



Rendiconti  
Accademia Nazionale delle Scienze della XL  
Memoria di Matematica  
102<sup>a</sup> (1984), Vol. VIII, fasc. 10, pagg. 185-246

LUIGI AMERIO (\*)

Studio del moto di una corda vibrante  
contro una parete di forma qualsiasi,  
sotto l'azione di una forza esterna arbitraria;  
domini di appoggio: un problema unilaterale di frontiera libera (\*\*)

Study of the motion of a string vibrating  
against a wall of any shape,  
under the action of an arbitrary external force;  
support domains: a unilateral free boundary problem

SUMMARY. — The present paper is related to the paper [1] (by L. Amerio and G. Proste) on the motion of a string *constrained* to vibrate in absence of external force, in the half plane  $y > 0$  of the  $(x, y)$  plane: the *obstacle* is constituted by the  $x$ -axis, which the string hits and from which it rebounds with an *elastic law*. In the analysis developed in [1] the concept of *line of influence of the wall* ( $w.i.l.$ ), in the  $(x, t)$  plane, plays a fundamental role. This line consists of a *finite* number of *s-area* (space-like area) and of *characteristic regions*: the *reaction of the constraint* (positive distribution) takes place *only* on the first (*impact areas*). The extension of the solution  $y(x, t)$  beyond the first w.i.l.  $A_1$  is obtained, on the basis of given *extinction laws*, by solving classical *elementary problems*, of Cauchy, Darboux, Goursat, whose data are deduced from the solution of the *free* problem, which is known. The procedure given in [1] continues to hold assuming that on the string acts an *external force* directed *away from the obstacle* [4], [6]. The problem of the *source* obstacle [8] can also be reduced (with smoothness assumptions) to this type of force, maintaining as obstacle the  $x$ -axis (see (1.9)).

The aim of the present paper is to eliminate the limitations on the nature of the external force and of the shape of the obstacle: the force can now be directed *towards* the obstacle which, in its turn, may be *convex*, and also in *stationary* (see property II, § 1). For this, a completion of the *mathematical model* of the phenomenon is proposed, by adding further *extinction laws*, based on the assumption that, during some time interval, a (variable) part of the string can *press* the obstacle, which will *react* with the *opposite force* (*reaction*). There are therefore, in the  $(x, t)$  plane, some *support domains*, whose boundary is constituted by *support* (but not *impact*) *lines*  $I'$ : these are either *t-area* (time-like area), or *characteristic regions*, or (exceptionally, since, in this case,  $f|_{I'} = 0$ ) *s-area*. In the first and third case, on  $I'$  the derivatives  $y_x$  and  $y_t$  (in addition to  $y(x, t)$ ) vanish simultaneously: the points of  $I'$  are therefore *stationary points* for the surface  $y = y(x, t)$  on the boundary of the open set in which

(\*) Uno del XL.

(\*\*) Memoria presentata il 26 febbraio 1984. Indirizzo dell'autore: Dipartimento di Matematica del Politecnico di Milano.

$y > 0$ . In order to determine the  $s$ -arcs, it is necessary to solve a further elementary problem, of Goursat type but of free boundary and unilateral, which will be called problem  $II^*$ . Various sufficient conditions are given (§ 5) for the existence of a unique solution of problem  $II^*$  and extension laws are formulated (§ 5) corresponding to the existence of support domains. § 4 is dedicated to the extension from an impact  $s$ -arc  $\Gamma$  to a curved triangle defined by a terminal part of  $\Gamma$  and two characteristic segments. The final extension (§ 6), beyond the first wall  $A_1$ , is made under the fundamental assumption (§ 2) that the support  $K$  of the contour of the domain has a boundary  $\partial K$  which intersects each characteristic triangle in a finite number of  $s$ -arcs and of characteristic segments. In this way a small w.l.l.  $A_2$  is obtained, which is above  $A_1$  and, like  $A_1$ , is constituted by a finite number of  $s$ -arcs and of characteristic segments. In the domain contained between  $A_1$  and  $A_2$  are included, in general, some support domains and terminal parts of impact (or support)  $s$ -arcs.

## I. - INTRODUZIONE

a) Il presente lavoro si collega direttamente ad uno precedente [1] — in collaborazione con G. Prouse — sul moto di una corda *viscolata* a vibrare, in assenza di forza esterna, nel semipiano  $y > 0$  del piano  $(x, y)$ .

L'ostacolo (parete rigida) è costituito dall'asse  $x$ , contro il quale la corda viene a urtare, con legge elastica.

Nell'analisi svolta in [1] ha ruolo essenziale il concetto di linea di influenza della parete. Questa si costruisce in base a considerazioni sui domini di influenza, proprie delle equazioni di tipo iperbolico, ed è formata da archi di urto (con orientamento nello spazio) raccordati da segmenti caratteristici. Il prolungamento della soluzione, dal di sotto della prima linea di influenza al di sopra (e analogamente per le successive) si effettua in base ad ammesse leggi di estensione, di ben preciso significato fisico-matematico; si è in tal modo ricondotti alla risoluzione di classici problemi elementari: di Cauchy, di Darboux, di Goursat (con dati deducibili dalla soluzione, nota, del problema libero).

In lavori successivi (cf. [2], ..., [9]) i risultati ottenuti in [1] sono stati ampliati considerando una varia fenomenologia: altre leggi di urto (parzialmente elastico, o anelastico), attenuazioni delle ipotesi poste in [1], presenza di forza esterna (dipendente, anche non linearmente, dall'incognita), urto di due corde, ostacolo concavo, quasi-periodicità delle soluzioni.

Se la corda è sottoposta ad una forza esterna, si è dovuto tuttavia ammettere (per poter utilizzare il procedimento dato in [1]) che questa sia di allontanamento dall'ostacolo. Anche il problema dell'ostacolo concavo (sufficientemente regolare) si riconduce a questo tipo di sollecitazione, e assumendo ancora come ostacolo l'asse  $x$  (cfr. la (1.9) con  $s'(x) > 0$ ).

Scopo del presente lavoro è di rimuovere le limitazioni concernenti la natura della forza esterna e la forma della parete, che ora saranno supposte arbitrarie: perciò la forza può anche essere di avvicinamento, e la parete convessa.

Si è definito, per questo, un completamento del modello matematico basato sulle precedenti leggi di estensione, con l'aggiunta di altre, legate alla risoluzione di un ulteriore problema elementare (questa volta di frontiera libera e unilaterale).

Consideriamo anzitutto, come esempio, il moto di una corda omogenea, sottoposta alla forza di gravità, che vibri al di sopra dell'asse  $x$ . In questo caso si può formulare una legge di estensione ritenendo possibile che, durante lo svolgimento del fenomeno, un tratto  $a_t \rightarrow b_t$  della corda (incognito) si appoggi sull'asse  $x$ ,  $\forall t$  di un intervallo  $t_1 \rightarrow t_2$  del tempo, nel modo indicato nella figura 1.1a (cfr. l'osservazione II al § 3).

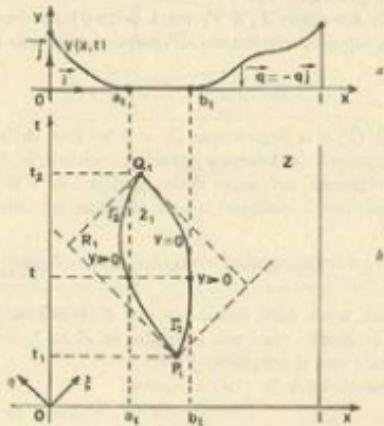


Fig. 1.1

L'asse  $x$  fornisce, in tal caso, in tutti i punti di  $a_t \rightarrow b_t$ , una reazione vincolare  $-\bar{q}$ , opposta al peso specifico  $\bar{q}$  della corda. Nel dominio  $Z_1$  della figura 1.1b si ha

$$(1.1) \quad j(P) = 0.$$

Ai precedenti problemi elementari dovremo pertanto aggiungere un quarto, di frontiera libera, con il quale si traduce la condizione che nei punti  $a_t$  e  $b_t$  si annullino simultaneamente lo spostamento  $y$  e la derivata parziale  $j_x$ :

$$(1.2) \quad \begin{cases} j(b_t, t) = 0, & j_x(b_t, t) = 0; \\ j(a_t, t) = 0, & j_x(a_t, t) = 0. \end{cases}$$

Queste condizioni possono ovviamente essere sostituite con le seguenti (in coordinate caratteristiche  $\xi = (x+t)/\sqrt{2}$ ,  $\eta = (-x+t)/\sqrt{2}$ ):

$$(1.3) \quad \begin{cases} j|_{r_1} = 0, & j_t|_{r_1} = 0; \\ j|_{r_2} = 0, & j_\eta|_{r_2} = 0. \end{cases}$$

In queste,  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$  sono due archi *ignoti*, con *orientamento nel tempo*. Li diremo *archi di appoggio*. La loro riunione costituisce la frontiera del *dominio di appoggio*  $Z_1$ , di origine  $P_1$ .

Si osservi che su  $\Gamma_1$  risulta anche  $y_\eta = 0$ . Perciò l'arco  $\Gamma_1$  è costituito interamente da punti di stazionarietà della superficie  $y = y(\xi, \eta)$  (punti singolari della frontiera,  $y(\xi, \eta) = 0$ , dell'aperto in cui  $y(\xi, \eta) > 0$ ).

Lo stesso vale per l'arco  $\Gamma_2$ .

Il problema di determinare  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$  verrà detto (2) *problema II\**.

Si fa, qui e in seguito, riferimento all'*equazione della corda vibrante vincolata*:

$$(1.4) \quad \square y = y_{tt} - y_{xx} = -2f(x, t) + 2f.$$

In questi,  $-2f(P)$  è la *forza esterna* ( $2f = q$  nel caso della corda pesante),  $2f$  è la *reazione dell'estacolo* (distribuzione positiva incognita): le derivate debbono essere intese, ovviamente, nel senso delle distribuzioni  $\mathcal{D}'(\bar{Z})$ .

*Supponiamo soddisfatte le condizioni seguenti* (insieme ad altre, introdotte nel corso del lavoro):

$$(1.5) \quad y(P) \text{ e } f(P) \in C^0(Z), \quad y(P)|_Z > 0, \quad y(P)|_{\partial Z} > 0,$$

ammettendo inoltre, come nella figura 1.1b, che  $Z$  sia una semistriscia; quanto segue vale però in ipotesi assai più generali: se  $Z$  ha la forma considerata in [3], o se coincide con il semipiano  $y > 0$ .

In coordinate caratteristiche la (1.4) si scrive:

$$(1.6) \quad y_{tt} = -f(\xi, \eta) + f,$$

ove  $-f(\xi, \eta)$  e  $f$  verranno dette ancora la *forza esterna* e la *reazione dell'estacolo*.

Conveniamo, in quanto segue, di chiamare *t-archi* gli archi con orientamento nello spazio, *s-archi* gli archi con orientamento nel tempo.

Nella (1.6) la funzione  $f(\xi, \eta)$  può ora assumere valori di *segno qualsiasi*.

Supponiamo tuttavia, per semplicità, che i cambiamenti di segno abbiano luogo nell'attraversamento di *s-archi*, o di *t-archi* (cf. la figura 1.2), sicché sia verificata la seguente proprietà  $\delta$ .

(3) La *forza esterna*  $f(P)$  si annulla, in  $Z$ , su una successione  $\{\sigma_i\}$  di *s-archi*, distinti e con ordinate  $\rightarrow +\infty$ , e su una successione (finita)  $\{\tau_i\}$  di *t-archi*.

(2) In analogia all'aver chiamato *problema II* un altro problema elementare, nel caso dell'estacolo puramente fisso o mobile (cfr. L. AMERIO: *Su un problema di nuclei unilaterali per l'espansione non smessa della corda vibrante*, Pubb. I.A.C., Serie III, n. 109 (1976); *On the motion of a string vibrating through a moving ring, with a continuously variable diameter*, Atti Acc. Naz. dei Lincei, (8) 62, n. 2, 134-142 (1977); *A unilateral problem for a non-linear vibrating string equation*, Atti Acc. Naz. dei Lincei, (8) 64, n. 1, 8-21 (1978); C. CERRENI: *Discontinuous solution of a non-linear hyperbolic equation with unilateral constraint*, Manuscr. Math., 29, 323-352 (1979); C. CERRENI, C. MARCHIORI: *Sul problema dell'estacolo puramente fisso per l'equazione iperbolica*  $\square y = f(x, t, y, y_x, y_t)$ , Mem. di Mat., Acc. Naz. dei XL (1981).

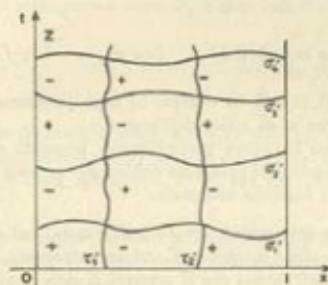


Fig. 1.2.

b) Il problema dell'*ostacolo di forma qualsiasi* (purchè abbastanza regolare) si riduce a quello considerato in a). Supponiamo infatti che la condizione di vincolo sia la seguente:

$$(1.7) \quad y(x, t) > u(x),$$

con  $u(x)$  funzione assegnata. Posto allora

$$(1.8) \quad w(x, t) = y(x, t) - u(x),$$

si ottiene per  $w(x, t)$  l'equazione

$$(1.9) \quad \square w = -2f(x, t) + w''(x) + 2J,$$

con la *condizione di vincolo*:

$$(1.10) \quad w(x, t) > 0.$$

La legge di urto (nei *punti di urto*, nei quali si ha, necessariamente,  $w = 0$ ) è ancora la seguente:

$$(1.11) \quad w_i^+ = -\lambda w_i^-, \quad w_i^- < 0,$$

con  $\lambda = 1$ ,  $0 < \lambda < 1$ ,  $\lambda = 0$  a seconda che l'urto sia *elastico* (come qui supporremo), *parzialmente elastico*, *inelastico*.

Ad esempio, se  $f(x, t) = 0$  e  $u(x) = -x^2$  (ostacolo *convesso*) siamo ricon-

dotti all'equazione

$$\square w = -2 + 2f \quad (\Leftrightarrow w_{tt} = -1 + f),$$

con la condizione (1.11). Si ha dunque lo stesso problema della *corda pesante* ( $2f = q = 2$ ), vibrante al di sopra dell'asse  $x$ .

Notiamo che, con lo stesso procedimento, ponendo nella (1.9) —  $\square u$  in luogo di  $u'$ , si può studiare il problema dell'*ostacolo variabile nel tempo*:  $\gamma(x, t) > u(x, t)$ , con  $u(x, t)$  funzione assegnata.

c) Il contenuto del presente lavoro è distribuito nel modo seguente: nel § 2 viene definita la *classe funzionale Y* cui appartengono gli integrali  $\gamma(x, t)$  della (1.4), almeno nell'ipotesi che il supporto  $K$  della reazione  $f$  abbia struttura «*ma troppo intricata*» (in modo ben precisato; questa ipotesi, *essenziale*, è verificata negli esempi riportati in seguito); nel § 3 si pone il *problema II\** (di soluzione immediata nel caso della corda pesante) e sono formulate le corrispondenti *leggi di estinzione*, riferite anche al caso in cui l'arco  $I_1$ , o l'arco  $I_2$ , o entrambi, siano *segmenti caratteristici*; il § 4 tratta prolungamenti consecutivi: da un arco di appoggio (o di urto) ad uno di urto, e a un successivo *segmento caratteristico*; nel § 5 vengono assegnate varie *condizioni sufficienti* per la risolubilità del problema *II\** in ipotesi sostanzialmente legate alla proprietà  $f$  della *forza esterna*  $f(P)$ ; il § 6 è dedicato infine, sulla base dei precedenti risultati, alla costruzione del *prolungamento oltre la (prima) linea di influenza*.

Si ottiene una *seconda linea di influenza*, formata anch'essa da un numero finito di  $s$ -archi e di *segmenti caratteristici*, situata al di sopra della prima e priva di punti comuni con questa.

Nel dominio delimitato dalle due linee possono essere inclusi dei *domini di appoggio e parti terminali di s-archi di urto e di appoggio*.

La costruzione riprende allora per ottenere le successive linee di influenza (almeno finché l'insieme  $K$  mantenga le proprietà postulate all'inizio).

## 2. - FUNZIONI AMMISSIBILI; SUPPORTO DELLA REAZIONE VINCOLARE; PUNTI E LINEE DI URTO, O DI APPOGGIO

a) Consideriamo l'equazione (1.6).

Se in un punto  $P_1(t_1, \eta_1)$  è  $f(P_1) > 0$ , la forza esterna è ivi di *avvicinamento* all'ostacolo, se è  $f(P_1) < 0$  la forza è di *allontanamento*, se è  $f(P_1) = 0$  diremo che la forza  $f(P)$  è *mentre* in  $P_1$ .

Nello studio *locale* del fenomeno interessa particolarmente supporre

$$(2.1) \qquad f(P_1) > 0 \qquad (\text{oltre che } \gamma(P_1) = 0).$$

Se  $f(P_2) < 0$ , il prolungamento oltre  $P_1$  è dato infatti dalla formula (4):

$$(2.2) \quad \gamma(\xi, \eta) = \gamma(\xi, \eta_1) + \gamma(\xi_1, \eta) - \int_{\xi_1}^{\xi} dx \int_{\eta_1}^{\eta} f(x, \beta) d\beta,$$

in virtù della quale (essendo le tracce  $\gamma(\xi, \eta_1) \in \gamma(\xi_1, \eta)$ ,  $> 0$ ) risulta  $\gamma(\xi, \eta) > 0$  in tutto un rettangolo caratteristico  $R = \{\xi_1 < \xi < \xi_2, \eta_1 < \eta < \eta_2\}$ . In questo caso la distribuzione  $J$  è nulla nell'aperto  $\tilde{R}$ :  $P_1$  non può essere origine di un dominio di appoggio.

b) Definiamo ora (nei seguenti punti  $i_1, \dots, i_k$ ) la classe funzionale  $Y$  delle funzioni ammissibili, alla quale supponiamo appartengano le soluzioni dei problemi unilaterali qui considerati.

i.) Ammettiamo anzitutto che  $\gamma(\xi, \eta)$  soddisfi alle (1.5) e abbia derivate  $\gamma_\xi$  e  $\gamma_\eta \in L^1_{loc}(Z)$ :  $\gamma(\xi, \eta)$  sia inoltre  $\xi$ -assolutamente continua ( $\xi$ -a.c.)  $\forall \eta$  ed  $\eta$ -a.c.  $\forall \xi$ .

Sia ora  $r_t$  una  $\xi$ -caratteristica arbitraria, di equazione  $\eta = \eta_1$  (la quale attraversa  $Z$ ) e sia  $A(\xi) = \gamma(\xi, \eta_1)$ , con  $\xi_1 < \xi < \xi$ , la traccia di  $\gamma(\xi, \eta)$  su  $r_t$ .

(5) Richiamiamo, per maggior chiarezza del seguito, la costruzione della linea di influenza e le leggi di prolungamento data in [1].

