Rendiconti
Accademia Nazionale delle Scienze detta dei XL
Memorie di Matematica
102° (1984), Vol. VIII, fasc. 8, pagg. 137-142

MASSIMO LANZA DE CRISTOFORIS (*)

Soluzioni con lacune di certi operatori differenziali lineari (**)

Solutions with Lacunas for Some Linear Partial Differential Equations

SUMMARY. — Let $P = P(D) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha D^\alpha$ be a linear partial differential operator with constant coefficients, B a convex bounded open set of $\mathbf{R}^n$, $G(B) = \{f \in C^\infty(\mathbf{R}^n) : f|_B = 0\}$. We will prove the following

THEOREM 1: The following conditions are equivalent: *a)* $PG(B) = G(B)$, for every open, convex, bounded subset B of $\mathbf{R}^n$; *b)* P is hyperbolic with respect to every non-characteristic vector; *c)* $P = c\prod_{i=1}^{m} p_i + q$, where $c \in \mathbf{C}$, p_i is a real homogeneous polynomial of degree one, and $q < \prod_{i=1}^{m} p_i$.

0. - INTRODUZIONE

In [1] è dimostrato il seguente

THEOREMA: *Sia P un operatore differenziale lineare a coefficienti costanti, e sia $G(B) = \{f \in C^\infty(\mathbf{R}^n) : f_{|B} = 0\}$. Allora le proposizioni:*

a) Per ogni $B \subset \mathbf{R}^n$, aperto, convesso e limitato si ha: $PG(B) = G(B)$;

b) Per ogni $B \subset \mathbf{R}^n$, aperto, P-convesso e limitato si ha: $PG(B) = G(B)$;

c) P è iperbolico rispetto ad ogni vettore di $\mathbf{R}^n$ non caratteristico;

sono equivalenti.

In questo lavoro mi propongo di estendere il risultato precedente al caso degli aperti, convessi e limitati $B \subset \mathbf{R}^n$. Otterrò il

(*) Indirizzo dell'A.: Seminario Matematico dell'Università, Via Belzoni 7 - I-35100 Padova.
(**) Memoria presentata il 2 dicembre 1983 da Giuseppe Scorza Dragoni, uno dei XL.

ISSN-0392-4106

Teorema 1: *Le seguenti proposizioni sono equivalenti:*

a) $PG(B) = G(B)$, *per ogni* $B \subseteq \mathbf{R}^n$ *aperto, connesso e limitato;*

b) P *è iperbolico rispetto ad ogni vettore di* $\mathbf{R}^n$ *non caratteristico;*

c) $P = c \prod_{i=1}^{m} p_i + q$, *dove* $c \in \mathbf{C}$, p_i *è un polinomio omogeneo, a coefficienti reali e di grado uno,* $i = 1, \ldots, m$ *e* $q \prec \prod_{i=1}^{m} p_i$.

1. - Preliminari

In $\mathbf{R}^n$ la variabile sia $x = (x_1, \ldots, x_n)$. Se $A \subseteq \mathbf{R}^n$, porremo: $C_0^\infty(A) = D(A)$ e $C^\infty(A) = E(A)$, con le usuali topologie, cfr. [5], pagg. 64, 88; $D'(A)$ ed $E'(A)$ saranno i duali topologici forti rispettivi. Porrò $G(A) = \{f \in E(A) : f_{|A} = 0\}$, che, con la topologia ereditata da $E(A)$, risulta uno spazio di Fréchet. È facile dimostrare che il suo duale topologico forte è $G'(A) = E'(\mathbf{R}^n)/E'(A^-)$, con la topologia quoziente, e dove ho indicato con A^- la chiusura di A.

Se $P = P(D) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha D^\alpha$ è un operatore differenziale lineare a coefficienti costanti, indicherò con ${}^tP = P(-D) = \sum_{|\alpha| \leq m} (-1)^{|\alpha|} a_\alpha D^\alpha$ il trasposto di P, e con $P_m = P_m(D) = \sum_{|\alpha| = m} a_\alpha D^\alpha$ la parte principale di P, polinomio omogeneo somma dei termini di grado massimo di P.

