.: Per le convenzioni fatte, se $i \in N^*$ con $i > k$ si ha: $d(F_i) = 0$ e quindi $F_i = \{x_i\}$, mentre $d(F_i) > 0$, per $i < k$. La proposizione è ovvia se $k = 0$. Sia $k > 0$, per ogni $i \in N^*$ con $i > k$ e $i \neq j$ si ha: $x_i \notin F_j$, altrimenti $\mathcal{F}$ non sarebbe irriducibile; ne segue che $d(x_i, F_j) > 0$.

Per ogni $i \in N^*$ con $i > k$, sia $\eta_i = \frac{1}{2} \min\{d(x_i, F_j), j < k\}$; in $B(x_i, \eta_i)$ cade al più un insieme numerabile di punti di $\bigcup_{N^*} F_i$ e pertanto x_i non può essere interno a $\bigcup_{N^*} F_i$. Ne segue che: $\left(\bigcup_{N^*} F_i\right)^\circ \subset \bigcup_{i=1}^{k} F_i$ e quindi $\left(\bigcup_{N^*} F_i\right)^\circ \subset \left(\bigcup_{i=1}^{k} F_i\right)^\circ$. L'inclusione opposta è banale e pertanto la tesi è dimostrata. //

(*) Vedi nota (1) a pag. 124.

Proposizione 7: In $\mathbf{R}^m$ euclideo, siano M_i, $i = 1, 2, \ldots, k$, insiemi d-m con $0 < d(M_i) < +\infty$, le seguenti proprietà sono equivalenti:

7.1 $x \in \left(\bigcup_{i=1}^{k} M_i\right)^\circ$,

7.2 $x \in \bigcup_{i=1}^{k} M_i$ e per ogni $u \in \omega_m$ e per ogni $\eta > 0$, esiste un t_u, con $0 < t_u < \eta$ tale che $x + t_u u \in \bigcup_{i=1}^{k} M_i$,

7.3 esiste un $r > 0$ tale che $B(x, r) \setminus \{x\} \subset \bigcup_{i=1}^{k} M_i^\circ$.

Dim.: È ovvio che 7.1 implica 7.2 e 7.3 implica 7.1. Dimostriamo che 7.2 implica 7.3. Sia $I_x = \{i < k : x \notin M_i\}$, se $I_x \neq 0$ sia

$$\eta = \tfrac{1}{2} \min \{d(x, M_i), i \in I_x\},$$

altrimenti sia $\eta = 1$. Per ogni $u \in \omega_m$ esiste un t_u, con $0 < t_u < \eta$ tale che $x_u = x + t_u u \in \bigcup_{i=1}^{k} M_i$; esiste un $j \notin I_x$ tale che $x_u \in M_j$, e poichè anche $x \in M_j$, essendo M_j ad ampiezza costante esiste un $\tau_u \geq t_u$ tale che $y_u = x + \tau_u u \in \partial M_j$. Risulta $\tau_u = |y_u - x|$.

Consideriamo l'insieme $A_u = B(y_u, \tau_u/2) \cap \partial M_j$, A_u è aperto in ∂M_j; posto $r_u = \tau_u/4$, si ha: $r_u < d(x, A_u)$. Sia $C(x, A_u)$ il cono di semirette uscenti da x ed intersecanti A_u. Posto $\omega_m(x) = x + \omega_m$, consideriamo gli insiemi $C'_u = C(x, A_u) \cap \omega_m(x)$ e $C_u = C(x, A_u) \cap B(x, r_u) \setminus \{x\}$.

Ora, poichè i punti dei segmenti che congiungono x con un punto qualsiasi di A_u, per note proprietà degli insiemi ad ampiezza costante in $\mathbf{R}^m$ euclideo, sono, al più esclusi gli estremi, interni ad M_j, data la scelta di r_u si ha: $C_u \subset M_j^\circ$.

D'altra parte $\{C'_u, u \in \omega_m\}$ è un ricoprimento aperto di $\omega_m(x)$, ed essendo $\omega_m(x)$ compatto, esistono $u_1, u_2, \ldots, u_p \in \omega_m$ tali che $\bigcup_{i=1}^{p} C'_{u_i} = \omega_m(x)$. Posto $r = \min \{r_{u_i}, i = 1, 2, \ldots, p\}$ si ha: $B(x, r) \setminus \{x\} \subset \bigcup_{i=1}^{p} C_{u_i} \subset \bigcup_{i=1}^{k} M_i^\circ$. //

Proposizione 8: Sia $E \subset \mathbf{R}^m$ euclideo e sia $\mathcal{F} = \{F_i, i \in N^*\}$ un δ-ricoprimento ottimale di E; se $x \in \left(\bigcup_{N^*} F_i\right)^\circ$, allora esiste un $\eta > 0$ tale che $B(x, \eta)$ interseca al più un numero finito di F_i.