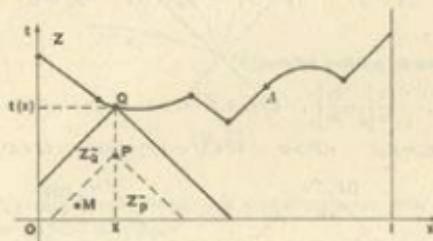


Fig. 2.1

Supponiamo assegnati i classici valori iniziali e ai limiti, in modo da soddisfare alla terza delle (1.5).

a) Sia  $\xi = \xi(P)$  la corrispondente soluzione del problema libero per l'equazione  $\square w = -2f(P)$ . Fissato  $x \in \partial^{ext} I$ , si consideri il punto  $P(x, t)$  e sia  $Z_P$  l'intersezione con  $Z$  del semicocco caratteristico retrogrado con vertice in  $P$ . Se  $t$  è abbastanza piccolo, risulta  $Z(M) > 0$ ,  $\forall M \in Z_P$ : sia  $t(x)$  il massimo valore di  $t$  per cui questo avviene. Al variare di  $x$ , il punto  $Q(x, t(x))$  descrive la (prima) linea di influenza della parola. La funzione  $t = t(x)$  è lipschitziana ( $|t(x') - t(x')| < |x' - x'|$ ): sono convenienti ipotizzare sui dati, il grafico di  $t(x)$  costi di un numero finito di arcidi,  $x_i < x < x_{i+1}$ ,  $t(x) \in C(x_i^{out}, x_{i+1})$ ,  $|t'(x)| < 1$  in  $x_i \rightarrow x_{i+1}$ , e di seguenti caratteristiche. Si pose  $\gamma(x, t) = \xi(x, t)$  per  $0 < x < I$ ,  $0 < t < t(x)$ .

b) Con riferimento ai problemi di Cauchy (I), di Darboux (II) e di Goursat (III), si formulano le seguenti leggi di estensione (nella quali  $\xi(P)$  indica ancora la soluzione del problema libero, a  $C^1(\mathcal{D})$ ):

*Assumettemo* allora che l'intervallo  $\xi_1 \rightarrow \xi$  possa suddividersi in un numero finito  $n_1$  di parti, mediante i punti

$$\xi_1 = \alpha_0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_n = \tilde{\xi},$$

in modo che la derivata  $A'(\xi) \in C^0(\alpha_k \rightarrow \alpha_{k+1})$ ,  $\forall k$ , e sia, in  $\alpha_k \rightarrow \alpha_{k+1}$ , strettamente crescente ( $\uparrow$ ), o strettamente decrescente ( $\downarrow$ ), o costante.

Analogamente faremo per la traccia  $B(\eta) = j(\xi_1, \eta)$  su ogni  $\eta$ -caratteristica,  $\xi = \xi_1$ .

Esistono dunque i limiti

$$\lim_{\xi \rightarrow \xi_1^+} A'(\xi) = \bar{l}_1 \begin{cases} \text{finito,} \\ = -\infty, \\ = +\infty, \end{cases} \quad \lim_{\xi \rightarrow \xi_1^-} A'(\xi) = \bar{l}_1 \begin{cases} \text{finito,} \\ = -\infty, \\ = +\infty, \end{cases}$$

che diremo ancora le derivate parziali, destra e sinistra, rispetto a  $\xi$ , in  $\xi_1$  e in  $\tilde{\xi}$  (la coincidenza sussiste ovviamente se  $\bar{l}_1$ , o  $\bar{l}_1$ , è finito). Si ha dunque, in egual caso,

$$j_\xi^+(\xi_1, \eta_1) = \bar{l}_1, \quad j_\xi^-(\tilde{\xi}, \eta_1) = \bar{l}_1.$$

Perciò, preso ad arbitrio  $P_1 \in \tilde{Z}_1$  esistono, finite o infinite con segno, le derivate parziali, destra e sinistre,

$$j_\xi^+(P_1), \quad j_\xi^-(P_1), \quad j_\eta^+(P_1), \quad j_\eta^-(P_1).$$

e  $j(P)$  la soluzione del problema unilaterale:

$$z_\sigma = j_\sigma, \quad \frac{\partial z}{\partial \nu} \Big|_\sigma = \frac{\partial j}{\partial \nu} \Big|_\sigma, \quad z(P) \geq 0 \quad \forall P \in \Delta^+ \Rightarrow j(P) = z(P) \quad \forall P \in \Delta^+;$$

$$z_\sigma = j_\sigma, \quad z(P) \geq 0 \quad \forall P \in \Delta^+ \Rightarrow j(P) = z(P) \quad \forall P \in \Delta^+.$$

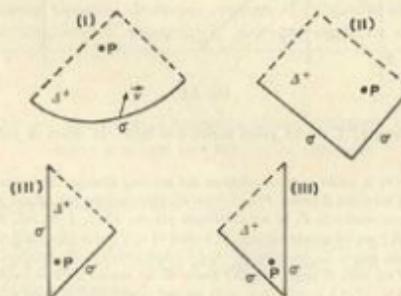


Fig. 2.2

In altre parole: la soluzione del problema unilaterale coincide, per quanto possibile (cioè se  $z(P) \geq 0$  in  $\Delta^+$ ), con quella del problema libero.

i) *Punto*, in  $\mathcal{D}'(\bar{Z})$ ,

$$(2.3) \quad f = y_{k_0} + f(\xi, \eta), \quad K = \text{supp } f,$$

supporremo che  $f$  sia una distribuzione positiva e sia

$$(2.4) \quad K \subset \{P; y(P) = 0\}.$$

Si osservi che la distribuzione  $f$  è nulla nei punti dell'aperto  $\bar{Z} - K$  (e solo in questi). Perciò  $y(\xi, \eta)$ , in  $\bar{Z} - K$ , soddisfa all'equazione

$$(2.5) \quad J_{k_0} = -f(\xi, \eta).$$

Sia  $P_1$  un punto di  $K$ . Diremo allora che  $P_1$  è un punto di urto se, preso comunque un intorno  $U$  di  $P_1$ , la distribuzione  $J$  non coincide, in  $U$ , con una funzione.

Diremo che  $P_1$  è un punto di appoggio se esiste un intorno  $U_1$  di  $P_1$  nel quale  $J$  coincide con una funzione.

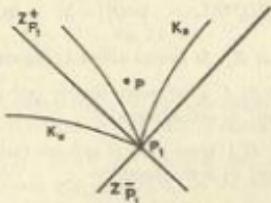


Fig. 2.3

Il punto  $P_1$  si dice di *urto-appoggio* se è simultaneamente *punto di urto* e *punto di accumulazione di punti di appoggio*.

Diremo  $K_u$  e  $K_s$  gli insiemi dei punti di urto e dei punti di appoggio rispettivamente.

Supponiamo ora che l'aperto  $\bar{K}_u$  (formato dai punti interni a  $K_u$ ) sia un punto. Si riconosce allora immediatamente (poiché, per la (2.4),  $y(P) = 0$  in  $\bar{K}_u$ ) che risulta

$$(2.6) \quad J = f(\xi, \eta) > 0 \quad \forall P \in \bar{K}_u.$$

È anzi necessariamente, per la continuità di  $f$ ,

$$\bar{K}_u \subset \bar{\Omega}^+, \quad \text{ove } \Omega^+ = \{P; f(P) > 0\}.$$

È chiaro inoltre che l'insieme  $K_u$  dei punti di urto non ha punti interni. Se fosse

infatti  $\hat{K}_e \neq \emptyset$  si avrebbe ancora  $J = f(\xi, \eta)$ ,  $\forall P \in \hat{K}_e$ , contro la definizione di punto di urto.

i<sub>2</sub>) Faremo la seguente ipotesi fondamentale sulla struttura della frontiera  $\partial K$  dell'insieme  $K$ .

L'insieme  $\partial K$  è la unione di una successione di s-archi, di t-archi e di segmenti caratteristici;

$$\partial K = K_s \cup K_t \cup K_e;$$

$\forall$  rettangolo caratteristico  $R$ , solo un numero finito di tali linee interseca  $R$ .

Inoltre:

i<sub>3</sub>) se  $t = t(x)$ ,  $x_1 < x < x_2$ , è l'equazione di un arco  $\in K_s$ , risulta

$$t(x) \in C^1(x_1^{-\alpha}, x_2), \quad |t'(x)| < 1 \quad \text{in } x_1^{-\alpha} x_2;$$

i<sub>4</sub>) se  $x = x(t)$ ,  $t_1 < t < t_2$ , è l'equazione di un arco  $\in K_t$ , risulta

$$x(t) \in C^1(t_1^{-\alpha}, t_2), \quad |x'(t)| < 1 \quad \text{in } t_1^{-\alpha} t_2.$$

i<sub>5</sub>) Sia  $\Gamma$  un arco di  $K_s$ . Si hanno allora le seguenti eventualità:

i<sub>5a</sub>) tutti i punti di  $\Gamma$  sono punti di urto (salvo, al più, gli estremi, che possono essere punti di urto-appoggio);

i<sub>5b</sub>) tutti i punti di  $\Gamma$  sono punti di appoggio (salvo, al più, gli estremi, che possono essere punti di urto-appoggio);

i<sub>5c</sub>) Se  $\Gamma$  è un arco di  $K_t$ , è un segmento di  $K_s$ , tutti i punti di  $\Gamma$  sono punti di appoggio (salvo, al più, gli estremi, che possono essere punti di urto-appoggio).

Se vale la i<sub>5c</sub>), diremo che  $\Gamma$  è un arco di urto; in caso contrario,  $\Gamma$  è un arco (o un segmento caratteristico) di appoggio.

i<sub>6</sub>) Le derivate  $y_t(\xi, \eta)$  e  $y_\eta(\xi, \eta)$  sono continue in tutto  $Z - K_s$ , escludendo al più:

— per  $y_t(\xi, \eta)$ , una successione di  $\eta$ -caratteristiche,  $\xi = \xi_n$ , con  $\xi_n \rightarrow +\infty$ ;

— per  $y_\eta(\xi, \eta)$ , una successione di  $\xi$ -caratteristiche,  $\eta = \eta_n$ , con  $\eta_n \rightarrow +\infty$ .

c) Diamo la legge di urto (elastico, parzialmente elastico, anelastico).

Sia  $\Gamma$  un arco di urto, e sia  $P_1$  un punto arbitrario di  $\Gamma$ . Si ammette allora che esistano finite le derivate sinistra e destra:

$$(2.7) \quad y_t^-(\xi_1, \eta_1), \quad y_\eta^-(\xi_1, \eta_1), \quad y_t^+(\xi_1, \eta_1), \quad y_\eta^+(\xi_1, \eta_1),$$

e risultati

$$(2.8) \quad y_t^- < 0, \quad y_\eta^- < 0, \quad y_t^+ = -2y_t^-, \quad y_\eta^+ = -2y_\eta^-.$$

ove è  $\lambda = 1$  nel caso *elastico*,  $0 < \lambda < 1$  nel caso *parzialmente elastico*,  $\lambda = 0$  nel caso *anelastico*.

*Sì ha inoltre:*

$$(2.9) \quad \begin{cases} \lim_{\xi \rightarrow \xi_1^-} y_\nu(\xi, \eta_1) = j_1^-(\xi_1, \eta_1), & \lim_{\eta \rightarrow \eta_1^-} y_\nu(\xi_1, \eta) = j_1^-(\xi_1, \eta_1), \\ \lim_{\xi \rightarrow \xi_1^+} y_\nu(\xi, \eta_1) = j_1^+(\xi_1, \eta_1), & \lim_{\eta \rightarrow \eta_1^+} y_\nu(\xi_1, \eta) = j_1^+(\xi_1, \eta_1), \end{cases}$$

la convergenza essendo *uniforme*, rispetto a  $P_1$ , su ogni arco  $I^\nu \subset \tilde{I}$ .

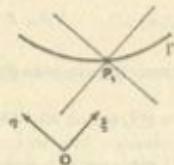


Fig. 2.4

d) Per chiarire il comportamento di una funzione  $j(P) \in Y$ , dopo un punto  $P_1$ , con  $j(P_1) = 0$ , conviene prendere in esame il problema di Darboux.

Sia  $R_1 = \{\xi_1 < \xi < \bar{\xi}, \eta_1 < \eta < \eta^*\}$  un rettangolo caratteristico,  $\subset Z$  e di vertice minimo  $P_1$ . Indichiamo con  $\zeta(\xi, \eta) \in C^0(R_1)$  la soluzione del problema libero di Darboux, nel rettangolo  $R_1$ , corrispondente ai dati

$$\zeta(\xi, \eta_1) = j(\xi, \eta_1) = A(\xi) \quad (\xi_1 < \xi < \bar{\xi}),$$

$$\zeta(\xi_1, \eta) = j(\xi_1, \eta) = B(\eta) \quad (\eta_1 < \eta < \eta^*).$$

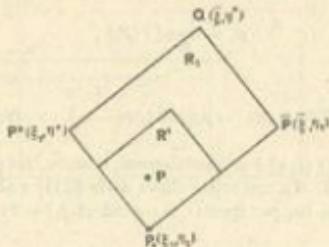


Fig. 2.5

Si ha

$$A(\xi_1) = B(\eta_1) = 0, \quad A(\xi) > 0, \quad B(\eta) > 0$$

ed inoltre

$$(2.10) \quad \zeta(\xi, \eta) = A(\xi) + B(\eta) - \int_{\xi_1}^{\xi} dx \int_{\eta_1}^{\eta} f(x, \beta) d\beta.$$

Si possono presentare le seguenti circostanze: 1) e 2).

1) *Esiste un rettangolo  $R' \subseteq R_1$  tale che sia*

$$(2.11) \quad \zeta(\xi, \eta) > 0 \quad \forall P \in R'.$$

Per la legge (II) di estensione (cfr. la nota (5)), si pone allora

$$(2.12) \quad j(\xi, \eta) = \zeta(\xi, \eta) \quad \text{in tutto } R'.$$

2) *Un tale rettangolo  $R'$  non esiste. In questo caso è  $\zeta(P) < 0$  in un aperto  $\Omega \subset R_1$ , e  $P_1 \in \partial\Omega$ : la legge (II) non è dunque applicabile per effettuare il prolungamento di  $j(P)$  entro  $R'$ , a partire dai valori  $A(\xi)$  e  $B(\xi)$ .*

È chiaro, ad esempio, che questo avviene se

$$A(\xi) = 0, \quad B(\eta) = 0, \quad f(P_1) > 0.$$

Dimostriamo che la legge (II) è applicabile se risulta

$$(2.13) \quad A'(\xi_1) > 0 \quad o \quad B'(\eta_1) > 0$$

(ove  $A'(\xi_1)$  e  $B'(\eta_1)$  indicano le derivate destre, in  $\xi_1$  e in  $\eta_1$ , delle funzioni  $j(\xi, \eta_1)$  e  $j(\xi_1, \eta)$ : è ovvio che  $A'(\xi_1) > 0$ ,  $B'(\eta_1) > 0$ ).

Sia, ad esempio,  $0 < A'(\xi_1) < +\infty$ . Posto

$$\mu_1 = \max_{R_1} \{f(P)\},$$

segue dalla (2.10)

$$(2.14) \quad \zeta(\xi, \eta) > A(\xi) + B(\eta) - \mu_1(\xi - \xi_1)(\eta - \eta_1) \quad (\forall (\xi, \eta) \in R_1).$$

Se  $\mu_1 < 0$  (cioè se  $f(\xi, \eta)$  è di allontanamento, o neutra, nei punti di  $R_1$ ) risulta  $\zeta(\xi, \eta) > 0$  in tutto  $R_1$ . La tesi segue allora dalle (2.11) e (2.12).

Sia ora  $\mu_1 > 0$ . Si ha, per ipotesi, e poiché  $A(\xi_1) = 0$ :

$$A'(\xi_1) = \lim_{\xi \rightarrow \xi_1, \xi < \xi_1} \frac{A(\xi)}{\xi - \xi_1} = \varrho_1, \quad \text{con } 0 < \varrho_1 < +\infty.$$

Preso dunque ad arbitrio  $\varrho'$ , con  $0 < \varrho' < \varrho_1$ , esiste  $\xi' \in \xi_1^{-\varrho'} \xi$  tale che sia

$$(2.15) \quad A(\xi) > \varrho'(\xi - \xi_1) \quad \forall \xi \in \xi_1^{-\varrho'} \xi'.$$

Dalle (2.14) e (2.15) segue

$$\zeta(\xi, \eta) > (\xi - \xi_1)(\varrho' - \mu_1(\eta - \eta_1)),$$

sicché  $\zeta(\xi, \eta) > 0$  nel rettangolo  $R' = \xi_1^{-\varrho'} \xi' \times \eta_1^{-\varrho'} \eta'$ , con  $\eta' = \min\{\eta^*, \varrho'/\mu_1\}$ . Anche in questo caso la legge (II) è dunque applicabile.

Perchè questo *non avvenga*, deve pertanto essere  $A'(\xi_1) = B'(\eta_1) = 0$ .

### 3. - IL PROBLEMA $II^*$ ; LEGGI DI ESTENSIONE E DOMINI DI APPOGGIO

a) Il prolungamento della soluzione  $\gamma(P)$ , a partire da un punto  $P_1$  con  $\gamma(P_1) = 0$ , è legato alla soluzione del seguente problema di frontiera libera e unilaterale, che diremo  $II^*$ , relativo all'equazione

$$(3.1) \quad \zeta_{\eta} = f(\xi, \eta).$$

Sia  $R = 0^{+a} I \times 0^{+b} I = OMNQ$  un rettangolo caratteristico nel piano  $(\xi, \eta)$  e consideriamo ivi l'equazione (3.1), con  $f \in C^0(R)$ .

Il problema  $II^*$  si formula nel modo seguente.

*Determinare un rettangolo*

$$R' = 0^{+a} I' \times 0^{+b'} I' \subset R$$

ed una linea  $\Gamma$ , di equazione

$$(3.2) \quad \eta = \psi(\xi) \quad (\xi = \varphi(\eta); \psi(0) = \varphi(0) = 0)$$

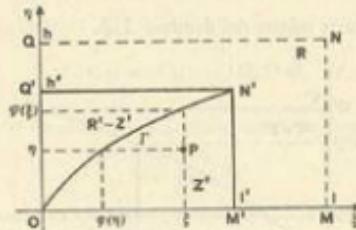


Fig. 3.1

con  $\psi(\xi)$  (e quindi  $\varphi(\eta)$ ) continua e  $\uparrow$  in  $0^{+a} I'$  (in  $0^{+b'} I'$ ), in modo che la (3.1) am-

metta, nel dominio:

$$(3.3) \quad Z = \{0 < \xi < \bar{\xi}, 0 < \eta < \psi(\xi)\},$$

un integrale  $\zeta(\xi, \eta) \in C^1(Z')$  soddisfacente alle condizioni

$$(3.4) \quad \zeta(\xi, 0) = A(\xi), \quad \zeta(\xi, \psi(\xi)) = 0, \quad \zeta_\xi(\xi, \psi(\xi)) = 0,$$

$$(3.5) \quad \zeta(P) > 0 \quad \forall P \in Z'.$$

Nella prima delle (3.4) si fanno, sulla funzione assegnata  $A(\xi)$ , le seguenti ipotesi:

$$(3.6) \quad A(\xi) \in C^1(0^{**}I), \quad A(0) = A'(0) = 0, \quad A(\xi) > 0.$$

Dimostriamo una condizione necessaria per l'esistenza di una soluzione: se il problema II\* ammette una soluzione, la traccia di  $f(P)$  in  $\Gamma$  è non negativa, si ha cioè

$$(3.7) \quad f(\xi_0, \psi(\xi_0)) > 0 \quad \forall \xi_0 \in 0^{**}I'.$$

Osserviamo anzitutto che l'integrale  $\zeta(\xi, \eta)$  soddisfacente alla seconda e alla terza delle (3.4) si calcola, come soluzione di un problema di Cauchy (fig. 3.2), mediante la formula:

$$(3.8) \quad \zeta(\xi, \eta) = \int_{T_{2\eta}} f(x, \beta) dx d\beta = \int_{\eta}^{\xi} \int_{\eta}^{\psi(\beta)} f(x, \beta) dx d\beta = \int_{\eta}^{\xi} \int_{\eta}^{\psi(\beta)} f(x, \beta) dx.$$

Per la (3.5), deve dunque avversi

$$(3.9) \quad \frac{1}{m(T_{2\eta})} \int_{T_{2\eta}} f(x, \beta) dx d\beta > 0 \quad \forall P \in Z'$$

(ove  $m(T_{2\eta})$  designa la misura del dominio  $T_{2\eta}$ ).