Definizione 1: *Un aperto* $A \subseteq \mathbf{R}^n$ *si dice* P*-convesso se e solo se:* $\forall K \subset\subset A$, $\exists K' \subset\subset A$ *tale che* $\forall \varphi \in D(A)$ *con* $\operatorname{supp}({}^tP(\varphi)) \subseteq K$ *si ha* $\operatorname{supp}(\varphi) \subseteq K'$.

Ovvio dalla definizione precedente, che ogni aperto A di $\mathbf{R}^n$ convesso è P-convesso per ogni polinomio differenziale P.

In [1] pag. 172, è stato dimostrato il seguente

Teorema 2: $PG(B) = G(B)$ *se e solo se:* $\mu \in E'(\mathbf{R}^n)$ *e* $\operatorname{supp}({}^tP\mu) \subseteq B^-$ *allora* $\operatorname{supp}(\mu) \subseteq B^-$ *ed inoltre* ${}^tPE'(\mathbf{R}^n) + E'(B^-)$ *è debolmente chiuso per successioni* (¹).

Definizione 2: P *si dice iperbolico rispetto a* $N \in \mathbf{R}^n \setminus \{0\}$ *se e solo se:*

i) $P_m(N) \neq 0$;

ii) $\exists \tau_0 \in \mathbf{R}^n$ *tale che* $P(\xi + i\tau N) \neq 0$, $\forall \xi \in \mathbf{R}^n$ *ma appena* $\tau < \tau_0$.

Posto $\bar{P}(\xi) = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} |D^\alpha P(\xi)|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$, diremo che P è più debole di Q, $P \prec Q$, se e solo se $\exists c \in \mathbf{R}_+$ tale che $\bar{P}(\xi)/\bar{Q}(\xi) < c$, $\forall \xi \in \mathbf{R}^n$ ([3] Definizione 3.2.1).

(¹) Per la verifica che basta dimostrare la chiusura debole per successioni di ${}^tPE'(\mathbf{R}^n) + E'(B^-)$ al fine che esso sia debolmente chiuso, si veda [1], pag. 177, nota a piè di pagina.

Nel seguito faremo uso di questo

Teorema 3: *P è iperbolico rispetto a $N \in \mathbf{R}^n \setminus \{0\}$ se e solo se P_m è iperbolico rispetto ad N ed inoltre $P \prec P_m$.*

Rimandiamo a [4] per la teoria dei limiti induttivi e proiettivi e della loro dualità.

2. - Dimostrazione del Teorema 1

a) $\Rightarrow$ *b*).

Siano: $N \in \mathbf{R}^n \setminus \{0\}$ un vettore non caratteristico di P, $|N| = 1$, e $\gamma \in]0, 1[$ tali che ogni $N' \in \mathbf{R}^n \setminus \{0\}$, $|N'| = 1$, soddisfacente la diseguaglianza $1 - \gamma < |\langle N, N' \rangle| < 1$ sia non caratteristico per P. Supporremo $N = (1, 0, \ldots, 0)$.

Sia $(S_j)_{j \in \mathbf{N}}$ una successione di sfere chiuse di centro $(j, 0, \ldots, 0)$ e raggio R_j; sia $H_x = \{x \in \mathbf{R}^n : \langle x, N \rangle \geq 0\}$ e $B_j = S_j \cap H_x$. Se H è un iperpiano di normale $\tilde{N}$, e se H interseca S_j ma non B_j, allora

$$j/R_j < |\langle \tilde{N}, N \rangle| < 1 .$$

Scelto $R_j = j/[1 - (\gamma/2)]$ risulta $1 - \gamma < j/R_j$, e quindi ogni iperpiano di $\mathbf{R}^n$ che interseca B_j e non S_j è non caratteristico. Chiaramente $\bigcup_{j \in \mathbf{N}} (S_j \setminus B_j) = \mathbf{R}^n \setminus H_x$, $\bigcup_{j \in \mathbf{N}} B_j = H_x$ ed inoltre $(B_j)_{j \in \mathbf{N}}$ ed $(S_j)_{j \in \mathbf{N}}$ sono successioni di convessi crescenti (rispetto all'inclusione).