Dim.: Supponiamo $N^* = \mathbf{N}$, altrimenti la proposizione sarebbe banale; sia inoltre $d(F_i) > 0$ per ogni i, altrimenti la dimostrazione seguirebbe subito dalla Prop. 6 e dalla 5.4. Sia x come nell'ipotesi, posto $I_x = \{i \in \mathbf{N} : x \in F_i\}$, I_x è non vuoto e per la 5.3 è finito. Sia $p = \max (I_x)$ sia q tale che $d(F_q) < \delta/2$, sia $k = \max \{p, q\}$. Sia $\eta_1 > 0$ tale che $B(x, \eta_1) \subset \bigcup_{i=1}^{k} F_i$.

Supponiamo che per ogni $\eta > 0$, $B(x, \eta)$ intersechi infiniti F_i, allora per la 5.4 $x \notin \left(\bigcup_{i=1}^{k} F_i\right)^\circ$ e quindi, poichè gli F_i sono d-m con $d(F_i) > 0$, per la Prop. 7 è vera la negazione della 7.2 cioè: esiste un $\eta_2 > 0$ ed esiste un $u \in \omega_m$ tale che per ogni t, con $0 < t < \eta_2$, $x + tu \notin \bigcup_{i=1}^{k} F_i$.

Sia $\eta = \frac{1}{2} \min \{\eta_1, \eta_2\}$, posto $T = \{y \in R^m : y = x + tu, 0 < t < \eta\}$, si ha:

$$T \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i, \quad T \cap \bigcup_{i=1}^{k} F_i = 0 \quad \text{e quindi} \quad T \subset \bigcup_{i=k+1}^{\infty} F_i.$$

Sia w la retta contenente T. Per la convessità di F_i, l'insieme $I_i = F_i \cap w$, se non è vuoto, è un intervallo chiuso in w eventualmente ridotto ad un punto. Tenuto conto che, data la scelta di k, per $i > k + 1$, $x \notin F_i$, anche l'insieme $I'_i = T \cap F_i = T \cap I_i$ è, se non vuoto, un intervallo chiuso in w; poichè $T \subset \bigcup_{i=k+1}^{\infty} F_i$, si ha $T = \bigcup_{i=k+1}^{\infty} I'_i$. Ma per la 5.2, per $i \neq j$, con $i, j > k$, si ha $F_i \cap \cap F_j = 0$ e quindi $I'_i \cap I'_j = 0$. Allora, però, un intervallo sarebbe unione disgiunta al più numerabile di intervalli chiusi in esso contenuti, il che è assurdo. //

Proposizione 9: Sia $E \subset R^m$ e sia $\mathcal{F} = \{F_i, i \in N^*\}$ un δ-ricoprimento ottimale di E, allora $D = \left(\bigcup_{N^*} F_i\right)^\circ \setminus \left(\bigcup_{N^*} F_i^\circ\right)$ è al più numerabile.

Dim.: Poichè R^m è separabile basterà dimostrare che ogni punto di D è isolato. Se $x \in D$, $x \in \left(\bigcup_{N^*} F_i\right)^\circ$, quindi esiste un $\eta_1 > 0$, tale che $B(x, \eta_1) \subset \bigcup_{N^*} F_i$ e, per la Prop. 8, esiste un η_2 tale che $B(x, \eta_2)$ interseca un numero finito di F_i. Sia $k = \max \{i \in N^* : B(x, \eta_2) \cap F_i \neq \emptyset\}$, e sia $\eta = \min \{\eta_1, \eta_2\}$, evidentemente $B(x, \eta) \subset \bigcup_{i=1}^{k} F_i$, e quindi $x \in \left(\bigcup_{i=1}^{k} F_i\right)^\circ$; per la Prop. 6 non è restrittivo supporre $d(F_i) > 0$, pertanto F_i, $i = 1, \ldots, k$, verificano le ipotesi della Prop. 7, e quindi $x \in \left(\bigcup_{i=1}^{k} F_i\right)^\circ$ equivale all'esistenza di un $r > 0$ tale che $B(x, r) \setminus \{x\} \subset \subset \bigcup_{i=1}^{k} F_i^\circ$. Ma allora posto $r_1 = \min \{r, \eta\}$, si ha che tutti i punti di $B(x, r_1) \setminus \{x\}$ stanno sia in $\left(\bigcup_{N^*} F_i\right)^\circ$, sia in $\bigcup_{N^*} F_i^\circ$, cioè non stanno in D, quindi x è isolato. //

Osservazione 9.A: La Prop. 7 e quindi la 8 e la 9 valgono anche in R^m con norme diverse da quella euclidea purchè sia verificata la seguente proprietà:

9.1 le frontiere degli insiemi d-m non contengono segmenti.