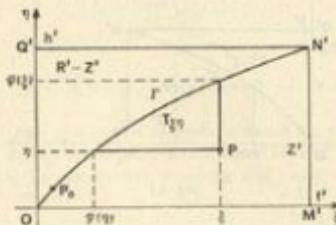


Fig. 3.2

Preso ad arbitrio  $P_0 \in \Gamma$  e  $P > P_0$ , la (3.7) segue dalla (3.9), per  $P \rightarrow P_0^+$ . L'appartenenza di  $\zeta(\xi, \eta)$  a  $C^1(Z)$  segue immediatamente dalla (3.8): si ha

$$(3.10) \quad \zeta_\xi(\xi, \eta) = \int\limits_{\eta}^{\psi(\xi)} f(\xi, \beta) d\beta ,$$

$$(3.11) \quad \zeta_\eta(\xi, \eta) = - \int\limits_{\psi(\xi)}^{\xi} f(x, \eta) dx .$$

Imponiamo ora alla funzione  $\zeta(\xi, \eta)$  definita dalla (3.8) di soddisfare alla prima delle (3.4). La funzione  $\gamma(\xi)$  deve dunque soddisfare all'identità

$$(3.12) \quad A(\xi) = \int\limits_0^{\xi} \int\limits_0^{\psi(x)} f(x, \beta) d\beta .$$

Segue di qui

$$(3.13) \quad A'(\xi) = \int\limits_0^{\psi(\xi)} f(\xi, \beta) d\beta .$$

Poiché  $A(0) = 0$ , la (3.12) è equivalente alla (3.13).

La (3.13) si ottiene anche calcolando  $\zeta(\xi, \eta)$  come soluzione del problema di Goursat definito dalle prime due delle (3.4). Si ha

$$(3.14) \quad \zeta(\xi, \eta) = A(\xi) - A(\eta(\eta)) - \int\limits_{\eta(\eta)}^{\xi} \int\limits_0^{\eta} f(x, \beta) d\beta .$$

e quindi

$$(3.15) \quad \zeta_\xi(\xi, \eta) = A'(\xi) - \int\limits_0^{\eta} f(\xi, \beta) d\beta \quad (0 < \eta < \psi(\xi)) .$$

Se imponiamo a  $\zeta(\xi, \eta)$  di soddisfare alla terza delle (3.4), otteniamo la (3.13).

Posto dunque, in tutto  $R$ ,

$$(3.16) \quad G(\xi, \eta) = A'(\xi) - \int\limits_0^{\eta} f(\xi, \beta) d\beta ,$$

si conchiude che le funzioni  $\gamma(\xi)$  e  $\eta(\eta)$  sono definite implicitamente dall'equazione

$$(3.17) \quad G(\xi, \eta) = 0 ,$$

risolvolendo rispettivamente rispetto a  $\eta$  ( $\Rightarrow \eta = \gamma(\xi)$ ) o rispetto a  $\xi$  ( $\Rightarrow \xi = \eta(\eta)$ ); in questo caso è soddisfatta l'identità

$$(3.18) \quad A'(\eta(\eta)) = \int\limits_0^{\eta} f(\eta(\eta), \beta) d\beta \quad (0 < \eta < b') .$$

Naturalmente, se la (3.17) ha una soluzione  $\eta = \psi(\xi)$ ,  $\uparrow$ , il problema  $II^*$  avrà soluzioni se, e soltanto se, risulta (per la (3.9)):

$$(3.19) \quad \int_{\eta_0}^{\xi} \int_0^{\eta} f(x, \beta) d\beta > 0 \quad \forall (\xi, \eta) \in Z'.$$

E chiaro che questo avviene (in particolare) se  $f(\xi, \eta) > 0$  in tutte  $R$ .  
E importante infine osservare che, detta

$$\tilde{\zeta}(\xi, \eta) = A(\xi) + B(\eta) - \int_0^{\xi} \int_0^{\eta} f(x, \beta) d\beta$$

la soluzione del problema libero di Darboux, con il dato  $A(\xi)$ , e con  $B(\eta)$  arbitrario, si ha

$$\tilde{\zeta}_d(\xi, \eta) = A'(\xi) - \int_0^{\xi} f(\xi, \beta) d\beta$$

e quindi, per la (3.17), la linea  $\Gamma$ , di appoggio, ha equazione

$$(3.20) \quad \tilde{\zeta}_d(\xi, \eta) = 0.$$

Se  $\xi = \psi(\eta)$  è soluzione della (3.20), si ha, per la (3.14),

$$(3.21) \quad \zeta(\xi, \eta) = \tilde{\zeta}(\xi, \eta) - \tilde{\zeta}(\psi(\eta), \eta) = \int_{\psi(\eta)}^{\eta} \tilde{\zeta}_d(x, \eta) dx.$$

Consideriamo, ad esempio, il caso della corda pesante ( $f=1$ ). La (3.17) si scrive allora

$$\eta = A'(\xi).$$

Il problema  $II^*$  ha dunque una e una sola soluzione:

$$\eta = \psi(\xi) = A'(\xi),$$

se, e soltanto se (cfr. con la 1<sup>a</sup>) del § 2):

$$A(\xi) \in C^1((0, l)), \quad A(0) = A'(0) = 0, \quad A'(\xi) \uparrow.$$

In questo caso è  $l'=l$ .

b) Quanto precede si ripete ovviamente se facciamo riferimento all'asse  $\eta$  anziché all'asse  $\xi$ , assegnando il valore

$$(3.22) \quad \zeta(0, \eta) = B(\eta) \in C^1((0, l)), \text{ con } B(0) = B'(0) = 0, \quad B(\eta) > 0.$$

Si deve allora risolvere l'equazione

$$(3.23) \quad G^*(\xi, \eta) := B'(\eta) - \int_0^\xi f(x, \eta) dx = 0.$$

In particolare, se  $f \equiv 1$ , il problema  $\Pi^*$  ha soluzioni,  $\xi = B'(\eta)$ , se, e soltanto se:

$$(3.24) \quad B(\eta) \in C^1(0^+ b), \quad B(0) = B'(0) = 0, \quad B'(\eta) > 0.$$

Varie condizioni sufficienti perché il problema  $\Pi^*$  abbia soluzione unica verranno date nel § 5.

c) Enunceremo, in questo punto c), le leggi di esistenza collegate al problema  $\Pi^*$ , in relazione ai dati  $A(\xi) = \tau(\xi, 0)$  e  $B(\eta) = \tau(0, \eta)$  assegnati sui lati  $OM$  e  $OQ$  del rettangolo  $R$ .

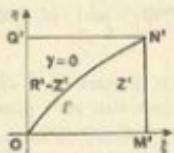


Fig. 3.3a

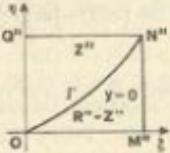


Fig. 3.3b

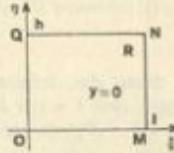


Fig. 3.3c

c) Siano dati i valori della soluzione  $y(\xi, \eta)$  sui lati  $OM$  e  $OQ$  del rettangolo  $R$ : sia precisamente

$$(3.25) \quad y(\xi, 0) = A(\xi) > 0, \quad y(0, \eta) = B(\eta) = 0,$$

e supponiamo che il problema  $\Pi^*$ , enunciato in a) con la condizione

$$(3.26) \quad \tau(\xi, 0) = y(\xi, 0) = A(\xi),$$

abbia una e una sola soluzione,  $\tau(\xi, \eta)$ .

Sia inoltre

$$(3.27) \quad f(\xi, \eta) > 0$$

nell'aperto  $(R' - Z')^o$ .

Si prolunga allora la definizione di  $y(\xi, \eta)$  a tutto  $R'$  ponendo

$$(3.28) \quad y(\xi, \eta) = \begin{cases} \tau(\xi, \eta) & \text{in } Z', \\ 0 & \text{in } R' - Z'. \end{cases}$$

È chiaro che la funzione  $y(\xi, \eta)$ , così definita, è  $C^1(R')$  ed è soluzione, in  $\hat{R}'$ , dell'equazione

$$(3.29) \quad y_{\eta} = -f'(\xi, \eta), \quad \text{con } f'(\xi, \eta) = \begin{cases} f(\xi, \eta) & \text{in } Z', \\ 0 & \text{in } (R' - Z'). \end{cases}$$

Risulta dunque, per la (2.3),  $J = f(\xi, \eta) > 0$  in  $(R' - Z')^{\circ}$ . Perciò l'origine è un punto di appoggio, o di *verti-appoggio*.

La legge (II) di prolungamento, con i dati (3.25), non è applicabile. Detta infatti  $w(\xi, \eta)$  la soluzione del problema libero con tali dati, si ha, per  $\eta > v(\xi)$  (tenuto conto della (3.12)):

$$(3.30) \quad w(\xi, \eta) = A(\xi) - \int_0^1 dx \int_0^1 f(x, \beta) d\beta = \\ = \left( A(\xi) - \int_0^1 dx \int_0^{v(x)} f(x, \beta) d\beta \right) - \int_0^1 dx \int_{v(x)}^1 f(x, \beta) d\beta < 0.$$

È chiaro che, definita  $y(\xi, \eta)$  con la (3.28), tutti i punti di  $\hat{R}'$  sono di appoggio, cioè  $\hat{R}'$  è una linea di appoggio. Lo stesso può dirsi per i punti dell'aperto  $(R' - Z')^{\circ}$  (la cui chiusura è perciò un dominio di appoggio).

Quanto precede si estende in modo ovvio, scambiando  $\xi$  con  $\eta$ , nell'ipotesi che sia

$$(3.31) \quad y(\xi, 0) = A(\xi) = 0, \quad y(0, \eta) = B(\eta) > 0.$$

*c<sub>2</sub>) Supponiamo che sia, nei lati OM e OQ,*

$$(3.32) \quad y(\xi, 0) = A(\xi) = 0, \quad y(0, \eta) = B(\eta) = 0$$

e inoltre

$$(3.33) \quad f(\xi, \eta) > 0 \quad \text{in tutto } \hat{R}'.$$

*Si pone allora*

$$(3.34) \quad y(\xi, \eta) = 0 \quad \text{in tutto } \hat{R}'.$$

In questo caso il problema II\* non interviene.

*c<sub>3</sub>) Supponiamo che sia*

$$(3.35) \quad y(\xi, 0) = A(\xi) > 0, \quad y(0, \eta) = B(\eta) > 0.$$

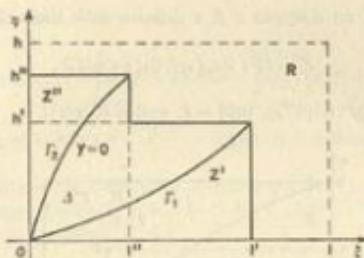


Fig. 3.4

Diciamo  $\Pi_1^*$  e  $\Pi_2^*$  i problemi  $\Pi^*$  relativi ai dati  $A(\xi)$  e  $B(\eta)$  separatamente e supponiamo che entrambi abbiano una e una sola soluzione:  $\tau_1(\xi, \eta)$  e  $\tau_2(\xi, \eta)$ . Siano  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$  le corrispondenti linee di appoggio, di equazioni rispettive

$$(3.36) \quad \begin{cases} \eta = \varphi_1(\xi) & (0 < \xi < l') \\ \eta = \varphi_2(\xi) & (0 < \xi < l'') \end{cases}$$

supponendo, ad esempio,  $l' > l''$ ,  $h' < h''$ .

Anmettiamo inoltre che sia

$$(3.37) \quad \varphi_1(\xi) < \varphi_2(\xi), \quad \forall \xi \in 0^+ l'' ,$$

e inoltre

$$(3.38) \quad f(\xi, \eta) > 0$$

nell'aperto  $\tilde{\Lambda} = ((R' \cup R'') - (Z' \cup Z''))^o$ .

Si definisce allora il prolungamento di  $\gamma(\xi, \eta)$  a tutto  $R' \cup R''$  ponendo

$$(3.39) \quad \gamma(\xi, \eta) = \begin{cases} \tau_1(\xi, \eta) & \text{in } Z' \\ \tau_2(\xi, \eta) & \text{in } Z'' \\ 0 & \text{in } \tilde{\Lambda} \end{cases}$$

Perciò  $\gamma(\xi, \eta) \in C^1(R' \cup R'')$  ed è, in tutto  $(R' \cup R'')^o$ , un integrale dell'equazione

$$(3.40) \quad \gamma_{\eta} = f(\xi, \eta), \quad \text{con } f(\xi, \eta) = \begin{cases} f(\xi, \eta) & \text{in } Z' \cup Z'' \\ 0 & \text{in } \tilde{\Lambda} \end{cases}$$

e si riconosce, come in (1), che l'origine è un punto di appoggio, o di urto-appoggio (si ha  $x(P) < 0$  e  $f = f(\xi, \eta) > 0$  in  $\tilde{\Lambda}$ ).

c) Sia  $Z'$  un dominio  $\subset R$  e definito dalle limitazioni

$$Z' = \{P: 0 < \xi < l, 0 < \eta < \psi(\xi)\},$$

con  $\psi(\xi) \in C_0(0^+ l) \cap C^1(0^- l)$ ,  $\psi(0) = b$ ,  $\psi(l) = 0$ ,  $\psi'(\xi) <$

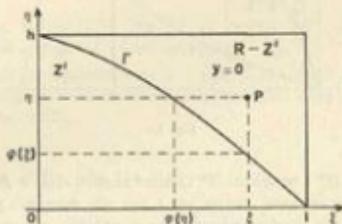


Fig. 3.5

La linea  $\Gamma$ ,  $\eta = \psi(\xi)$ , ha dunque orientamento nello spazio.

Sia ora  $\gamma(\xi, \eta) \in C^1(Z')$ ,  $> 0$  in  $Z'$ , e tale che:

$$(3.41) \quad \gamma_{t\eta} = -f(\xi, \eta) \quad \text{in } \tilde{Z}', \quad \gamma|_F = 0 \quad \text{e} \quad \gamma_t|_F = 0 \quad (\Rightarrow \gamma_t|_F = 0).$$

Supponiamo inoltre che sia

$$(3.42) \quad f(\xi, \eta) > 0 \quad \text{in } (R - Z')^o.$$

Si definisce allora il prolungamento di  $\gamma(\xi, \eta)$ , da  $Z'$  a  $R - Z'$ , ponendo

$$(3.43) \quad \gamma(\xi, \eta) = 0 \quad \text{in tutto } R - Z'.$$

Perciò  $\gamma(\xi, \eta) \in C^1(R)$  e soddisfa all'equazione

$$\gamma_{t\eta} = f'(\xi, \eta), \quad \text{con } f'(\xi, \eta) = \begin{cases} f(\xi, \eta) & \text{in } Z', \\ 0 & \text{in } R - Z'. \end{cases}$$

Si ha dunque  $J = f(\xi, \eta)$  in  $(R - Z')^o$ : ogni punto di  $\tilde{\Gamma}$  o di  $(R - Z')^o$  è di appoggio.

Osserviamo che la soluzione  $\zeta(\xi, \eta)$  del problema libero di Cauchy, per la equazione  $\zeta_{t\eta} = -f(\xi, \eta)$ , con i dati

$$\zeta|_F = 0, \quad \zeta_t|_F = 0 \quad (\Rightarrow \zeta_t|_F = 0),$$

è data, in tutto  $R$ , dalla formula

$$(3.44) \quad \pi(\xi, \eta) = - \int_{\gamma(\xi)}^{\xi} dx \int_{\eta(x)}^{\eta} f(x, \beta) d\beta = - \int_{\xi}^{\eta(\xi)} dx \int_{\eta(x)}^{\eta} f(x, \beta) d\beta.$$

È dunque  $\pi(\xi, \eta) < 0$  in  $(R - Z')^\circ$ : la legge (I) di prolungamento non è applicabile.

Importa segnalare una condizione *necessaria* perché  $\Gamma$ , con *orientamento di spazio, sia di appoggio* (essendo valide le (3.41) e (3.42)). Occorre, per questo, che sia (cfr. con la proprietà 3, § 1):

$$(3.45) \quad f(\xi, \eta)|_{\Gamma} = 0.$$

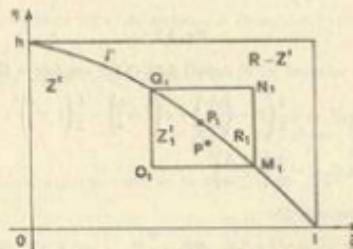


Fig. 3.6

Sia infatti  $P_1(\xi_1, \eta_1) \in \Gamma$ . Si ha, per la (3.42),  $f(P_1) > 0$ . Non può però essere  $f(P_1) > 0$ . In tal caso è infatti  $f(P) > 0$  su tutto un arco

$$\Gamma_1 = Q_1 M_1 \subset \Gamma$$

e su tutto il corrispondente rettangolo caratteristico  $R_1 = O_1 M_1 N_1 Q_1$ . È allora, per la (3.44),

$$\pi(\xi, \eta) < 0 \quad \forall P \in \Gamma_1,$$

cioè che è assurdo, poiché, per le (3.41), è  $\pi(\xi, \eta) = \gamma(\xi, \eta)$  in tutto  $Z'$ , ed è  $\gamma(\xi, \eta) > 0$  in  $Z'$ .

In particolare, nel caso della *corda pesante* ( $f = 1$ ) non esistono *linee di appoggio con orientamento di spazio*.

*Esepl. - 1)* Sia  $f(\xi, \eta) = 1$ . Poniamo (con riferimento a  $r_b$ ):

$$(3.46) \quad A(\xi) = \frac{k}{2} \xi^2, \quad B(\eta) = \frac{m}{2} \eta^2,$$

con  $k > 0$ ,  $m > 0$ ,  $km < 1$ .

Allora  $P_1$  e  $P_2$  hanno equazioni:

$$\eta = A(\tilde{z}) = k\tilde{z}, \quad \tilde{z} = B(\eta) = m\eta$$

ed è  $\tilde{z}/\eta > k/m$  perché  $k/m < 1$ .