Analogamente a [1], pag. 175, pongo

$$L_j = G(\mathring{B}_j) \cap \operatorname{Ker} P , \qquad M_j = E(\mathbf{R}^n)/L_j$$

dove $\mathring{B}_j$ è l'interno di B_j; definisco $\pi_{j+1} : M_{j+1} \to M_j$ mediante la $\pi_{j+1}(f + L_{j+1}) = f + L_j$; $\{M_j, \pi_j, j \in \mathbf{N}\}$ è un sistema proiettivo; in base a [4], § 22,7.(9) e § 23,3.(7), posto $M = \varprojlim M_j$ (limite proiettivo), risulta $M' = \varinjlim M'_j$ (limite induttivo) sia algebricamente che topologicamente. Sia inoltre $\pi : E(\mathbf{R}^n) \to M$ l'applicazione definita da $\pi(f) = (f + L_j)_{j \in \mathbf{N}}$. Poichè $E(\mathbf{R}^n)$ è uno spazio di Fréchet e di Schwartz, visto che gli L_j sono sottospazi chiusi di $E(\mathbf{R}^n)$, risulta, per 2 Teorema [3], pag. 183,

$$M'_j \simeq ({}^tPE(\mathbf{R}^n) + E'(B_j))^-$$

e quindi, per l'ipotesi *a*) ed il Teorema 2 dei Preliminari, $M'_j \simeq {}^tPE'(\mathbf{R}^n) + E'(B_j)$ algebricamente e topologicamente. È facile controllare che l'isomorfismo precedente è fornito dalla restrizione di ${}^t\pi$ (trasposta di π) agli M'.

Se dimostro che ${}^t\pi$ è un isomorfismo algebrico e topologico sarà dimostrato che $E'(\mathbf{R}^n) \simeq {}^tPE'(\mathbf{R}^n) + E'(H_x)$; quindi, per il Teorema 2 dei Preliminari e per la convessità di H_x, sarà provata l'implicazione *a*) $\Rightarrow$ *b*).

π è continua. Se $\pi(f)=0$, si ha $Pf=0$ ed $f\in G(B_j)$, $\forall j\in\mathbf{N}$; quindi, in base al Corollario 5.3.1 di [3] π è iniettiva. π è suriettiva: se $(f_j+L_j)_{j\in\mathbf{N}}\in\varprojlim M_j$ deve essere

$$f_{j+1}=f_1+g_1+\dots+g_j,$$

con $g_i\in L_i$, $i=1,\dots,j$. Ora g_i è nulla su B_i e $Pg_i=0$; in virtù del Teorema 5.3.3 di [3], g_i è nulla in S_{i+1}. Allora $f\in E(\mathbf{R}^n)$ definita da $f=f_i$ su S_i risolve l'equazione $\pi(f)=(f_j+L_j)_{j\in\mathbf{N}}$. Tenuto presente che $E(\mathbf{R}^n)$ ed M sono spazi di Fréchet, π è un omeomorfismo.

b) $\Rightarrow$ *c)*.

$P-P_m\prec P_m$ in base a [6] (Teorema 3 dei Preliminari). Sia $P_m=\prod_{j=1}^{s}Q_j$, con Q_j omogeneo ed irriducibile. Se Q è un polinomio, pongo $V(Q)=\{x\in\mathbf{R}^n: Q(x)=0\}$. Se $N\in\mathbf{R}^n\setminus\{0\}$ e se $Q_j(N)\neq 0$, esisterà, nella componente connessa di $\mathbf{R}^n\setminus V(Q_j)$ contenente N un N' tale che $P_m(N')\neq 0$; P_m è iperbolico rispetto ad N', dunque anche Q_j è iperbolico rispetto ad N'; in base a [3], Lemma 5.5.1 e Teorema 5.5.5, Q_j è iperbolico rispetto ad N. Per provare l'implicazione basta provare che $Q_j=c_j\cdot p_j$, $c_j\in\mathbf{C}$, p_j polinomio omogeneo di grado 1 a coefficienti reali. Per [3], Corollario 5.5.1, si può supporre che Q_j abbia coefficienti reali.