La proprietà 9.1 è verificata, ad esempio, in R^2 con ω_2 strettamente convessa.

4. - $\mu_\delta(E)$ con E aperto in R^m euclideo

Proposizione 10: Sia $E \subset R^m$ euclideo ed E aperto, allora:

$$\mu_\delta(E) = \nu_\delta(E).$$

Dim.: Qualunque sia $E \subset R^m$ è vero che: $\nu_\delta(E) < \mu_\delta(E)$ (vedi [R], Teor. 28), quindi se $\nu_\delta(E) = +\infty$ l'uguaglianza è ovvia.

Sia $\nu_\delta(E) < +\infty$; per la Prop. 4, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un δ ricoprimento ottimale $\mathcal{F} = \{F_i, i \in N^*\}$ di E tale che $\sum_{N^*} d(F_i) < \nu_\delta(E) + \varepsilon$.

Poichè E è aperto $E \subset \left(\bigcup_{N^*} F_i\right)^\circ$; ma allora

$$\mu_\delta(E) < \mu_\delta\left[\left(\bigcup_{N^*} F_i\right)^\circ \setminus \bigcup_{N^*} F_i^\circ\right] + \mu_\delta\left(\bigcup_{N^*} F_i^\circ\right),$$

e poichè per la Prop. 9, $\mu_\delta\left[\left(\bigcup_{N^*} F_i\right)^\circ \setminus \bigcup_{N^*} F_i^\circ\right] = 0$, si ha:

$$\mu_\delta(E) < \sum_{N^*} d(F_i^\circ) = \sum_{N^*} d(F_i) < \nu_\delta(E) + \varepsilon$$

e, data l'arbitrarietà di ε, si ha: $\mu_\delta(E) < \nu_\delta(E)$. //

Corollario 10.A: In R^m euclideo, se $E_n \uparrow E$, con E aperto, allora

$$\mu_\delta(E_n) \to \mu_\delta(E).$$

Dim.: È: $\nu_\delta(E_n) < \mu_\delta(E_n) < \mu_\delta(E)$; passando al limite per $n \to \infty$ e ricordando che $\nu_\delta(E_n) \to \nu_\delta(E)$ si ha quanto affermato. //

Corollario 10.B: Se E è aperto in R^m euclideo, $\mu_\delta(E)$, come funzione di δ, è continua a destra, cioè, per ogni $\delta > 0$, si ha:

$$\lim_{t \to \delta^+} \mu_t(E) = \mu_\delta(E).$$

Dim.: È noto che (vedi [C.Z.] e [S.S.]) $\lim_{t \to \delta^+} \nu_t(E) = \nu_\delta(E)$ e che, per $t > \delta$ (vedi [R], Teor. 28) si ha:

$$\nu_t(E) < \mu_t(E) < \nu_\delta(E)$$

da cui, passando al limite e tenendo conto della Prop. 10, si ha l'asserto. //

Osservazione 10.C: Dalle osservazioni 4.A e 9.A segue subito che i risultati di questo paragrafo sono validi in R^m con l'ipotesi 9.1 e per μ_δ^b con b che verifica le ipotesi 4.A.

5. - $\mu_\delta^h(E)$ con E chiuso

Per completezza concludiamo il presente lavoro dimostrando che $\mu_\delta^h(E)$ è continua a sinistra se E è chiuso, anche se gli strumenti usati sono del tutto indipendenti da quelli costruiti nei paragrafi 2 e 3.

Nel presente paragrafo supponiamo $E \neq \emptyset$, perchè nel caso $E = \emptyset$ le Prop. 14 e 15 sono banalmente vere, mentre la Prop. 13 è falsa.

Proposizione 11: Sia (X, ϱ) uno spazio metrico ed $E \subset X$; le seguenti proprietà sono equivalenti:

11.1 per ogni $x, y \in X$ e per ogni $r > 0$, esiste un $z \in B(y, r)$ tale che $\varrho(x, z) > \varrho(x, y)$;

11.2 se $d(E) = \varrho(x_0, y_0)$ con $x_0, y_0 \in E$, allora $x_0, y_0 \in \partial E$.

Dim.: L'equivalenza si ottiene senza difficoltà passando alle contronominali. //

Proposizione 12: Uno spazio normato X gode della proprietà 11.1.

Dim.: Immediata. //

Proposizione 13: Sia X uno spazio metrico con la prop. 11.1; siano $E, G \subset X$, con E compatto e G aperto, tali che $E \subset G$, allora si ha:

13.1 $d(E) < d(G)$;

13.2 esiste un aperto A tale che: $E \subset A \subset \overline{A} \subset G$ e $d(A) < d(G)$.