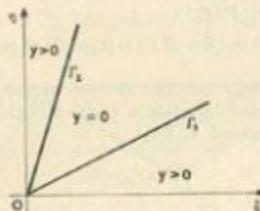


Fig. 3.7

Abbiamo dunque la soluzione  $y(z, \eta)$  definita dalla (3.39), ove (per la (3.14)):

$$\begin{aligned} z_0(z, \eta) &= \frac{k}{2} \left( z^2 - \left( \frac{\eta}{k} \right)^2 \right) - \eta \left( z - \frac{\eta}{k} \right) = \frac{k}{2} \left( z - \frac{\eta}{k} \right)^2, \\ z_0(z, \eta) &= \frac{m}{2} \left( \eta - \frac{z}{m} \right)^2. \end{aligned}$$

2) Sia (con riferimento a  $r_p$ ):

$$f(z, \eta) = z - \eta = \sqrt{2}x, \quad A(z) = \frac{k}{6}z^3 \quad \text{con } k > 0, \quad B(\eta) = 0.$$

Per trovare  $P_1$  dobbiamo risolvere l'equazione

$$\frac{k}{2}z^2 = \int_{\eta}^{\eta} (\tilde{z} - \beta) d\beta = \tilde{z}\eta - \frac{\eta^2}{2}.$$

Sì ha dunque

$$(3.47) \quad \eta = \tilde{z} \pm \sqrt{\tilde{z}^2 - k^2} = \tilde{z}(1 \pm \sqrt{1 - k}).$$

Se supponiamo  $0 < k < 1$ , la retta  $P_1$  esiste ed è la retta di equazione

$$\eta = \tilde{z}(1 - \sqrt{1 - k})$$

(poichè sulla retta  $\eta = \tilde{z}(1 + \sqrt{1 - k})$  sarebbe  $f < 0$ , contro la (3.7)).

Per trovare  $P_2$  dobbiamo risolvere l'equazione

$$0 = \int_{\eta}^{\eta} (z - \eta) dz = \frac{z^2}{2} - \tilde{z}\eta,$$

Perciò  $P_2$  ha equazione

$$\eta = \frac{\tilde{z}}{2}$$

e quindi esiste il dominio di appoggio se  $\frac{1}{2} > 1 - \sqrt{1 - k}$ , cioè  $0 < k < \frac{1}{2}$ .

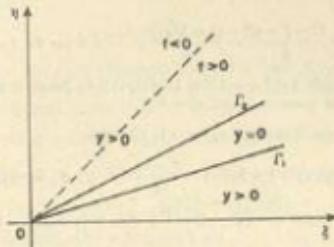


Fig. 3.8

Sia ora  $k > \frac{1}{2}$ . La soluzione  $\zeta(\xi, \eta)$  del problema di Darboux non vincolato è

$$\begin{aligned} \zeta(\xi, \eta) = \frac{k}{6} \xi^3 - \int_0^{\xi} dx \int_0^x (\xi - \beta) d\beta = \frac{k}{6} \xi^3 - \frac{\xi^4 \eta}{2} + \frac{\xi \eta^3}{2} = \\ = \frac{\xi}{2} \left( \frac{k}{3} \xi^2 - \xi \eta + \eta^3 \right) = \frac{\xi}{2} \left[ \left( \eta - \frac{\xi}{2} \right)^2 + \left( \frac{k}{3} - \frac{1}{4} \right) \xi^2 \right]. \end{aligned}$$

Si ha dunque  $\zeta(\xi, \eta) > 0$ ,  $\Rightarrow \gamma(\xi, \eta) = \zeta(\xi, \eta)$ . Se  $k < \frac{1}{2}$ , risulta invece

$$\zeta\left(\xi, \frac{\xi}{2}\right) = -\left(\frac{1}{4} - \frac{k}{3}\right) \frac{\xi^3}{2} < 0.$$

3) Sia (con riferimento a  $\epsilon_0$ ), nel quadrato  $0^{k+1} \times 0^{k+1}$ ):

$$(3.48) \quad f(\xi, \eta) = \xi + \eta - 1 - \sqrt{2} \xi - 1$$

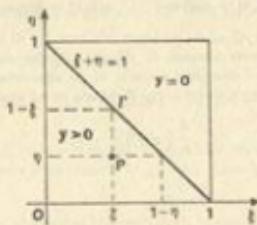


Fig. 3.9

e consideriamo, nel triangolo  $\xi + \eta < 1$ , l'integrale  $y(\xi, \eta)$  dell'equazione  $\eta \xi = 1 - \xi - \eta$  corrispondente ai dati di Cauchy

$$y|_{\Gamma} = 0, \quad y|_{\Gamma'} = 0,$$

ove  $\Gamma'$  è la diagonale, di equazione  $\xi + \eta = 1$ .

Si ha la soluzione:

$$y(\xi, \eta) = \frac{(1-\xi-\eta)^2}{6} - \frac{(1-\sqrt{2}\xi)^2}{6} > 0 \text{ per } 0 < \xi + \eta < 1.$$

Nel triangolo sul quale  $1 < \xi + \eta < 2$  si ha  $f(\xi, \eta) > 0$ . Perciò il prolungamento di  $y$  allo stesso triangolo si ottiene ponendo ivi  $y(\xi, \eta) = 0$ .

4) Consideriamo, per l'equazione  $\tau z_0 = -1$ , l'integrale

$$\tau(\xi, \eta) = 1 - \xi\eta = 1 - \frac{\xi^2 - \eta^2}{2} \quad (\xi > 0, \eta \in \mathbb{R}),$$

corrispondente ai valori iniziali  $\xi = \tau(\xi, -\xi) = 1 + \xi^2/2 > 0$ , e  $z_0(\xi, -\xi) = 0$ .

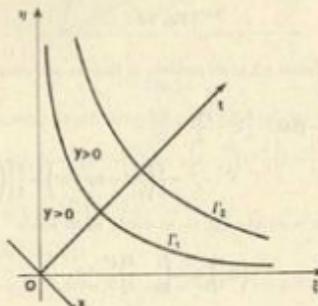


Fig. 3.10

Si ha  $z(\xi, \eta) > 1$  per  $0 < \xi < |\eta|$ : sulle semianumeristiche  $(\xi > 0, \eta = 0)$  e  $(\xi = 0, \eta > 0)$  risulta (3.49)  $z(\xi, 0) = A(\xi) = 1, \quad z(0, \eta) = B(\eta) = 1$ .

Calcoliamo ora la soluzione  $y(\xi, \eta)$  del problema con ostacolo. Si ha ovviamente  $y(\xi, \eta) = z(\xi, \eta)$  per  $0 < \xi < |\eta|$ : dobbiamo perciò calcolare la  $y(\xi, \eta)$ , a partire dai dati (3.49), nel quadrante  $(\xi > 0) \times (\eta > 0)$ . Il problema si riconduce a quello di un'equazione ordinaria, cercando integrali della forma  $z(\xi, \eta) = z(\xi\eta) = z(r)$ , con  $r = \xi\eta$ . Si ottiene in tal modo, per  $z(r)$ , l'equazione

$$(3.50) \quad \frac{d}{dr}(rz'(r)) = -1.$$

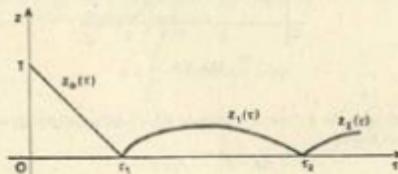


Fig. 3.11

che ha l'integrale generale

$$(3.51) \quad \zeta = C_1 \log r + C_2 - r.$$

Sia  $\{\tau_n\}$ , con  $0 < \tau_1 < \tau_2 < \dots$ , la successione dei punti di urto. È  $\tau_1 = 1$  poiché fino all'iperbole equilatera  $I'_1(\beta_1 = 1)$  risulta  $\gamma(r) = 1 - \beta_1 = 1 - r > 0$ . Si ha dunque  $\gamma(\bar{r}, \eta) = 1 - \beta_1 = 1 - r$ , per  $0 < r < 1$ . Si pose insomma

$$\gamma(\bar{r}, \eta) = \zeta_n(r) \quad (r_n < r < r_{n+1}; \zeta_n(r) = 1 - r)$$

ove  $\zeta_n(r)$  è l'integrale della (3.50) accordato a  $\zeta_{n-1}(r)$  dalle condizioni di *ribalta elastica*:

$$(3.52) \quad \zeta_n(r_n) = 0, \quad \zeta'_n(r_n^+) = -\zeta'_{n-1}(r_n^-).$$

In particolare, per la (3.51),  $\zeta_1(r) = 2 \log r + 1 - r$ .

*Diametralmente più t*

$$(3.53) \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \tau_n = +\infty.$$

In questo caso dunque la reazione dell'ostacolo si effetta su una successione di linee di urto  $I'_n$  (iperboli equilateri,  $\beta_1 = \tau_n$ ): non si presenta il fenomeno dell'appoggio.

Si ha dalla (3.50), integrando tra  $r_n$  e  $r_{n+1}$ ,

$$r_{n+1} \zeta'_n(r_{n+1}) - r_n \zeta'_n(r_n) = -(r_{n+1} - r_n),$$

cioè, per la (3.52),

$$(3.54) \quad r_{n+1} - r_n = r_{n+1} \zeta'_{n+1}(r_{n+1}) + r_n \zeta'_n(r_n) \quad (n \geq 1)$$

e quindi (essendo  $\tau_1 = \tau_1 \zeta'_1(r_1) = 1$ )

$$(3.55) \quad r_{n+1} = r_{n+1} \zeta'_{n+1}(r_{n+1}) + 2 \sum_{k=1}^n r_k \zeta'_k(r_k).$$

Si ha poi, ancora per la (3.50),

$$r \zeta'(r) \frac{d}{dr} (r \zeta'(r)) = -r \zeta'(r)$$

cioè

$$\frac{d}{dr} (r \zeta'(r))^2 = -2r \zeta'(r) = -2 \frac{d}{dr} (r \zeta'(r)) + 2\zeta(r).$$

Ne segue, integrando tra  $r_n$  e  $r_{n+1}$ :

$$r_{n+1}^2 \zeta'^2(r_{n+1}) - r_n^2 \zeta'^2(r_n) = 2 \int_{r_n}^{r_{n+1}} \zeta'(r) dr, \quad > 0.$$

Perciò la successione  $\{\tau_n \zeta'_n(r_n)\}$  è crescente. Dalla (3.55) segue allora la (3.53). Osserviamo inoltre che, per la (3.54), anche la successione  $\{r_{n+1} - r_n\}$  è crescente: poiché  $\tau_1 \zeta'_1(r_1) = 1$ , risulta  $r_{n+1} > 2\pi + L$ .

**OSSERVAZIONE I:** Le leggi di estensione formulate in 1), in base all'*ipotesi dell'appoggio*, consentono di evitare noti controesempi all'unicità nel caso  $f(P) > 0$ .

**OSSERVAZIONE II:** La tesi delle (3.4) è manifestamente necessaria per l'esistenza di un dominio di appoggio  $\mathcal{A}$  (fig. 3.3a, con  $\mathcal{A} = (R' - Z') \cup I'$ ), se si richiede che  $y \in C^1(R')$ .

Questo riporta nella seguente proprietà del *teorema del problema unilaterale*:

*Siano  $y(\bar{r}, \eta)$  un integrale della (1.6) e  $I'$  un t-urto tali che:*

$$(3.56) \quad y \in C^1(R'), \quad y|_{\mathcal{A}} \geq 0, \quad y|_{I'} = 0, \quad f \geq 0.$$

*E allora necessariamente:*

$$(3.57) \quad y_2|_{\delta'} = 0, \quad y_2'|_{\delta'} = 0.$$

Sia infatti  $\eta \in 0^{\text{out}} \delta'$ ,  $\xi > \varphi(\eta)$ . Segue dalla (1.6), poiché  $f > 0$ :

$$(3.58) \quad y(\xi, \varphi(\xi)) - y(\xi, \eta) - y(\varphi(\eta), \varphi(\xi)) + y(\varphi(\eta), \eta) >$$

$$> - \int_{\varphi(\eta)}^{\xi} dx \int f(x, \beta) d\beta > - M'(\xi - \varphi(\eta))(\varphi(\xi) - \eta),$$

ove

$$M' = \max_{x'} (f(x, \eta)).$$

Si ha, per la seconda e la terza delle (3.56),

$$y(\xi, \eta) > 0, \quad y(\varphi(\eta), \varphi(\xi)) > 0, \quad y(\xi, \varphi(\xi)) - y(\varphi(\eta), \eta) = 0,$$

e quindi, per la (3.58):

$$0 < \frac{y(\xi, \eta) - y(\varphi(\eta), \eta)}{\xi - \varphi(\eta)} < M'(\varphi(\xi) - \eta), \Rightarrow y_2^+(\varphi(\eta), \eta) = 0,$$

$$0 < \frac{y(\varphi(\eta), \varphi(\xi)) - y(\xi, \varphi(\xi))}{\xi - \varphi(\eta)} < M'(\varphi(\xi) - \eta), \Rightarrow y_2^-(\xi, \varphi(\xi)) = 0.$$

Le (3.57) sono dunque vere.

In particolare (con riferimento alla fig. 1.1e, supponendo  $y|_{\delta_1} = 0$ ) non può essere  $y_2(b_1, t) > 0$  nel punto di distacco  $(b_1, t)$ , né  $y_2(a_1, t) < 0$ . Si debbono dunque parer le (3.3).

#### 4. - PROLUNGAMENTO OLTRE UN ARCO DI URTO

a) Sia  $\Gamma'$  un arco di urto, di equazione

$$(4.1) \quad \xi = \varphi(\eta) \quad (\Leftrightarrow \eta = \varphi(\xi))$$

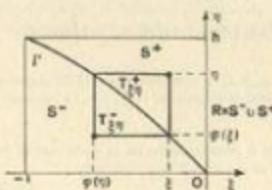


Fig. 4.1

con  $\varphi(\eta) \in C^0(0^{\text{out}} \delta) \cap C^1(0^{\text{out}} \delta)$ ,  $\varphi'(\eta) < 0$  in  $0^{\text{out}} \delta$  ( $\Leftrightarrow \eta = \varphi(\xi) \in C^0(-I^{\text{out}} 0) \cap C^1(-I^{\text{out}} 0)$ ,  $\eta'(\xi) < 0$  in  $-I^{\text{out}} 0$ ).

Posto  $R = S^- \cup S^+$ , la funzione  $\gamma(\xi, \eta)$  sia, in  $S^+$ , un integrale  $\in C^1(S^+)$  dell'equazione

$$(4.2) \quad \gamma_{t_0} = -f(\xi, \eta), \quad f \in C^1(R).$$

Siano:  $\tau(\xi, \eta)$  l'integrale della (4.2)  $\in C^1(R)$  e coincidente in  $S^-$  con  $\gamma(\xi, \eta)$ ;  $\tau^+(\xi, \eta)$  il prolungamento di  $\tau(\xi, \eta)$ , da  $S^-$  a  $S^+$ , ottenuto come integrale della (4.2),  $\in C^1(S^+)$  e soddisfacente alle condizioni di Cauchy (arto elastico):

$$\tau^+|_F = \tau|_F = \gamma|_F = 0, \quad \tau_\eta^+|_F = -\tau_\eta|_F = -\gamma_\eta|_F.$$

La funzione  $\tau^+(\xi, \eta)$  si calcola immediatamente. Basta notare, per questo, che la funzione  $\pi(\xi, \eta) = \tau(\xi, \eta) + \tau^+(\xi, \eta)$  è un integrale dell'equazione  $\pi_{t_0} = -2f(\xi, \eta)$ ,  $\in C^1(S^+)$  e definito dalle condizioni di Cauchy

$$\pi|_F = 0, \quad \pi_\eta|_F = 0.$$

Si ha dunque

$$\pi(\xi, \eta) = -2 \int_{\tau_{t_0}}^{\xi} \int_{\eta}^{\beta} f(x, \beta) dx d\beta$$

cioè

$$(4.3) \quad \tau^+(\xi, \eta) = -\tau(\xi, \eta) - 2 \int_{\eta}^{\xi} \int_{\eta}^{\beta} f(x, \beta) dx d\beta \quad ((\xi, \eta) \in S^+).$$

Seguono di qui le seguenti formule (poiché  $\psi(\psi(\eta)) = \eta$ ):

$$(4.4) \quad \tau_{t_0}^+(\xi, \eta) = -\tau_{t_0}(\xi, \eta) - 2 \int_{\eta}^{\xi} \int_{\eta}^{\beta} f(\xi, \beta) d\beta,$$

$$(4.5) \quad \tau_\eta^+(\xi, \eta) = -\tau_\eta(\xi, \eta) - 2 \int_{\eta}^{\xi} \int_{\eta}^{\beta} f(x, \eta) dx.$$

Si ha inoltre, se  $\tau(\xi, \eta) \in C^2(S^+ - \{0\})$ :

$$(4.6) \quad \tau_{tt}^+(\xi, \eta) = -\tau_{tt}(\xi, \eta) + 2f(\xi, \psi(\xi))\psi'(\xi) - 2 \int_{\eta}^{\xi} f_{\xi}(\xi, \beta) d\beta,$$

$$(4.7) \quad \tau_{t\eta}^+(\xi, \eta) = -\tau_{t\eta}(\xi, \eta) - 2f(\xi, \eta) = -f(\xi, \eta),$$

$$(4.8) \quad \tau_{\eta\eta}^+(\xi, \eta) = -\tau_{\eta\eta}(\xi, \eta) + 2f(\psi(\eta), \eta)\psi'(\eta) - 2 \int_{\eta}^{\xi} f_\eta(x, \eta) dx.$$

Osserviamo anche (cfr. la fig. 4.1) che è

$$\tau(\xi, \eta) = -\tau(\psi(\eta), \psi(\xi)) - \left\{ \int_{\tau_{t_0}}^{\xi} \int_{\eta}^{\beta} f(x, \beta) dx d\beta + \int_{\tau_{t_0}}^{\xi} \int_{\eta}^{\beta} f(x, \beta) dx d\beta \right\}$$

e quindi dalla (4.3) segue:

$$(4.9) \quad \zeta^+(\xi, \eta) = \zeta(\varphi(\eta), \psi(\xi)) + \int_{T_{\xi\eta}^-} f(x, \beta) dx d\beta - \int_{T_{\xi\eta}^+} f(x, \beta) dx d\beta.$$

Se  $f(\xi, \eta) = 1$  e se  $\psi'(\xi) \neq 0$  (in particolare, se  $\psi'(\xi) < 0$ ), risulta  $m(T_{\xi\eta}^-) > m(T_{\xi\eta}^+)$  e quindi si puo'

$$(4.10) \quad \gamma(\xi, \eta) = \zeta^+(\xi, \eta) > \zeta(\varphi(\eta), \psi(\xi)) > 0 \quad \text{in tutto } S^+.$$

Se poi  $I'$  è un segmento ( $\psi'(\xi) = 0$ ), si ha

$$(4.11) \quad \gamma(\xi, \eta) = \zeta^+(\xi, \eta) = \zeta(\varphi(\eta), \psi(\xi)) > 0.$$

b) Dalle (4.4) e (4.5) segue una condizione sufficiente per prolungare la soluzione  $\gamma(\xi, \eta)$  mediante l'aggiunta

$$(4.12) \quad \gamma(\xi, \eta) = \zeta^+(\xi, \eta),$$

valida in un dominio  $S_0^+ = \{\varphi(\eta) < \xi < 0, 0 < \eta < b_0\}$ , con  $b_0 < b$ .