$V(Q_j)\neq 0$; allora esiste $\alpha\in\mathbf{N}^n$, $\alpha\neq(0,\dots,0)$ ed esiste $\bar{x}\in V(Q_j)$ tale che $D^\alpha Q_j(\bar{x})\neq 0$ mentre $D^\gamma Q_j(x)=0$, $\forall x\in V(Q_j)$ e per ogni $\gamma\in\mathbf{N}^n$ tale che $|\gamma|<|\alpha|$.

Sia, ad esempio, $\alpha_1\neq 0$; per il teorema delle funzioni implicite esistono: un intorno $W_{\bar{x}}$ di $(\bar{x}_2,\dots,\bar{x}_n)$ in $\mathbf{R}^{n-1}$, un intorno sferico aperto $S_{\bar{x}}$ di $\bar{x}$ in $\mathbf{R}^n$ ed una funzione analitica $\psi_{\bar{x}}: W_{\bar{x}}\to\mathbf{R}$ tali che: posto

$$\sigma=\{x\in S_{\bar{x}}\ D^{\alpha-(1,0,\dots,0)}Q_j(x)=0\}$$

risulta

$$\sigma=\{x\in\mathbf{R}^n: x_1=\psi_{\bar{x}}(x_2,\dots,x_n),\ (x_2,\dots,x_n)\in W_{\bar{x}}\}.$$

Se $x\in S_{\bar{x}}$ e $Q_j(x)=0$, allora per ipotesi $D^{\alpha-(1,0,\dots,0)}Q_j(x)=0$ e quindi $V(Q_j)\cap S_{\bar{x}}\subseteq\sigma$. Siano $A^+_{\bar{x}}$ e $A^-_{\bar{x}}$ le componenti connesse di $\mathbf{R}^n\setminus V(Q_j)$ che contengono, rispettivamente, $S^+_{\bar{x}}=\{x\in S_{\bar{x}}: x_1>\psi_{\bar{x}}(x_2,\dots,x_n)\}$ e $S^-_{\bar{x}}=\{x\in S_{\bar{x}}: x_1<\psi_{\bar{x}}(x_2,\dots,x_n)\}$ (*). Se $y\in\sigma$ e $Q_j(y)\neq 0$ allora $S^-_{\bar{x}}\cup S^+_{\bar{x}}\cup\{y\}$ sarebbe connesso, dunque $A^+_{\bar{x}}=A^-_{\bar{x}}$; poichè $A^+_{\bar{x}}$ è convesso in base a [3], Lemma 5.5.1 e Teorema 5.5.6, risulterebbe $S^-_{\bar{x}}\subseteq A^+_{\bar{x}}$, e dunque $\bar{x}\notin V(Q_j)$: assurdo. Risulta che $S^+_{\bar{x}}=S_{\bar{x}}\cap A^+_{\bar{x}}$ e $S^-_{\bar{x}}=S_{\bar{x}}\cap A^-_{\bar{x}}$ sono convessi; ciò implica che σ è una porzione di piano ovvero che

$$\sigma=\{x\in S_{\bar{x}}: p_j(x)=0\}.$$

(*) Si osservi che, qualora $S_{\bar{x}}$ sia opportunamente piccolo, $S^+_{\bar{x}}$ ed $S^-_{\bar{x}}$ sono connessi.

dove p_i è un polinomio di grado 1 a coefficienti reali. Poichè $\sigma \subseteq V(Q_i)$, p_i fattorizza Q_i; per l'irriducibilità di Q_i, $p_i = Q_i$.

c) $\Rightarrow$ *b*).

Risulta da [3], Teorema 5.5.7.

b) $\Rightarrow$ *a*).