Dim.: 13.1 segue facilmente da 11.2. Per dimostrare 13.2, consideriamo la distanza η^* di E da $X \setminus G$; η^* è positivo.

Sia $\eta = (\frac{1}{2}) \min \{\eta^*, (d(G) - d(E))\}$; posto $A = \{x \in X : d(x, A) < \eta\}$, è immediato vedere che A verifica le proprietà richieste in 13.2. //

Proposizione 14: Sia X uno spazio metrico con la proprietà 11.1 ed E compatto in X, allora $\mu_\delta^h(E)$, come funzione di δ, è continua a sinistra, cioè, per ogni $\delta > 0$ si ha:

$$\lim_{\delta \to \delta^-} \mu_\delta^h(E) = \mu_\delta^h(E).$$

Dim.: Data la decrescenza di $\mu_\delta^h(E)$, basta dimostrare che per ogni $\varepsilon > 0$, esiste un δ^* con $0 < \delta^* < \delta$, tale che $\mu_{\delta^*}^h(E) < \mu_\delta^h(E) + \varepsilon$.

Fissato $\varepsilon > 0$, esiste un δ-ricoprimento aperto $\mathfrak{A} = \{G_i, i \in N^*\}$ dell'insieme compatto E tale che $\sum h(G_i) < \mu_\delta^h(E) + \varepsilon < +\infty$.

Posto $G_0 = X \setminus E$, $\{G_i, i \in N^* \cup \{0\}\}$ è un ricoprimento aperto di X; poichè in X vale la «shrinking property» (⁸), esiste un ricoprimento aperto di X, $\{U_i, i \in N^* \cup \{0\}\}$, tale che $\overline{U}_i \subset G_i$ per ogni $i \in N^* \cup \{0\}$.

Poichè per ogni $i \in N^*$, $\overline{U}_i \cap E$ è compatto, grazie alla prop. 13.2 (ponendo ovviamente $A_i = \emptyset$ se $\overline{U}_i \cap E = \emptyset$), è facile vedere che esiste un ricoprimento aperto $\{A_i, i \in N^*\}$ di E tale che:

14.1 $\quad \sum b(A_i) < \sum b(G_i) < \mu_\delta^b(E) + \varepsilon \quad$ e $\quad \max\{d(A_i), i \in N^*\} < \delta.$

Allora posto $\delta^* = \max\{d(A_i), i \in N^*\}$ si ha, per la 14.1,

$$\mu_{\delta^*}^b(E) < \mu_\delta^b(E) + \varepsilon . \qquad //$$

Proposizione 15: Se E è chiuso in $\mathbf{R}^n$, $\mu_\delta^b(E)$ è, come funzione di δ, continua a sinistra.

Dim.: Trattato a parte il caso banale in cui $\mu_\delta^b(E) = +\infty$, si procede passo passo come nella dimostrazione precedente. //

(⁸) Si dice che in uno spazio topologico X vale la shrinking property, se dato un ricoprimento aperto $\{V_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$ di X, esiste un ricoprimento aperto $\{U_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$ di X tale che $\overline{U}_\lambda \subset V_\lambda$, per ogni $\lambda \in \Lambda$. Per vedere che in X vale la shrinking property, cfr. [En] II.5.1.B e [Du] VII.6.1.

BIBLIOGRAFIA

[B.F.] Bonnesen T. - Fenchel W., *Theorie der Konvexen Körper*, Springer, Berlin, 1934.

[C.Z.] Chiffi A. - Zirello G.C., *Misura di Hausdorff e misure approssimanti*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, 69 (1983), 233-241.

[D.1] Davies R.O., *A property of Hausdorff measure*, Proc. Camb. Phil. Soc., 52 (1956), 30-34.

[D.2] Davies R.O., *Increasing sequences of sets and Hausdorff measure*, Proc. Lond. Math. Soc., (3) 20 (1970), 222-236.

[Du] Dugundji J., *Topology*, Allyn and Bacon, Boston, 1966.

[E] Eggleston H.G., *Sets of constant width in finite dimensional Banach spaces*, Israel J. of Math., 3 (1965), 163-172.

[En] Engelking R., *Outline of general topology*, North-Holland P.C., Amsterdam, 1968.

[L] Leichtweiss K., *Konvexe Mengen*, Springer, Berlin, 1980.

[R] Rogers C.A.: *Hausdorff measures*, Cambridge University Press, 1970.

[S.S.] Sion M. - Sjerve D., *Approximation properties of measures generated by set function*, Mathematika, 9 (1962), 145-156.

Direttore responsabile: Prof. A. Ballio - Autorizz. Trib. di Roma n. 7269 dell'8-12-1959
«Monograf» - Via Collamarini, 5 - Bologna