Basta, per questo, che sia

$$(4.13) \quad \zeta_d(0, 0) < 0, \quad \text{oppure} \quad \zeta_n(0, 0) < 0$$

cioè che l'origine sia un punto singolare per la linea  $I'$  (di equazione  $\zeta(\xi, \eta) = 0$ ).

Sia infatti, ad esempio,  $\zeta_n(0, 0) < 0$ . Segue allora dalla (4.5) (per  $\eta \rightarrow 0$ ) e con  $\varphi(\eta) < \xi < 0$

$$\zeta_n^*(0, 0) = \lim_{\eta \rightarrow 0} \zeta_n^*(\xi, \eta) = -\zeta_n(0, 0) > 0.$$

Esiste dunque  $b_0 \in 0^+ b$  tale che sia  $\zeta_n^*(\xi, \eta) > 0$  nel dominio  $S_0^+$  sopra definito. Preso ad arbitrio  $(\xi, \eta) \in S_0^+$ , è allora

$$\zeta^+(\xi, \eta) = \int_{\eta=0}^{\eta} \zeta_n(\xi, \beta) d\beta > 0$$

e ne segue la (4.12).

Poichè

$$\varphi'(\xi) = -(\zeta_d/\zeta_n)/\hat{r}, \quad \varphi'(\eta) = -(\zeta_n/\zeta_d)/\hat{r},$$

la seconda delle (4.13) implica che  $I'$  non sia tangente, nell'origine, all'asse  $\eta$ ; la prima, all'asse  $\xi$ .

*Supponiamo ora che l'origine sia un punto singolare per  $I'$ ; sia precisamente:*

$$(4.14) \quad \begin{cases} \zeta(\xi, \eta) \in C^2(R), & \zeta(0, 0) = \zeta_d(0, 0) = \zeta_n(0, 0) = 0, \\ \zeta_{d\eta}(0, 0) = \sigma > 0, & \zeta_{n\eta}(0, 0) = -f(0, 0) = -k, \quad \zeta_{n\eta}(0, 0) = -\hat{v} < 0. \end{cases}$$

In questo caso dimostreremo che è  $\zeta^*(\xi, \eta) > 0$ , in un conveniente dominio  $S^*$ , facendo uso di un classico teorema sulle funzioni implicite (si prelunge, a tale scopo,  $\zeta(\xi, \eta)$  a una funzione  $\tilde{\zeta}(\xi, \eta)$ , integrale della (4.2) in un più ampio rettangolo  $R_0 = \{-I < \xi < I, -\varepsilon < \eta < b\}$ , con  $\varepsilon > 0$ , imponendo, sui segmenti caratteristici  $\{\xi = 0, -\varepsilon < \eta < 0\}$  e  $\{\xi = 0, \varepsilon < \eta < 0\}$ , i valori:  $\tilde{\zeta}(\xi, 0) = a\xi^2/2$ ,  $\tilde{\zeta}(0, \eta) = -b\eta^2/2$ .

Poiché risulta

$$(4.15) \quad \tilde{\zeta}_{\xi\xi}(0, 0)\tilde{\zeta}_{\eta\eta}(0, 0) - \tilde{\zeta}_{\xi\eta}^2(0, 0) = -(ab + k^2) < 0,$$

l'origine è un punto *iperbolico* per la superficie  $\zeta = \tilde{\zeta}(\xi, \eta)$ . La corrispondente equazione di secondo grado:

$$(4.16) \quad -b\lambda^2 - 2k\lambda + a = 0$$

ha le radici di segno opposto:

$$\lambda_1 = -\frac{k + \sqrt{k^2 + ab}}{b} < 0, \quad \lambda_2 = -\frac{k - \sqrt{k^2 + ab}}{b} > 0.$$

Si ottiene così il coefficiente angolare, nell'origine, della linea  $J$ :

$$(4.17) \quad \psi'(0) = \lambda_1 = -\frac{k + \sqrt{k^2 + ab}}{b}.$$

Consideriamo ora la funzione  $\zeta^*(\xi, \eta)$  e prolunghiamone la definizione a  $S^-$ , mediante la (4.3) con  $(\xi, \eta) \in S^-$ : si ottiene ancora un integrale della (4.2),  $\in C^2(R)$ .

Si ha inoltre, per le (4.3), ..., (4.8), (4.14), ..., (4.17),

$$(4.18) \quad \begin{cases} \zeta^*(0, 0) = \zeta_{\xi\xi}^*(0, 0) = \zeta_{\eta\eta}^*(0, 0) = 0, \\ \zeta_{\xi\xi}^*(0, 0) = -a + 2k\psi'(0) = -b\psi'(0) = -a^* < 0, \quad \zeta_{\xi\eta}^*(0, 0) = -k, \\ \zeta_{\eta\eta}^*(0, 0) = b + 2k\psi'(0) = a\psi'(0) = b^* > 0. \end{cases}$$

Ne segue

$$\zeta_{\xi\xi}^*(0, 0)\zeta_{\eta\eta}^*(0, 0) - \zeta_{\xi\eta}^{*\prime}(0, 0) = -(a^*b^* + k^2) = -(ab + k^2) < 0$$

cioè anche in questo caso l'origine è un punto *iperbolico* per la superficie  $\zeta = \zeta^*(\xi, \eta)$ . La corrispondente equazione di secondo grado:

$$b^*\mu^2 - 2k\mu - a^* = 0$$

ha le radici *di segno opposto*:

$$\mu_1 = \frac{k - \sqrt{k^2 + a^+ b^+}}{b^+} < 0, \quad \mu_2 = \frac{k + \sqrt{k^2 + a^+ b^+}}{b^+} > 0$$

e si riconosce immediatamente che risulta (come è ovvio poiché  $\zeta \in \mathbb{Z}^+$  si annullano entrambe su  $\Gamma$ )

(4.19)

$$\mu_2 = \lambda_1.$$

Osserviamo ora che la funzione  $\zeta^*(\xi, \eta)$ , in un conveniente rettangolo  $R_0 = \{-l_0 < \xi < 0, 0 < \eta < \psi(l_0) = b_0\} \subseteq R$ , si annulla nei soli punti di  $\Gamma$ ; si ha poi, per le (4.18),  $\zeta^*(0, \eta) > 0$  in  $0^{+}b_0$ ,  $\zeta^*(\xi, 0) < 0$  in  $-l_0^{-}0$ . Si conclude che è  $\zeta^*(\xi, \eta) > 0$  nel dominio  $S'_0 = \{-l_0 < \xi < 0, \psi(\xi) < \eta < b_0\}$ .

*Esemp. - 1)* Consideriamo il rettangolo

$$R = \{-1 < \xi < 1, 0 < \eta < 1\} = R_0 \cup R_1,$$

con  $R_0 = -1^{+}0 \times 0^{+}1$ ,  $R_1 = 0^{-}1 \times 0^{+}1$ , ed assuniamo i dati:

$$(4.20) \quad \begin{cases} J(\xi, 0) = A(\xi) = \begin{cases} \xi^3 & \text{in } 0^{-}1, \\ \eta \xi^3 & \text{(con } \eta > 0\text{) in } 0^{+}1, \end{cases} \\ J(-1, \eta) = B(\eta) = 1 + \eta - 2\eta^2 & \text{in } 0^{+}1. \end{cases}$$

Sia poi  $f(\xi, \eta) = 1$ , consideriamo cioè l'equazione (1.6) con  $f = 1$ .

Nel rettangolo  $R_0$  l'equazione  $\tau_{00} = -1$ , con le condizioni:  $\tau(\xi, 0) = A(\xi)$ ,  $\tau(-1, \eta) = B(\eta)$ , ha l'integrale

$$\tau(\xi, \eta) = \xi^3 - 2\eta^2 - \xi\eta - (\xi + \eta)(\xi - 2\eta),$$

sicché  $\tau|_{S'} > 0$ ,  $\tau|_{\Gamma} = 0$ ,  $\tau_{\eta}|_{\Gamma} = -3\eta$ , ove

$$\Gamma = OQ, \quad S' = \{-1 < \xi < 0, 0 < \eta < -\xi\}.$$

$\Gamma$  è dunque una linea d'arco e si ha

$$(4.21) \quad \tau(\xi, \eta) = \tau(\xi, 0) = (\xi + \eta)(\xi - 2\eta) \quad \text{in } S'.$$

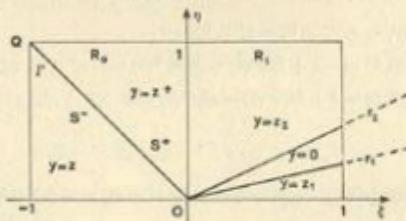


Fig. 4.2

Consideriamo ora il triangolo  $S'' = \{-1 < \xi < 0, -\xi < \eta < 1\}$ . Si ha per la (4.11),

$$\zeta^*(\xi, \eta) = \zeta(-\eta, -\xi) = -(\xi + \eta)(2\xi - \eta), \quad > 0 \text{ in } S'',$$

e quindi il prolungamento a  $S^+$ :

$$(4.22) \quad j(\xi, \eta) = -(\xi + \eta)(2\xi - \eta) \quad \text{in } S^+.$$

Il calcolo della soluzione  $j(\xi, \eta)$  nel rettangolo  $R_3$  si effettua tenendo conto dei valori dati dalle (4.20) e (4.22):

$$j(\xi, 0) = A(\xi) = m\xi^2 \quad \text{in } 0^{k-1}; \quad j(0, \eta) = B_\eta(\eta) = \eta^2 \quad \text{in } 0^{k-1}.$$

Poiché

$$A(\xi) + B_\eta(\xi) - \xi\eta = m\xi^2 + \eta^2 - \xi\eta = \left(\frac{\xi}{2} - \eta\right)^2 + \left(m - \frac{1}{4}\right)\xi^2,$$

risulta

$$(4.23) \quad j(\xi, \eta) = m\xi^2 + \eta^2 - \xi\eta \quad \text{se } m > \frac{1}{4}.$$

Se  $0 < m < \frac{1}{4}$ , si presenta il fenomeno dell'appoggio: l'origine è un punto di anti-appoggio.

Sia dappressa  $0 < m < \frac{1}{4}$ . Considerate le due rette:

$$r_1: \eta = A(\xi) = 2m\xi; \quad r_2: \xi = B'_\eta(\eta) = 2\eta,$$

possiamo, per la (3.14),

$$\begin{aligned} z_1(\xi, \eta) &= m\xi^2 - m\left(\frac{\eta}{2m}\right)^2 - \eta\left(\xi - \frac{\eta}{2m}\right) = m\left(\xi - \frac{\eta}{2m}\right)^2, \\ z_2(\xi, \eta) &= \eta^2 - \left(\frac{\xi}{2}\right)^2 - \xi\left(\eta - \frac{\xi}{2}\right) = \left(\eta - \frac{\xi}{2}\right)^2. \end{aligned}$$

E allora

$$(4.24) \quad j(\xi, \eta) = \begin{cases} z_1(\xi, \eta) & \text{per } 0 < \eta < 2m\xi, \\ 0 & \text{per } 2m\xi < \xi/2, \\ z_2(\xi, \eta) & \text{per } \xi/2 < \eta < 1. \end{cases}$$

Se  $m = 0$ , risulta

$$j(\xi, \eta) = \begin{cases} 0 & \text{per } 0 < \eta < \xi/2, \\ z_2(\xi, \eta) & \text{per } \xi/2 < \eta < 1. \end{cases}$$

2) Consideriamo ancora l'equazione (3.6), con  $f = 1$ , nel rettangolo  $R = 0^{k-1} \times 0^{k-1}$ .

Preso ad arbitrio  $p > 1$ , poniamo

$$(4.25) \quad j(\xi, 0) = A(\xi) = \begin{cases} \frac{\xi^p}{p} & \text{in } 0^{k-1}, \\ \frac{1}{p} + (\xi - 1) - \frac{p+1}{p}(\xi - 1)^2 & \text{in } 1^{k-1}, \end{cases}$$

$$(4.26) \quad j(0, \eta) = B(\eta) = 0 \quad \text{in } 0^{k-1}.$$

Si ha

$$A(0) = 0, \quad A(1) = \frac{1}{p}, \quad A(2) = 0$$

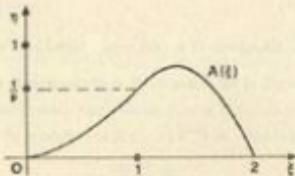


Fig. 4.3a

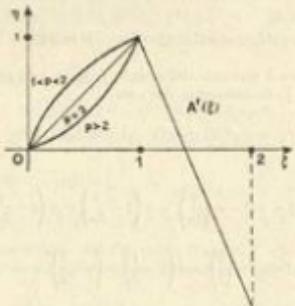


Fig. 4.3b

e inoltre:

$$(4.27) \quad A'(t) = \begin{cases} t^{p-1} & \text{in } 0^{p-1}, \\ 1 - 2\frac{p+1}{p}(t-1) & \text{in } 1^{p-2}. \end{cases}$$

Penso

$$\eta = \psi(\tilde{t}) = \tilde{t}^{p-1}, \quad q = \frac{p}{p-1} \left( \text{minim} \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \right),$$

si ha  $\tilde{t} = \eta^{1/(p-1)} = \eta^{p-1} = \eta(\eta)$ ,  $\eta^p(\eta) = \eta^p$ , e, per la (3.14), l'integrale dell'equazione  $x_0 = -1$ :

$$(4.28) \quad x(\tilde{t}, \eta) = \frac{\tilde{t}^p}{p} - \frac{\eta^p}{p} - \eta(\tilde{t} - \eta^{p-1}) = \frac{\tilde{t}^p}{p} + \frac{\eta^p}{q} - \tilde{t}\eta \quad (0 < \eta < 1, \eta^{1/(p-1)} < \tilde{t} < 1),$$

$$(4.29) \quad x(\tilde{t}, \eta) = \frac{1}{p} + (\tilde{t} - 1) - \frac{p+1}{p}(\tilde{t}-1)^2 + \frac{\eta^p}{q} - \tilde{t}\eta \quad (0 < \eta < 1, 1 < \tilde{t} < 2).$$

La funzione definita dalla (4.28) è  $> 0$ , poiché vale la (3.19), essendo  $f = 1$ . La linea  $T_1$ ,  $\tilde{t} = \eta^{p-1}$ , è di appoggio. L'origine è un punto di appoggio.

Si ha poi,  $V(\tilde{t}, \eta)$ ,

$$(4.30) \quad v_0(\tilde{t}, \eta) = \eta^{p-1} - \tilde{t}, \quad < 0 \text{ per } \tilde{t} > \eta^{p-1} = \eta^{1/(p-1)}.$$

ed insieme, per  $1 < \xi < 2$ ,

$$(4.31) \quad \begin{cases} \zeta(\xi, 0) = \frac{1}{p} + (\xi - 1) - \frac{p+1}{p}(\xi - 1)^p, & > 0 \text{ in } 1^{p-2}, \quad \zeta(2, 0) = 0, \\ \zeta(\xi, 1) = \frac{1}{p} + (\xi - 1) - \frac{p+1}{p}(\xi - 1)^p + \frac{1}{q} - \xi = -\left(1 + \frac{1}{p}\right)(\xi - 1)^p, & < 0 \text{ in } 1^{p-2}, \quad \zeta(1, 1) = 0. \end{cases}$$

La soluzione  $\gamma(\xi, \eta)$ , nel rettangolo  $R_1 = 1^{p-2} \times 0^{q-1}$ , è data dalla formula:

$$(4.32) \quad \gamma(\xi, \eta) = \begin{cases} 0 & \text{per } 0 < \xi < \eta^{1/(p-1)}, \\ \zeta(\xi, \eta) & \text{per } \eta^{1/(p-1)} < \xi < 1. \end{cases}$$

Per prolungare  $\gamma$  al rettangolo  $R_2 = 1^{q-2} \times 0^{p-1}$ , dobbiamo risolvere l'equazione  $\zeta(\xi, \eta) = 0$ . Si dappressa  $p = q = 2$ . Si ha dalla (4.29) l'equazione

$$1 + 2(\xi - 1) - 3(\xi - 1)^2 + \eta^2 - 2\xi\eta = 0,$$

cioè

$$\eta = \eta(\xi) = \xi \pm \sqrt{\xi^2 - 1 - 2(\xi - 1) + 3(\xi - 1)^2} = \xi \pm \sqrt{4(\xi - 1)^2} = \begin{cases} 3\xi - 2, \\ 2 - \xi, \end{cases}$$

e quindi (osservando che deve essere  $\eta(2) = 0$ ):

$$\eta = \eta(\xi) = 2 - \xi.$$

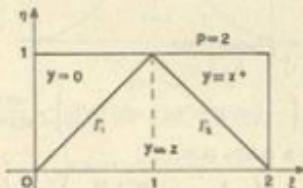


Fig. 4.4

La linea  $F_{21}$ , di equazione  $\eta = 2 - \xi$ , è una linea d'arco, per la (4.30). Poiché

$$\zeta(\xi, \eta) > 0 \quad \text{per } \eta < \xi < 2 - \eta, \quad 0 < \eta < 1,$$

abbiamo, in conclusione, dalla (4.32):

$$\gamma(\xi, \eta) = \begin{cases} 0 & \text{per } 0 < \xi < \eta, \\ \zeta(\xi, \eta) & \text{per } \eta < \xi < 2 - \eta. \end{cases}$$

Prolungiamo ora  $\gamma(\xi, \eta)$  oltre  $F_{21}$ . Si ha (per le (4.11) e (4.29) con  $p = q = 2$ , e osservando che  $\zeta(\xi, \eta) = (\eta - 3\xi + 2)(\eta + \xi - 2)/2$ )

$$(4.33) \quad \begin{aligned} \gamma^*(\xi, \eta) &= \zeta(2 - \eta, 2 - \xi) = (2 - \xi - 6 + 3\eta + 2)(2 - \xi + 2 - \eta - 2)/2 = \\ &= (\xi - 3\eta + 2)(\xi + \eta - 2)/2 > 0 \end{aligned}$$

e quindi il prolungamento oltre  $F_{21}$ :

$$\gamma(\xi, \eta) = \gamma^*(\xi, \eta) \quad \text{per } 2 - \eta < \xi < 2, \quad 0 < \eta < 1.$$

Sia ora  $p \neq 2$ . Per trovare l'equazione della linea  $\Gamma_2$ , di uovo, risolviamo rispetto a  $\xi$  l'equazione  $\tau(\xi, \eta) = 0$ , cioè, per la (4.29), l'equazione

$$(4.34) \quad (\rho + 1)(\xi - 1)^2 - \rho(1 - \eta)(\xi - 1) - \left(1 - \rho\eta + \frac{\rho}{q}\eta^2\right) = 0.$$