In base al Teorema 2 dei Preliminari ed alla convessità di B basta provare che ${}^tPE'(\mathbb{R}^n) + E'(B^-)$ è debolmente chiuso per successioni in $E'(\mathbb{R}^n)$. Sia

$$\lim_n {}^tP\lambda_n + \nu_n = q$$

in $E'(\mathbb{R}^n)$ con $\lambda_n \in E'(\mathbb{R}^n)$ e $\nu_n \in E'(B^-)$. Sia $\{H_\alpha, \alpha \in A\}$ la famiglia dei semispazi chiusi di $\mathbb{R}^n$ che contengono B^- e sia N_α la normale a ∂H_α (frontiera di H_α). Risulta che: posto $A' = \{\alpha \in A: P_m(N_\alpha) \neq 0\}$ si ha $B^- = \bigcap_{\alpha \in A'} H_\alpha$. Fissato $\alpha' \in A'$, per [3], Teorema 5.6.1, esiste una ed una sola soluzione fondamentale di P, diciamola $E_{\alpha'}$, con supp $(E_{\alpha'}) \subseteq \complement \tilde{H}_{\alpha'}$ (*) dove $\tilde{H}_{\alpha'}$ è quel semispazio chiuso di $\mathbb{R}^n$ tale che: $0 \in \partial \tilde{H}_{\alpha'}$, $\partial \tilde{H}_{\alpha'}$ è parallelo a $\partial H_{\alpha'}$, $\tilde{H}_{\alpha'} \cap \tilde{H}_{\alpha'} \neq \emptyset$. Tale supporto è contenuto nell'insieme

$$\Gamma^*(P, N_{\alpha'}) = \{x \in \mathbb{R}^n: \langle x, \theta \rangle > 0, \ \forall \theta \in \Gamma(P, N_{\alpha'})\},$$

ove $\Gamma(P, N_{\alpha'})$ è, in base a [3], Lemma 5.5.1, la componente connessa di N nell'insieme $\{\theta \in \mathbb{R}^n: P_m(\theta) \neq 0\}$. Sia ora $N_{\alpha_i} \in \Gamma(P, N_{\alpha'})$ ed E_{α_i} la relativa soluzione fondamentale, chiaramente $\Gamma(P, N_{\alpha_i}) = \Gamma(P, N_{\alpha'})$ e quindi supp (E_{α_i}), supp $(E_{\alpha'})$ sono ambedue contenuti in $\complement \tilde{H}_{\alpha'}$ e dunque $E_{\alpha_i} = E_{\alpha'}$. Possiamo pertanto associare a ciascun $\Gamma(P, N)$ una soluzione fondamentale di P. Poichè dalla proposizione *b*) segue la *c*), $P_m = c \prod_{i=1}^{m} p_i$, ove $c \in \mathbb{C}$ e p_i, $i = 1, \ldots, m$ è un polinomio omogeneo di grado 1, è allora evidente che il numero delle componenti connesse dell'aperto $\{\theta \in \mathbb{R}^n: P_m(\theta) \neq 0\}$ è finito, siano esse

$$\Gamma(P, N_{\alpha_i}), \quad i = 1, \ldots, h \qquad \text{ed} \qquad E_i, \quad i = 1, \ldots, h,$$

le corrispondenti soluzioni fondamentali; si ponga inoltre

$$A'_i = \{\alpha \in A': N_\alpha \in \Gamma(P, N_{\alpha_i})\}, \qquad i = 1, \ldots, h.$$

Sia ora $\varphi \in D(\complement B^-)$ e $\{\varrho_j\}_{j \in J}$ una partizione localmente finita della unità subordinata al ricoprimento $\{\complement H_\alpha\}_{\alpha \in A'}$ di $\complement B^-$ tale che se $j \in J$, $\varrho_j \in D(\complement H_\alpha)$ per qualche $\alpha \in A'$. Ne segue che $\varphi = \sum_{j \in F} \varrho_j \varphi$, per un opportuno sottoinsieme F finito di J. Essendo supp $(\varrho_j \varphi) \subseteq \complement H_\alpha$ esiste, per l'ipotesi *b*) e per il Lem-

(*) Per ogni $F \subseteq \mathbb{R}^n$ pongo $\complement F = \mathbb{R}^n \setminus F$.

ma 5.4.1 di [3] $\psi_j \in G(H_{\alpha_j})$ tale che $\varrho_j \varphi = P\psi_j$; allora posto $\psi = \sum_{j \in J} \psi_j$ risulta $\varphi = P\psi$, per $\psi \in G(B)$.

Osservo che

$$\lim_n \langle \lambda_n, \varphi \rangle = \lim_n \langle {}^tP\lambda_n, \psi \rangle = \lim_n \langle {}^tP\lambda_n + v_n, \psi \rangle = \langle q, \psi \rangle ;$$

ovvio che $\langle q, \psi \rangle$ non dipende dalla ψ in $G(B)$ tale che $P\psi = \varphi$. Per [5], pag. 74, esiste $\lambda \in D'(\mathcal{C}B^-)$ tale che $\langle \lambda, \psi \rangle = \langle q, \psi \rangle$.

Se $\varphi \in D\Big(\bigcup_{\alpha \in A_i'} \mathcal{C}H_\alpha\Big)$, allora chiaramente

$$\operatorname{supp}(\varphi * E_i) \subset \bigcup_{\alpha \in A_i'} \mathcal{C}H_\alpha$$

e da $P(\varphi * E_i) = \varphi$ segue che

$$\langle \lambda, \varphi \rangle = \langle q * E_i, \check{\varphi} \rangle \qquad \text{ove } \check{\varphi}(x) = \varphi(-x)\,, \ \forall x \in \mathbf{R}^n\,.$$

Nell'ipotesi $b)$ $\operatorname{supp}(q * E_i)$ è compatto e dunque la restrizione di λ ad $D\Big(\bigcup_{\alpha \in A_i'} \mathcal{C}H_\alpha\Big)$ risulta essere continua rispetto alla topologia dedotta da $G(B)$. Infatti: si ponga

$$J_1 = \Big\{ j \in J \colon \operatorname{supp}(\varrho_j) \subset \bigcup_{\alpha \in A_i'} \mathcal{C}H_\alpha \Big\},$$

$$J_2 = \Big\{ j \in J \colon \operatorname{supp}(\varrho_j) \subset \bigcup_{\alpha \in A_i'} \mathcal{C}H_\alpha \Big\} \setminus J_1, \ldots, J_k = \Big\{ j \in J \colon \operatorname{supp}(\varrho_j) \subset \bigcup_{\alpha \in A_i'} \mathcal{C}H_\alpha \Big\} \setminus \bigcup_{i=1}^{k-1} J_i\,.$$

Se $\varphi_n \in D(\mathcal{C}B^-)$, $\lim_n \varphi_n = 0$ nella topologia di $G(B)$, chiaramente

$$\lim_n \langle \lambda, \varphi_n \rangle = \lim_n \sum_{i=1}^{k} \Big\langle \lambda, \sum_{j \in J_i} \varrho_j \varphi_n \Big\rangle = \lim_n \sum_{i=1}^{k} \Big\langle q * E_i, \sum_{j \in J_i} \check{\varrho}_j \check{\varphi}_n \Big\rangle = 0\,.$$

Per il teorema di Hahn-Banach esiste quindi una distribuzione $\tilde{\lambda} \in E'(\mathbf{R}^n)$ tale che $\langle \tilde{\lambda}, \varphi \rangle = \langle q, \psi \rangle$, $\forall \varphi \in D(\mathcal{C}B^-)$ e pertanto $q - {}^tP\tilde{\lambda} \in E'(B^-)$.

BIBLIOGRAFIA

[1] G. Bratti, *Problema di Cauchy semilineare in due variabili*, Rendiconti del Sem. Mat. Univ. Padova, Vol. 69, 1983.

[2] A. Grothendieck, *Topological vector spaces*, Gordon and Breach, Science Publishers, New York, London, Paris, 1973.

[3] L. Hörmander, *Linear partial differential operators*, Springer-Verlag, 1969.

[4] G. Köthe, *Topologische Lineare Räume - I*, Springer-Verlag, 1960.

[5] L. Schwartz, *Théorie des distributions*, Hermann, Paris, 1966.

[6] L. Svensson, *Necessary and sufficient conditions for the hyperbolicity of polynomials with hyperbolic principal part*, Arkiv för matematik, Band 8, nr. 17, 1969.

Direttore responsabile: Prof. A. Ballio - Autorizz. Trib. di Roma n. 7269 dell'8-12-1959
« Monograf » - Via Collamarini, 5 - Bologna