Si ha

$$\xi = 1 + \frac{\rho(1 - \eta) \pm \sqrt{\rho^2(1 - \eta)^2 + 4(\rho + 1)(1 - \rho\eta + (\rho/\eta)\eta^2)}}{2(\rho + 1)} = 1 + \frac{\rho(1 - \eta) \pm \sqrt{\omega(\eta)}}{2(\rho + 1)},$$

ove

$$(4.35) \quad \omega(\eta) = \rho^2(1 - \eta)^2 + 4(\rho + 1) \left(1 - \rho\eta + \frac{\rho}{q}\eta^2\right) \quad (\Rightarrow \omega(1) = 0).$$

Poiché deve essere  $\xi(0) = 2$ , ed osservando che

$$(4.36) \quad \omega(0) = (\rho + 2)^2,$$

si ricava l'espansione di  $\xi(\eta)$ :

$$(4.37) \quad \xi - \xi(0) = 1 + \frac{\rho(1 - \eta)}{2(\rho + 1)} + \frac{\sqrt{\omega(\eta)}}{2(\rho + 1)}.$$

Si ha, per la (4.35),

$$(4.38) \quad \omega'(\eta) = -2\rho^2(1 - \eta) - 4\rho(\rho + 1)(1 - \eta)^{-1} \\ (\Rightarrow \omega'(\eta) < 0 \text{ in } \theta^{-1}1, \omega'(0) = -(6\rho^2 + 4\rho), \omega'(1) = 0, \omega''(0) > 0 \text{ in } \theta^{-1}1),$$

$$(4.39) \quad \omega''(\eta) = 2\rho^2 + 4\rho(\rho + 1)(\eta - 1)\eta^{-2} > 0$$

e quindi, per la (4.37),

$$(4.40) \quad \xi'(\eta) = -\frac{\rho}{2(\rho + 1)} + \frac{(\omega(\eta))^{-1}\omega'(\eta)}{4(\rho + 1)}, \quad < 0.$$

$$(4.41) \quad \xi''(\eta) = \frac{1}{4(\rho + 1)} \left\{ -\frac{1}{2}(\omega(\eta))^{-1}\omega''(\eta) + \omega(\eta)^{-1}\omega'(\eta) \right\} = \frac{\omega(\eta)^{-1}}{4(\rho + 1)} \left\{ \omega''(\eta) - \frac{\omega'''(\eta)}{2\omega(\eta)} \right\}.$$

Dalla (4.40) segue (per le (4.36) e (4.38)):

$$(4.42) \quad \xi'(0) = -\left(\frac{\rho}{2(\rho + 1)} + \frac{6\rho^2 + 4\rho}{4(\rho + 1)(\rho + 2)}\right) = -\frac{2\rho}{\rho + 2}.$$

Si ha poi, per la (4.39),

$$\lim_{\eta \rightarrow \infty} \frac{\omega''(\eta)}{\omega(\eta)} = \lim_{\eta \rightarrow \infty} \frac{2\omega'(\eta)\omega''(\eta)}{\omega'(\eta)} = \lim_{\eta \rightarrow \infty} 2\omega''(\eta) = 4\rho^2 + \frac{8\rho(\rho + 1)}{\rho - 1} = \frac{4\rho(\rho^2 + \rho + 2)}{\rho - 1}$$

e quindi, per la (4.40),

$$(4.43) \quad \xi''(1) = -\left[\frac{\rho}{2(\rho + 1)} + \frac{1}{2(\rho + 1)} \sqrt{\frac{\rho(\rho^2 + \rho + 2)}{\rho - 1}}\right].$$

Osserviamo ora che dalla (4.41) segue:

$$(4.44) \quad \xi''(\eta) = \frac{\omega(\eta)^{-3}}{8(\rho + 1)} [2\omega(\eta)\omega''(\eta) - \omega'^2(\eta)] = \frac{\omega(\eta)^{-3}}{8(\rho + 1)} \vartheta(\eta),$$

ove

$$\vartheta(\eta) = 2\omega(\eta)\omega''(\eta) - \omega'^2(\eta),$$

$$\vartheta'(\eta) = 2\omega(\eta)\omega''(\eta) = 2\omega(\eta)4\rho(\rho + 1)(\eta - 1)(\eta - 2)\eta^{q-4} \begin{cases} > 0 & \text{per } \eta > 2, \\ < 0 & \text{per } \eta < 2, \end{cases}$$

cioèché in  $0^{\text{ad}} 1$  (essendo  $\theta(1) = 0$ ),

$$\theta(\eta) \begin{cases} < 0 & \text{se } q > 2 \text{ (cioè } 1 < p < 2\text{),} \\ > 0 & \text{se } q < 2 \text{ (cioè } p > 2\text{).} \end{cases}$$

Perciò, per la (4.44),

$$(4.45) \quad F'(\eta) \begin{cases} < 0 & \text{se } 1 < p < 2, \\ > 0 & \text{se } p > 2. \end{cases}$$

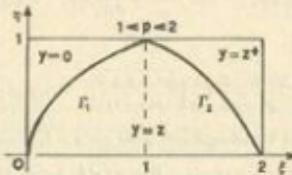


Fig. 4.5a

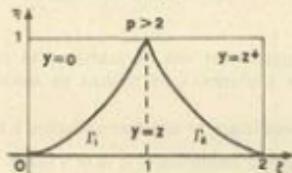


Fig. 4.5b

Sia, dappertutto,  $1 < p < 2$ . In questo caso risulta, nella (4.9),  $m(T_{D_1}) > m(T_{D_2})$ . Si ha dunque, per la (4.10),

$$\xi^*(\xi, \eta) > \xi^*(\xi(\eta), \eta(\xi)) > 0.$$

Pertanto il *prerallungamento* della soluzione, oltre  $T_{D_2}$ , si ottiene ponendo

$$(4.46) \quad \eta(\xi, \eta) = \xi^*(\xi, \eta), \quad (\xi(\eta) < \xi < 2, \quad 0 < \eta < 1).$$

*Supponiamo ora*  $p > 2$  ( $\sim m(T_{D_1}) < m(T_{D_2}), \quad q < 2$ ). Si ha, per le (4.8) e (4.29), nel dominio  $D = \{\xi(\eta) < \xi < 2, \quad 0 < \eta < 1\}$ ,

$$\zeta_{\eta\eta}^*(\xi, \eta) = -\zeta_{\eta\eta}(\xi, \eta) + 2\xi^*(\eta) = -(q-1)\eta^{q-2} + 2\xi^*(\eta), \quad < 0.$$

Poiché  $\zeta_{\eta\eta}^*(\xi(\eta), \eta) > 0$ , per provare che è  $\xi^*(\xi, \eta) > 0$  per  $\xi(\eta) < \xi < 2$ , basta perciò provare (cfr. le (4.3) e (4.29)) che

$$(4.47) \quad \xi^*(\xi, 1) = \frac{p+1}{p}(\xi-1)^2 - 2 \int_1^\xi dz \int_d^z d\beta > 0 \quad (1 < \xi < 2).$$

Si ha poi

$$\zeta_{\eta}^*(\xi, 1) = 2 \frac{(p+1)}{p}(\xi-1) - 2(1-\eta(\xi)) \quad (\sim \zeta_{\eta}^*(1, 1) = 0),$$

$$\zeta_{\eta\eta}^*(\xi, 1) = 2 \frac{(p+1)}{p} + 2\eta'(\xi),$$

e quindi, per provare la (4.47), basterà provare che è

$$(4.48) \quad \frac{p+1}{p} + \eta'(\xi) > 0 \quad \text{in } I^{p+2}.$$

Osserviamo che, essendo  $p > 2$ ,  $\eta'(\xi) \in \mathbb{F}$  in  $I^{p+2}$  (figura 4.50). Per provare la (4.48), basta dunque provare che risulta

$$(4.49) \quad \frac{p+1}{p} + \eta'(1) > 0, \quad \text{cioè } \frac{p+1}{p} + \frac{1}{\xi'(1)} > 0, \quad -\xi'(1) \frac{p+1}{p} > 1.$$

Questo segue dalla (4.43):

$$-\xi'(1) \frac{p+1}{p} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{p^2 + p + 2}{p(p-1)}} > 1 \text{ se } p > 1.$$

Si può dunque effettuare il prolungamento anche per  $p > 2$ , ponendo

$$(4.50) \quad \gamma(\xi, \eta) = \xi^\nu(\xi, \eta) \quad (\xi(0) < \xi < 2, \quad 0 < \eta < 1).$$

## 5. - CONDIZIONI SUFFICIENTI PER LA RISOLUBILITÀ DEL PROBLEMA $H^*$ E PER L'ESISTENZA DI DOMINI DI APPOGGIO

Ci limiteremo a considerare le seguenti situazioni: 1), 2).

1) *Esiste un rettangolo caratteristico  $R = I^{p+1} \times I^{p+2}$  tale che sia*

$$(5.1) \quad f(\xi, \eta) > 0 \quad \text{per } \eta > 0$$

(questo avviene, in particolare, se

$$(5.2) \quad f(0, 0) > 0;$$

2)  *$f(0, 0) = 0$  ed esiste una linea  $\Gamma_0$ , di equazione*

$$\eta = \psi_0(\xi) \quad (\text{con } \psi_0(\xi) \text{ continua e } \uparrow \text{ in } I^{p+1}, \quad \psi_0(0) = 0)$$

*tale che sia*

$$(5.3) \quad f(\xi, \eta) \begin{cases} > 0 & \text{per } \psi_0(\xi) < \eta < b, \\ < 0 & \text{per } 0 < \eta < \psi_0(\xi). \end{cases}$$

Di qui si ricavano, scambiando  $\xi$  con  $\eta$ , le condizioni di risolubilità relative alle situazioni seguenti:

$$(5.4) \quad f(\xi, \eta) > 0 \quad \text{per } \xi > 0, \quad f(\xi, \eta) \begin{cases} < 0 & \text{al di sopra di } \Gamma_0, \\ > 0 & \text{al di sotto di } \Gamma_0. \end{cases}$$

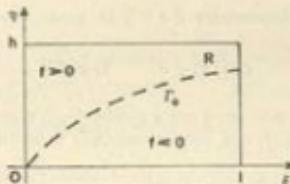


Fig. 5.1

Si noti che le (5.3) e (5.4) si presentano nel caso dell'*ostacolo di forma qualiasi, in assenza di forza esterna*. Tale caso si riconduce infatti, per le (1.7) e (1.9), a quello dell'*ostacolo rettilineo con forza esterna*  $-f(\xi, \eta) = -f(\xi - \eta)$ . Quando l'ostacolo, al crescere di  $x$ , cambia configurazione (diventando, da *concavo* ( $u''(x) > 0$ ), *convesso* ( $u''(x) < 0$ )), la funzione  $f(\xi - \eta)$  risulta  $< 0$  per  $\xi < \eta$ ,  $> 0$  per  $\xi > \eta$ . Perciò  $\Gamma_0$  appartiene alla bisettrice  $\eta = \xi$ .

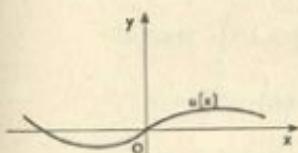


Fig. 5.2a

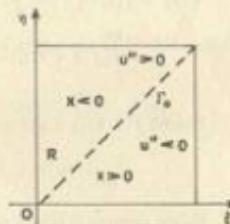


Fig. 5.2b

a) I - Sia:

$$(5.5) \quad f(\xi, \eta) \in C^0(R), \quad f(\xi, \eta) > 0 \text{ e non crescente rispetto a } \xi \quad \forall \eta \in 0^\perp b;$$

$$(5.6) \quad A(\xi) \in C^1(0^\perp b), \quad A(0) = A'(0) = 0, \quad A'(\xi) \text{ in } 0^\perp b.$$

Allora il problema  $H^*$  ha una e una sola soluzione.

Consideriamo l'equazione

$$(5.7) \quad G(\xi, \eta) := A'(\xi) - \int_0^\eta f(\xi, \beta) d\beta = 0.$$

Si ha

$$(5.8) \quad G(\xi, 0) = A'(\xi), \quad > 0 \text{ in } 0^\perp b,$$

ed inoltre

$$G(0, \eta) = - \int_0^\eta f(0, \beta) d\beta, \quad < 0 \text{ in } 0^\perp b, \Rightarrow G(0, \delta) < 0.$$

Possiamo quindi determinare  $\ell' \in 0^{-\eta} I'$  in modo che sia

$$(5.9) \quad G(\xi, b) < 0 \quad \forall \xi \in 0^{-\eta} I'.$$

Poichè  $G(0, \eta) = 0$  solo per  $\eta = 0$  e poichè  $G_\eta(\xi, \eta) = -f(\xi, \eta) < 0$  se  $\eta > 0$ , segue, dalle (5.8) e (5.9), che l'equazione (5.7) è univocamente risolubile rispetto a  $\eta$ ,  $\forall \xi \in 0^{-\eta} I'$ .

Detta  $\eta = \psi(\xi)$  la soluzione, si ha

$$\psi(0) = 0, \quad 0 < \psi(\xi) < b \text{ in } 0^{-\eta} I', \quad \psi(\xi) \in C^0(0^{-\eta} I'), \quad A'(\xi) = \int_0^{\psi(\xi)} f(\xi, \beta) d\beta \text{ in } 0^{-\eta} I'.$$

Proviamo che  $\psi(\xi)$  è  $\uparrow$  e continua anche in  $\xi = 0$ . Preso infatti  $\xi \in 0^{-\eta} I'$  e  $\epsilon > 0$  ad arbitrio (purchè  $\xi + \epsilon < \ell'$ ), si ha

$$\begin{aligned} 0 < A'(\xi + \epsilon) - A'(\xi) &= \int_0^{\psi(\xi+\epsilon)} f(\xi + \epsilon, \beta) d\beta - \int_0^{\psi(\xi)} f(\xi, \beta) d\beta = \\ &= \int_0^{\psi(\xi)} \{f(\xi + \epsilon, \beta) - f(\xi, \beta)\} d\beta + \int_{\psi(\xi)}^{\psi(\xi+\epsilon)} f(\xi + \epsilon, \beta) d\beta < \int_{\psi(\xi)}^{\psi(\xi+\epsilon)} f(\xi + \epsilon, \beta) d\beta. \end{aligned}$$

Poichè  $f(\xi, \eta) > 0$  per  $\eta > 0$ , ne segue

$$\psi(\xi + \epsilon) > \psi(\xi).$$

Esiste dunque il limite destro

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \psi(\xi + \epsilon) = \varrho(\xi) > \psi(\xi)$$

ed è necessariamente  $\varrho(\xi) = \psi(\xi)$  anche se  $\xi = 0$ , perché altrimenti, per continuità, la (5.7) avrebbe, per il dato  $\xi$ , due soluzioni distinte,  $\psi(\xi)$  e  $\varrho(\xi)$ .

La tesi è dunque provata. Nel dominio  $Z = \{0 < \xi < \ell', 0 < \eta < \psi(\xi)\}$  la soluzione del problema  $II^*$  è data dalla (3.14), ove  $\xi = \varrho(\eta)$  è la funzione inversa di  $\eta = \psi(\xi)$ . Inoltre  $\varphi(\xi, \eta) \in C^1(Z)$ , per le (3.10) e (3.11) (ed è  $> 0$  per la (3.19)).

OSSERVAZIONE I - Se la traccia  $B(\eta)$  è  $= 0$ , il dominio di appoggio corrispondente al teorema I si ottiene applicando la legge di estensione  $e_1$ . Abbiamo dunque la soluzione  $\varphi(\xi, \eta)$  data dalla (3.28).

Se poi anche  $B(\eta) \neq 0$  e sono soddisfatte (scambiando  $\xi$  con  $\eta$ ) le ipotesi del teorema I, esiste ancora un dominio di appoggio, in virtù della legge  $e_2$ , purchè le linee di appoggio  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$  soddisfino alla (3.37). Se  $\varphi_1(\xi) > \varphi_2(\xi)$ ,  $\forall \xi \in 0^{-\eta} I^*$ , il dominio di appoggio non esiste, ed è  $\varphi(\xi, \eta) = \varphi(\xi, \eta)$ , soluzione del problema non vincolato.

II - Supponiamo che:

$$(5.10) \quad f(\xi, \eta) \in C^1(R) \text{ e soddisfi alla (5.1) o alla (5.3);}$$

$$(5.11) \quad A(\xi) \in C^1(0^{+d}I) \cap C^2(0^{+d}I), \quad A(0) = A'(0) = 0;$$

$$(5.12) \quad \lim_{t \rightarrow 0} A''(t) = \delta, \text{ con } 0 < \delta < +\infty.$$

Allora il problema  $\Pi^*$  ammette una e una sola soluzione  $\xi(\xi, \eta)$ , in un dominio  $Z = \{\eta < \xi < I, 0 < \eta < I'\} \subseteq R$ .

Precisamente:

$$(5.13) \quad \begin{cases} \eta(\eta) \in C^1(0^{+d}I') \text{ ad } \delta \uparrow; \\ \xi(\xi, \eta) \in C^2(Z) \quad \text{se } \delta < +\infty, \in C^1(Z) \cap C^2(Z - \{0\}) \quad \text{se } \delta = +\infty; \\ \eta'(0) = \frac{f(0, 0)}{\delta} \quad \text{se } \delta < +\infty, \quad \eta'(0) = 0 \quad \text{se } \delta = +\infty. \end{cases}$$

Osserviamo anzitutto che:  $\delta < +\infty \Rightarrow \delta = A'(0) \in A(\xi) \in C^1(0^{+d}I)$ .

Consideriamo ora l'equazione (5.7).

Preso  $\delta'$ , con  $0 < \delta' < \delta$ ,  $\exists I' \in 0^{+d}I$  tale che  $A''(\xi) > \delta'$  in  $0^{+d}I'$ . Ne segue:

$$G(\xi, \eta) > \xi \delta' - \int_0^\xi f(\xi, \beta) d\beta, \quad G(I', \eta) > I' \delta' - \int_0^{I'} f(I', \beta) d\beta,$$

$$G_\xi(\xi, \eta) = A''(\xi) - \int_0^\xi f_\xi(\xi, \beta) d\beta > \delta' - \int_0^\xi f_\xi(\xi, \beta) d\beta,$$

e quindi si può determinare  $I' \in 0^{+d}I$  in modo che sia

$$G(I', \eta) > 0 \quad \text{in } 0^{+d}I', \quad G_\xi(\xi, \eta) > 0 \quad \text{in } R = 0^{+d}I \times 0^{+d}I'.$$

Poiché

$$G(0, \eta) = - \int_0^0 f(0, \beta) d\beta \quad < 0 \text{ per } \eta > 0$$

e poiché  $G(\xi, 0) = 0$  solo per  $\xi = 0$ , si conclude che l'equazione (5.7) è univocamente risolubile rispetto a  $\xi$ ,  $\forall \eta \in 0^{+d}I'$ . Inoltre la soluzione  $\xi = \eta(\eta)$  è tale che risulti  $\eta(0) = 0$ ,  $0 < \eta(\eta) < I'$  e  $f(\eta(\eta), \eta) > 0$  in  $0^{+d}I'$  (poiché, in caso contrario, sarebbe  $f(\eta(\eta), \beta) < 0$  in  $0^{+d}\eta$ , contro la (5.7)). Dal teorema sulle funzioni implicite segue che  $\xi = \eta(\eta) \in C^1(0^{+d}I')$  e risulta

$$(5.14) \quad \eta'(\eta) = - \frac{G_\xi(\eta(\eta), \eta)}{G_{\xi\xi}(\eta(\eta), \eta)} = \frac{f(\eta(\eta), \eta)}{G_\xi(\eta(\eta), \eta)} \quad > 0 \text{ per } \eta > 0.$$

Perciò  $\eta(\eta)$  è  $\uparrow$  in  $0^{+d}I$  e si ha

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \eta(\eta) = \varrho > 0.$$

Non può essere  $\varrho > 0$  perché si avrebbe  $G(\varrho, 0) = 0$ , ciò che è assurdo. È dunque  $\varrho = 0$ ,  $\Rightarrow \psi(\eta) \in C^0(0^\alpha b')$ . Per la (5.14),  $\psi(\eta) \in C^1(0^\alpha b')$ . Vengono pertanto le terze delle (5.13) e si può supporre  $b' = \psi(b')$ .

Sia  $\eta = \psi(\xi)$ , con  $0 < \xi < \psi(b') = b'$ , la funzione inversa di  $\xi = \psi(\eta)$ ;  $\psi(\xi)$  è  $\uparrow$  in  $0^\alpha b'$  e  $\in C^1(0^\alpha b')$  se  $\psi'(0) > 0$ ,  $\in C^0(0^\alpha b')$  se  $\psi'(0) = 0$ .

Consideriamo ora la funzione  $\zeta(\xi, \eta)$  definita dalla (3.14) nel dominio  $Z = \{0 < \xi < b', 0 < \eta < \psi(\xi)\} = \{\eta(\eta) < \xi < b', 0 < \eta < b'\}$ :

$$(5.15) \quad \begin{aligned} \zeta(\xi, \eta) &= A(\xi) - A(\psi(\eta)) - \int_0^{\xi} dx \int_0^{\eta} f(x, \beta) d\beta = \\ &= \int_{\psi(\eta)}^{\xi} \left\{ A'(\alpha) - \int_0^{\eta} f(x, \beta) d\beta \right\} dx + \int_{\psi(\eta)}^{\xi} dx \int_{\psi(\eta)}^{\eta} f(x, \beta) d\beta = \int_{\psi(\eta)}^{\xi} \int_{\psi(\eta)}^{\eta} f(x, \beta) d\beta . \end{aligned}$$

Se vale la (5.1) è allora  $\zeta(\xi, \eta) > 0$  in tutto  $Z'$ : perciò  $\zeta(\xi, \eta)$  dà la soluzione, unica, del problema  $II^*$ .

Lo stesso avviene se vale la (5.3). E infatti

$$G_\eta(\xi, \eta) = -f(\xi, \eta)$$

e quindi  $G(\xi, \eta)$ , considerata come funzione di  $\eta$ , è  $\uparrow$  in  $0^\alpha \psi_b(\xi)$ , è  $\downarrow$  in  $\psi_b(\xi)^{*\alpha} b$ . Se  $\xi > 0$ , si ha  $G(\xi, 0) = A'(\xi) > 0$ ; è inoltre  $G(\xi, \psi(\xi)) = 0$ . È dunque  $\psi_b(\xi) < \psi(\xi)$  e  $G(\xi, \eta) > 0$ ,  $\forall \xi \in 0^\alpha b'$  e  $\forall \eta < \psi(\xi)$ . Perciò

$$\int_0^{\psi(\xi)} f(\xi, \beta) d\beta = G(\xi, \eta) - G(\xi, \psi(\xi)) = G(\xi, \eta) \quad > 0 \text{ se } 0 < \eta < \psi(\xi) ,$$

e dalla (5.15) segue che  $\zeta(\xi, \eta) > 0$  in  $Z'$ .

La stessa  $\zeta(\xi, \eta) \in C^2(Z')$  se  $\delta < +\infty$ ;  $\in C^1(Z') \cap C^1(Z' - \{0\})$  se  $\delta = +\infty$ , poiché

$$(5.16) \quad \begin{cases} \zeta_\xi(\xi, \eta) = A'(\xi) - \int_0^{\eta} f(\xi, \beta) d\beta = G(\xi, \eta) , \quad \zeta_{\eta\xi}(\xi, \eta) = - \int_0^{\xi} f(x, \eta) dx , \\ \zeta_{\eta\eta}(\xi, \eta) = A''(\xi) - \int_0^{\xi} f_\eta(\xi, \beta) d\beta , \quad \zeta_{\eta\eta}(\xi, \eta) = -f(\xi, \eta) , \\ \zeta_{\eta\eta}(\xi, \eta) = f(\psi(\eta), \eta) \psi'(\eta) - \int_0^{\xi} f_\eta(x, \eta) dx . \end{cases}$$

OSSERVAZIONE II - Supponiamo che valgano le (5.11) e (5.12); valga inoltre, in  $\tilde{R}$ , la (5.1) o la (5.3), estendo però  $f(0, \eta) = 0$ . Allora il problema  $II^*$  non ha soluzione.

Posto infatti (poichè  $B(\eta) = 0$ ) :

$$(5.17) \quad z(\xi, \eta) = A(\xi) - \int_0^{\xi} dx \int_0^x f(x, \beta) d\beta ,$$

si ha  $G(0, \eta) = 0$  e, per quanto precede,  $\zeta_0(\xi, \eta) = G(\xi, \eta) > 0$  in  $\bar{R}'$ . Ne segue  $z(\xi, \eta) > 0$  in  $\bar{R}'$  e quindi, per la legge (II) di estensione,  $\gamma(\xi, \eta) = z(\xi, \eta)$  in tutto  $R'$ .

III - Sia:

$$(5.18) \quad f(0, 0) > 0 , \quad f(\xi, \eta) \in C^0(R) ;$$

$$(5.19) \quad A(\xi) \in C^1(0^{+1}I) , \quad A(0) = A'(0) = A''(0) = 0 , \quad A'(\xi) \neq 0 \text{ in } 0^{+1}I .$$

Allora il problema II\* ha una e una sola soluzione. Precisamente:  $\eta = \psi(\xi) \in C^1(0^{+1}I)$ , con  $I' \subset 0^{+1}I$ , è risolta.

$$(5.20) \quad \psi(0) = 0 , \quad \psi'(0) = 0 , \quad \lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{\psi'(\xi)}{A'(\xi)} = \frac{1}{f(0, 0)} .$$

Inoltre  $z(\xi, \eta) \in C^1(Z) \cap C^1(Z - 0L')$ , con  $L' = (I', 0)$ .

Possiamo supporre, per la prima della (5.18), che sia  $f(\xi, \eta) > 0$  in tutto  $R$ . Si ha inoltre

$$G(0, 0) = 0 , \quad G(\xi, 0) = A'(\xi) > 0 \text{ in } 0^{+1}I , \quad G(0, b) = - \int_0^b f(0, \beta) d\beta < 0 .$$

Possiamo quindi supporre  $G(\xi, b) < 0$  in  $0^{+1}I$ .

Poichè  $G_\eta(\xi, \eta) = -f(\xi, \eta) < 0$  in tutto  $R$ , si conclude che l'equazione (5.7) è risolubile univocamente rispetto a  $\eta$ ,  $\forall \xi \in 0^{+1}I$ . Inoltre la soluzione  $\eta = \psi(\xi) \in C^1(0^{+1}I)$  e si ha

$$(5.21) \quad \psi(0) = 0 , \quad 0 < \psi(\xi) < b \text{ in } 0^{+1}I , \quad \psi'(\xi) = \frac{A'(\xi) - \int_0^{\psi(\xi)} f_\xi(\xi, \beta) d\beta}{f(\xi, \psi(\xi))} .$$

Perciò  $\psi'(0) = 0$ . Proviamo ora che è  $\psi'(\xi) > 0$  per  $0 < \xi < I' < I$ , e vale la terza delle (5.20).

Osserviamo anzitutto che, essendo  $A'(0) = A''(0) = 0$  e  $A'(\xi) \neq 0$ , risulta

$$0 < A'(\xi) = \int_0^\xi A''(x) dx < \xi A''(\xi) \quad (\xi \in 0^{+1}I) .$$

Posto allora

$$\min_R f(\xi, \eta) = m > 0 , \quad \max_R |f_\xi(\xi, \eta)| = M_1 ,$$

e tenuto conto dell'identità

$$\int_0^{y(\xi)} f(\xi, \beta) d\beta = A'(\xi),$$

si ha:

$$(5.22) \quad \left| \int_0^{y(\xi)} f_i(\xi, \beta) d\beta \right| < M_1 V(\xi) < \frac{M_1}{m} \xi A'(\xi).$$

Dalla (5.21) segue pertanto:

$$(5.23) \quad V'(\xi) > \frac{A'(\xi)(1 - (M_1/m)\xi)}{f(\xi, V(\xi))}.$$

Basta dunque prendere

$$\bar{\xi} < \min \{l, m/M_1\}$$

perchè risulti  $V'(\bar{\xi}) > 0$  in tutto  $0^{\bar{\xi}} l^{\bar{\xi}}$  ( $\Rightarrow R = 0^{\bar{\xi}} l^{\bar{\xi}} \times 0^{\bar{\xi}} b$ ).

Poichè, infine, per la (5.22),

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{1}{A'(\xi)} \int_0^{y(\xi)} f_i(\xi, \beta) d\beta = 0,$$

segue dalla (5.21):

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{V'(\xi)}{A'(\xi)} = \frac{1}{f(0, 0)}.$$

Il resto della dimostrazione è evidente (tenendo presente che nella terza delle (5.16)  $y'(\eta) \rightarrow +\infty$  per  $\eta \rightarrow 0$ ).

OSSERVAZIONE III - Sia  $f(0, 0) > 0$ ,  $f(\xi, \eta) \in C^1(R)$ . Supponiamo che  $A(\xi)$  soddisfi alle ipotesi del teorema II (con  $\delta < +\infty$ ), e III, e che  $A(\xi) = 0$  (e analogamente per la traccia  $B(\eta)$ ). Detta

$$\tilde{z}(\xi, \eta) = A(\xi) + B(\eta) - \int_0^{\xi} \int_0^{\eta} f(x, \beta) d\beta dx$$

la soluzione del problema non vincolato, si ha

$$z(0, 0) = z_x(0, 0) = z_y(0, 0) = 0,$$

$$z_{xx}(0, 0) = A'(0) > 0, \quad z_{yy}(0, 0) = -f(0, 0) < 0, \quad z_{xy}(0, 0) = B'(0) > 0.$$

Consideriamo il determinante hessiano:

$$(5.24) \quad D = z_{xx} z_{yy} - z_{xy}^2 = A'(0)B'(0) - f^2(0, 0).$$

È allora immediato riconoscere che:

*Se  $D > 0$  non esiste un dominio di appoggio;*

*Se  $D < 0$  esiste un dominio di appoggio.*

Infatti, se  $D > 0$ , il punto  $(0, 0, 0)$  è (nello spazio  $(\xi, \eta, \zeta)$ ) un punto ellittico per la superficie  $\zeta = \varphi(\xi, \eta)$ . E dunque  $A'(0)B'(0) > 0$  e  $\varphi(\xi, \eta) > 0$  in tutto un rettangolo  $R' \subset R$ ; per la legge (II), la soluzione del problema vincolato coincide con quella del problema libero:  $\gamma(\xi, \eta) = \varphi(\xi, \eta)$ .

Sia ora  $D < 0$ , cioè  $(0, 0, 0)$  sia un punto iperbolico per la  $\zeta = \varphi(\xi, \eta)$ . Questa circostanza si presenta, anzitutto, se  $A(\xi) \neq 0$  e  $B(\eta) = 0$ , oppure se  $A(\xi) = 0$  e  $B(\eta) \neq 0$ . In questi due casi esistono, rispettivamente, le linee di appoggio  $\Gamma_1(\eta = \psi_1(\xi))$  e  $\Gamma_2(\xi = \psi_2(\eta))$ , risultando, per le (5.18) e (5.21):

$$0 < \psi_1'(0) = \frac{A'(0)}{f(0, 0)}, \quad 0 < \psi_2'(0) = \frac{B'(0)}{f(0, 0)}.$$

In virtù della legge  $\varepsilon_3$ , si ottengono i rispettivi domini di appoggio:

$$\Delta_1 = [0 < \xi < \xi'_1, \psi_1(\xi) < \eta < \xi'_1], \quad \Delta_2 = [\psi_2(\eta) < \xi < \xi'_2, 0 < \eta < \xi'_2].$$

Supponiamo ora  $A(\xi) \neq 0$ ,  $B(\eta) \neq 0$ , e  $D < 0$ . È allora  $\psi_1'(0)\psi_2'(0) < 1$ , cioè il grafico di  $\Gamma_2$  si trova, in  $R'$ , ad *di sopra* del grafico di  $\Gamma_1$ .

In questo caso, in virtù della legge  $\varepsilon_3$ , si ha un dominio di appoggio  $\Delta$ , come nella figura 3.4.

Se infine  $A(\xi) = 0$  e  $B(\eta) = 0$ , risulta ancora  $D < 0$ , e *tutto*  $R$ , per la  $\varepsilon_3$ , è dominio di appoggio.

b) Supponiamo, in questo punto  $\delta$ ,  $f(0, 0) = 0$ . Nel teorema IV rientra, in sostanza, l'ipotesi che l'origine sia punto singolare per la linea

$$\Gamma_0(f(\xi, \eta) = 0).$$

Lo è però per la linea

$$\Gamma_1(\tau_\xi = G(\xi, \eta) = 0),$$

e analogamente per

$$\Gamma_2(\tau_\eta = G^*(\xi, \eta) = 0);$$

ci limiteremo, peraltro, al caso più semplice, della singolarità *double*, corrispondente alla circostanza che il punto  $(0, 0, 0)$  sia iperbolico per le superfici

$$G = G(\xi, \eta) \quad \text{e} \quad G^* = G^*(\xi, \eta).$$

IV - Sia:

$$(5.25) \quad f(\xi, \eta) \in C^q(R), \quad f(0, 0) = 0,$$

$f(\xi, \eta) \downarrow$  come funzione di  $\xi$  e  $\uparrow$  come funzione di  $\eta$ ;

$$(5.26) \quad A(\xi) \in C^1(\mathbb{R}^d), \quad A(0) = A'(0) = 0, \quad A(\xi) \downarrow$$
 in  $\mathbb{R}^d$ , oppure  $A(\xi) = 0$ .

Allora il problema  $\Pi^*$  ha una e una sola soluzione.

Consideriamo l'equazione della linea  $\Gamma_0$ :

$$(5.27) \quad f(\xi, \eta) = 0.$$

Si ha  $f(0, \eta) > 0$  in  $0^{-\delta}$ . Esiste perciò  $I_0 \in 0^{-\delta}$ , tale che sia

$$f(\xi, \delta) > 0 \quad \text{in } 0^{-\delta} I_0.$$

Si ha inoltre

$$f(\xi, 0) < 0 \quad \text{in } 0^{-\delta} I_0, \quad f(0, 0) = 0.$$

Poichè  $f(\xi, \eta)$  è ↑ rispetto a  $\eta$ , si conclude che la (5.27) è univocamente risolubile rispetto a  $\eta$ ,  $\forall \xi \in 0^{-\delta} I_0$ .

La soluzione  $\eta = \psi_0(\xi)$  (con  $\psi_0(0) = 0$ ) è inoltre continua e ↑ in  $0^{-\delta} I_0$  (cfr. con la (5.3)).

Sia infatti  $\xi' \in 0^{-\delta} I_0$ . Preso  $\delta > 0$  ad arbitrio (in modo che il quadrato  $S = \xi'^{-\delta} \times \psi_0(\xi')^{-\delta} (\psi_0(\xi') + \delta)$  sia ⊂  $R$ ), si ha  $f(\xi', \psi_0(\xi')) = 0$ : possiamo dunque ripetere, con riferimento a  $S$ , quanto detto prima con riferimento ad  $R$ : esiste  $\delta' \in 0^{-\delta}$  tale che sia

$$\psi_0(\xi') < \psi_0(\xi) < \psi_0(\xi') + \delta \quad \forall \xi \in 0^{-\delta} \delta'.$$

Perciò  $\psi_0(\xi)$  è ↑ e continua da destra. Non può poi essere (se  $\xi' > 0$ )

$$\lim_{\xi \rightarrow \xi'} \psi_0(\xi) = \xi' < \psi_0(\xi').$$

Si avrebbe infatti, per la continuità,  $f(\xi', \xi') = f(\xi', \psi_0(\xi')) = 0$ , assurdo poichè  $\eta' \neq \psi_0(\xi')$ . allo stesso modo si prova che  $\psi_0(\xi) \rightarrow \psi_0(I_0)$  per  $\xi \rightarrow I_0$ . Perciò la tesi è provata.

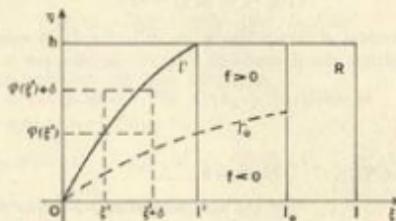


Fig. 5.3

La linea  $I'_0$  ha dunque equazione  $\eta = \psi_0(\xi)$  e risulta

$$(5.28) \quad f(\xi, \eta) \begin{cases} < 0 & \text{al di sotto di } I'_0, \\ > 0 & \text{al di sopra di } I'_0. \end{cases}$$

Consideriamo ora l'equazione

$$(5.29) \quad -G(\xi, \eta) = \int_0^{\eta} f(\xi, \beta) d\beta - A'(\xi) = 0.$$

Si ha, per  $\xi > 0$ ,

$$(5.30) \quad -G(\xi, 0) = -A'(\xi) \begin{cases} < 0 & \text{se } A'(\xi) \uparrow, \\ = 0 & \text{se } A'(\xi) = 0, \end{cases} \quad -G_0(\xi, \eta) = f(\xi, \eta)$$

e quindi, per le (5.28),

$$-G(\xi, \eta) < 0 \quad \text{per } 0 < \eta < \psi_0(\xi).$$

Se  $\xi > 0$ , l'equazione (5.29) non ammette dunque alcuna soluzione  $\eta \in 0^{-1}\psi_0(\xi)$ . Consideriamo ora l'intervallo  $\psi_0(\xi)^{-1}b$ . Si ha

$$-G(0, \eta) = \int_0^{\eta} f(0, \beta) d\beta > 0 \text{ in } 0^{-1}b \quad (-G(0, 0) = 0)$$

e si può determinare  $\bar{l} \in 0^{-1}I_0$  in modo che sia

$$(5.31) \quad -G(\xi, \bar{l}) > 0 \quad \text{per } \xi \in 0^{-1}I.$$

Poiché

$$(5.32) \quad -G(\xi, \psi_0(\xi)) < 0 \quad \text{per } \xi \in 0^{-1}I,$$

e poiché (per le (5.28) e (5.30))  $-G(\xi, \eta) \uparrow$  rispetto a  $\eta$  nell'intervallo  $\psi_0(\xi)^{-1}b$ , si conclude che la (5.29) ammette,  $\forall \xi \in 0^{-1}I$ , una e una sola soluzione  $\eta = \psi(\xi)$ , con

$$(5.33) \quad \psi(0) = \psi_0(0) = 0, \quad \psi_0(\xi) < \psi(\xi) < b \quad \text{in } 0^{-1}I.$$

Inoltre  $\psi(\xi)$  è continua e  $\uparrow$  in  $0^{-1}I$ . Sia infatti  $\xi \in 0^{-1}I$ . Preso ad arbitrio  $\delta > 0$  (in modo che il quadrato  $S = \xi^{1-\alpha}(\xi + \delta) \times \psi(\xi)^{-1}(\psi(\xi) + \delta)$  sia al di sopra di  $I'_0$ ), si ha  $-G(\xi, \psi(\xi')) = 0$  e, in  $S$ ,  $-G(\xi, \eta)$  è  $\downarrow$  come funzione di  $\xi$ ,  $\uparrow$  come funzione di  $\eta$ . Si può dunque ripetere quanto detto precedentemente per  $f(\xi, \eta)$  e risulta provata la tesi (è  $\zeta_d = G(\xi, \eta) > 0$ , e quindi  $\zeta(\xi, \eta) > 0$ , per  $0 < \eta < \psi(\xi)$ ).

OSSERVAZIONE IV<sub>1</sub> - Le ipotesi di monotonia del teorema IV (per quanto riguarda la  $f$ ) sono soddisfatte se  $f \in C^1(R)$  e  $f_t(0, 0) = -p < 0$ ,  $f_\eta(0, 0) = q > 0$ .

OSSERVAZIONE IV<sub>2</sub> - Sia  $B(\eta) = 0$ . Allora, nelle ipotesi del teorema IV,  $\exists$  il dominio di appoggio della figura 3.3e: questo avviene dunque sia per  $A'(\xi) \uparrow$ , sia per  $A(\xi) = 0$ .

c) Supponiamo, in quanto segue, che il termine noto  $f(\xi, \eta)$  sia definito in un rettangolo  $R_s := \{ -\varepsilon < \xi < l, -\varepsilon < \eta < b \}$ , con  $s > 0$ , in modo che:

$$(5.34) \quad f(\xi, \eta) \in C^1(R_s), \quad f_{\xi\xi}(\xi, \eta) \in C^0(R_s), \quad f_{\eta\eta}(\xi, \eta) \in C^0(R_s).$$

Le definizioni di  $A(\xi) \in B(\eta)$  vengono ora prolungate, rispettivamente, agli intervalli  $-\varepsilon^{1/4}l, -\varepsilon^{1/4}b$ , supponendo che:

$$(5.35) \quad A(\xi) \in C^0(-\varepsilon^{1/4}l, \dots), \quad A(0) = A'(0) = A''(0) = 0, \quad A(\xi) > 0 \text{ in } \theta^{1/4}l,$$

$$(5.36) \quad B(\eta) \in C^0(-\varepsilon^{1/4}b, \dots), \quad B(0) = B'(0) = B''(0) = 0, \quad B(\eta) > 0 \text{ in } \theta^{1/4}b.$$

Si ha dunque, necessariamente,

$$(5.37) \quad A''(0) = k_1 > 0, \quad B''(0) = k_2 > 0.$$

La soluzione  $u(\xi, \eta)$  del problema libero, con le tracce  $u(\xi, 0) = A(\xi)$ ,  $u(0, \eta) = B(\eta)$ , è data, in tutto  $R_s$ , dalla formula:

$$(5.38) \quad u(\xi, \eta) = A(\xi) + B(\eta) - \int_0^\xi \int_0^\eta f(x, \beta) d\beta,$$

sicché

$$(5.39) \quad \begin{cases} u_0(\xi, \eta) = G(\xi, \eta) = A'(\xi) - \int_0^\xi f(\xi, \beta) d\beta, \\ u_\eta(\xi, \eta) = G^*(\xi, \eta) = B'(\eta) - \int_0^\eta f(x, \eta) dx. \end{cases}$$

Valgono allora i seguenti teoremi: V, VI.

V - Siano soddisfatte le (5.34) e (5.35). Sia inoltre

$$(5.40) \quad f_t(0, 0) = -p < 0, \quad f_\eta(0, 0) = q > 0.$$

Allora il problema II\* (relativo all'asse  $\xi$ ) ha una e una sola soluzione,  $u(\xi, \eta) \in C^2(Z)$ .

Si ha precisamente

$$(5.41) \quad \gamma'(0) = \frac{p + \sqrt{p^2 + k_1 q}}{q} > 0.$$

La soluzione esiste, ed è unica, in virtù dell'osservazione IV<sub>1</sub>. Consideriamo ora, nel rettangolo  $R_s$ , l'equazione

$$(5.42) \quad G(\xi, \eta) = 0.$$

Si ha

$$(5.43) \quad \begin{cases} G_\xi(\xi, \eta) = A''(\xi) - \int_0^\eta f_\xi(\xi, \beta) d\beta, & G_\eta(\xi, \eta) = -f(\xi, \eta), \\ G_{\eta\xi}(\xi, \eta) = A'''(\xi) - \int_0^\eta f_{\eta\xi}(\xi, \beta) d\beta, \\ G_{\eta\eta}(\xi, \eta) = -f_\eta(\xi, \eta), & G_{\eta\eta}(\xi, \eta) = -f_\eta(\xi, \eta), \end{cases}$$

e quindi

$$(5.44) \quad \begin{cases} G(0, 0) = 0, & G_\xi(0, 0) = 0, & G_\eta(0, 0) = 0, \\ G_{\eta\xi}(0, 0) = k_1 > 0, & G_{\eta\eta}(0, 0) = p > 0, & G_{\eta\eta}(0, 0) = -q < 0. \end{cases}$$

La forma quadratica

$$(5.45) \quad G_{\eta\xi}(0, 0)\lambda^2 + 2G_{\eta\eta}\lambda\mu + G_{\eta\eta}\mu^2 = k_1\lambda^2 + 2p\lambda\mu - q\mu^2$$

ha, per la (5.45), discriminante

$$(5.46) \quad -k_1 q - p^2, \quad < 0 \text{ per le (5.40) e la prima delle (5.37).}$$

L'origine è dunque un punto iperbolico per la superficie  $\pi = G(\xi, \eta)$ . La linea  $G(\xi, \eta) = 0$  presenta nell'origine un punto doppio nodale, per il quale passano due rami,  $\Gamma_1(\eta = \psi_1(\xi))$  e  $\Gamma_1(\eta = \bar{\psi}_1(\xi))$ . Le derivate  $\psi_1(0)$  e  $\bar{\psi}_1(0)$  sono le radici dell'equazione

$$(5.47) \quad q\psi'^2 - 2p\psi' - k_1 = 0$$

e si ha:

$$\psi_1'(0) = \frac{p + \sqrt{p^2 + k_1 q}}{q} > \frac{p}{q} > 0, \quad \bar{\psi}_1'(0) = \frac{p - \sqrt{p^2 + k_1 q}}{q} < 0.$$

Il ramo  $\Gamma_1$ ,  $\eta = \psi_1(\xi)$ , penetra dunque nel rettangolo  $R$ .

Consideriamo ora il ramo  $\Gamma_1$ ,  $\eta = \bar{\psi}_1(\xi)$ .

Sia dapprima  $A''(\xi) > 0$  per  $\xi > 0$ .

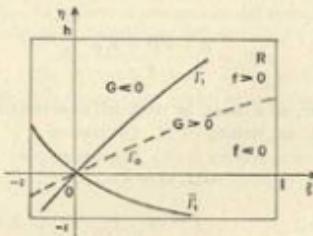


Fig. 5.4

Se  $k_1 > 0$ , è  $\varphi'(0) < 0$  e quindi  $\Gamma_1$  non penetra in  $R$ . Se  $k_1 = 0$ , il ramo  $\Gamma_1$  è tangente all'asse  $\xi$  nell'origine. Poiché  $G(\xi, 0) = A'(\xi) > 0$  per  $\xi > 0$ , ne segue che  $G(\xi, \eta) > 0$  per  $\varphi_1(\xi) < \eta < \varphi_1(\xi)$ , con  $\xi > 0$ : si conclude che, per  $\xi > 0$ , risulta  $\varphi_1(\xi) < 0$ . Perciò, anche in questo caso,  $\Gamma_1$  non penetra in  $R$ .

Se, infine,  $A(\xi) = 0$ , risulta  $G(\xi, 0) = 0$ , cioè  $\varphi_1(\xi) = 0$ .

In ogni caso dunque, la soluzione del problema  $II^*$  corrisponde al ramo  $\Gamma_1$ .

VI - Siamo soddisfatte le (5.34) e (5.36). Sia inoltre

$$(5.48) \quad f_\xi(0, 0) = -p < 0, \quad f_\eta(0, 0) = q > 0, \quad k_2 > 0, \quad q^2 - k_2 p > 0.$$

Allora il problema  $II^*$  (relativo all'asse  $\eta$ ) ha una e una sola soluzione,  $\zeta(\xi, \eta) \in C^2(Z')$  (ove  $Z' = \{0 < \xi < \varphi(\eta), 0 < \eta < b'\}$ ,  $\varphi(\eta) \in C^1([0, b'])$  e  $\zeta(0, 0) = 0$ ).

Risulta precisamente

$$(5.49) \quad \varphi'(0) = \frac{q - \sqrt{q^2 - k_2 p}}{p} > 0.$$

Consideriamo, nel rettangolo  $R_*$ , la funzione

$$(5.50) \quad G^*(\xi, \eta) = B'(\eta) - \int_0^\xi f(x, \eta) dx$$

e l'equazione

$$(5.51) \quad G^*(\xi, \eta) = 0.$$

Si ha

$$(5.52) \quad \begin{cases} G_\xi^*(\xi, \eta) = -f(\xi, \eta), & G_\eta^*(\xi, \eta) = B''(\eta) - \int_0^\xi f_\eta(x, \eta) dx, \\ G_{\xi\xi}^*(\xi, \eta) = -f_\xi(\xi, \eta), & G_{\xi\eta}^*(\xi, \eta) = -f_\eta(\xi, \eta), \\ G_{\eta\eta}^*(\xi, \eta) = B''(\eta) - \int_0^\xi f_{\eta\eta}(x, \eta) dx \end{cases}$$

e quindi

$$(5.53) \quad \begin{cases} G^*(0,0) = 0, & G_{\xi}^*(0,0) = 0, & G_{\eta}^*(0,0) = 0, \\ G_{\xi\xi}^*(0,0) = p, & G_{\xi\eta}^*(0,0) = -q, & G_{\eta\eta}^*(0,0) = k_2 > 0. \end{cases}$$

La forma quadratica

$$(5.54) \quad G_{\xi\xi}^*(0,0)\lambda^2 + 2G_{\xi\eta}^*(0,0)\lambda\mu + G_{\eta\eta}^*(0,0)\mu^2 = p\lambda^2 - 2q\lambda\mu + k_2\mu^2$$

ha, per le (5.53), discriminante

$$(5.55) \quad k_2p - q^2, \quad < 0 \text{ per la terza delle (5.48).}$$

L'origine è dunque un *punto iperbolico* per la superficie  $\pi^* = G^*(\xi, \eta)$ . La linea  $G^*(\xi, \eta) = 0$  presenta nell'origine un *punto doppio mobile* per il quale passano due rami,  $\Gamma_2(\xi = \varphi_2(\eta))$  e  $\Gamma_2(\xi = \tilde{\varphi}_2(\eta))$ . Le derivate  $\varphi_2'(0)$  e  $\tilde{\varphi}_2'(0)$  sono le radici dell'equazione

$$(5.56) \quad p\eta'^2 - 2q\eta' + k_2 = 0.$$

Si ha dunque

$$(5.57) \quad \varphi_2'(0) = \frac{q - \sqrt{q^2 - k_2 p}}{p} > 0, \quad \tilde{\varphi}_2'(0) = \frac{q + \sqrt{q^2 - k_2 p}}{p} > \varphi_2'(0).$$

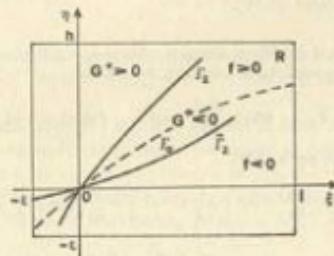


Fig. 5.5.

Proviamo che  $\xi = \varphi_2(\eta) = \varphi(\eta)$ .

Per ipotesi è  $k_2 > 0$ . Allora entrambi i rami penetrano in  $R$  e  $\Gamma_2(\xi = \varphi_2(\eta))$  ha grafico al di sopra di  $\Gamma_2(\xi = \tilde{\varphi}_2(\eta))$ . Il grafico di  $\Gamma_2(f(\xi, \eta) = 0, \Leftrightarrow \xi = \varphi_2(\eta))$  è compreso tra i due, poiché  $\varphi_2'(0) = -f_\eta(0,0)/f_\xi(0,0) = q/p$ . Per la (5.28) è allora

$$f(\varphi_2(\eta), \eta) > 0, \quad f(\tilde{\varphi}_2(\eta), \eta) < 0 \quad (\eta \in 0^\circ b)$$

e quindi il ramo  $I_2'$  va scartato, ai fini della risoluzione del problema  $II^*$ . Questa corrisponde invece al ramo  $I_1'$ , poiché  $f(\xi, \eta) > 0$  per  $0 < \xi < \varphi_2(\eta)$ . Perciò  $\varphi(\eta) = \varphi_2(\eta)$ . Ne segue la tesi.

Si noti che  $I_1'$  penetra in  $R$  anche se  $k_2 = 0$ , e  $B'(\eta) > 0$  in  $0 < \eta < h$ . È infatti

$$G^*(\xi, \eta) = B'(\eta) - \int_0^\xi f(x, \eta) dx, \quad > 0 \quad \text{se } \eta > 0, \quad \xi < 0,$$

e quindi, necessariamente,  $\varphi_2(\eta) > 0$  per  $\eta > 0$ .

OSSERVAZIONE VI - È importante osservare che le (5.48) non sono sufficienti a garantire l'esistenza di un dominio di appoggio.

Si richiede infatti, per poter applicare la legge  $c_2$ , che, per  $\eta > 0$ , il grafico di  $I_1'$  sia al di sopra di quello di  $I_1$ .

Questa condizione è soddisfatta se  $\varphi_2'(0) < 1/\psi_1'(0)$ , cioè (per le (5.48) e (5.57)) se

$$(5.58) \quad \frac{q - \sqrt{q^2 - k_2 p}}{p} < \frac{q}{p + \sqrt{p^2 + k_1 q}}$$

mentre non è soddisfatta se vale la diseguaglianza opposta:

$$(q - \sqrt{q^2 - k_2 p})/p > q/(p + \sqrt{p^2 + k_1 q}).$$

In questo caso non esiste il dominio di appoggio e la soluzione del problema vincolato coincide, in  $R$ , con quella del problema libero:  $\gamma(\xi, \eta) = u(\xi, \eta) > 0$ , ove  $u(\xi, \eta)$  è data dalla (5.38).

Ad esempio, se  $k_2 = 0$ , il dominio di appoggio esiste se  $k_1 < \frac{1}{2}(q^2/p)$ , non esiste se  $k_1 > \frac{1}{2}(q^2/p)$ . Per  $k_2 = \frac{1}{2}(q^2/p)$ , si hanno entrambe le possibilità. Posto infatti

$$A(\xi) = 0, \quad B(\eta) = \frac{q^2 \eta^2}{8p} + \sigma \eta^4, \quad f(\xi, \eta) = -p\xi + q\eta,$$

con  $\sigma$  costante reale, si ha, per la (5.38),

$$u(\xi, \eta) = \frac{q^2 \eta^2}{8p} + \sigma \eta^4 + p \frac{\xi^2}{2} - q^2 \frac{\eta^2}{2} = \frac{1}{2p} \left( \frac{q^2}{2} - p\xi \right)^2 + \sigma \eta^4$$

e quindi:

$$u(\xi, \eta) > 0 \text{ se } \sigma > 0; \quad u\left(\xi, \frac{2p\xi}{q}\right) = \sigma \left(\frac{2p\xi}{q}\right)^4. \quad < 0 \text{ se } \sigma < 0.$$

## 6. - PROLUNGAMENTO OLTRE LA LINEA DI INFLUENZA

a) Sia  $A_1$  la (prima) linea di influenza (cfr. la nota al § 1).

La supporremo formata da un numero finito di archi con orientamento di spazio (soddisfacenti all'ipotesi  $i_h$ ) del § 2) e da un numero finito di segmenti caratteristici.

Il procedimento che segue conduce alla costruzione di una seconda linea, che diremo ancora *di influenza*,  $A_2$ , avente la stessa struttura di  $A_1$  e priva di punti comuni con questa. Precisamente,  $A_2$  risulterà al di sopra di  $A_1$  ma non al di sopra della spezzata caratteristica (con la quale può anche coincidere):

$$N_1 N_2 \dots N_9 N_{10}$$

della figura 6.1.

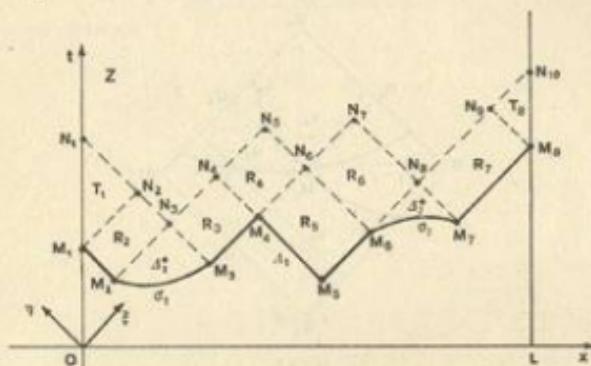


Fig. 6.1

Designneremo, al solito, con  $\eta(\xi, \eta)$ , o con  $\tau^+(\xi, \eta)$ , le soluzioni del problema non vincolato, per l'equazione  $\tau_{\eta\eta} = -f$ , e definite nei domini che occorre considerare.

Osserviamo anzitutto che, nel caso generale, la linea  $A_1$  può contenere delle coppie  $(\eta, \xi)$  di segmenti caratteristici (in figura la coppia  $M_4 M_5 M_6$ ): questa circostanza, come è noto, non si presenta se  $f(\xi, \eta) < 0$  in  $Z$ .

Si ottengono facilmente delle condizioni che escludono, o ammettono, la presenza di coppie siffatte. Precisamente, la coppia  $(\eta, \xi)$  non si può presentare se:

1) è  $\tau(M_4) > 0$ ;

2) è  $\tau(M_5) = 0$  e  $\tau(P) \in C^1(U)$  — con  $U$  conveniente intorno completo di  $M_5$  — ma le derivate prime,  $\tau_\xi(M_5)$  e  $\tau_\eta(M_5)$ , non sono entrambe nulle;

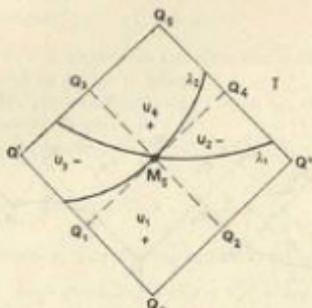
3) è  $\tau(M_5) = \tau_\xi(M_5) = \tau_\eta(M_5) = 0$  e  $\tau(P) \in C^2(U)$ , ma  $M_5$  è un punto ellittico, o iperbolico, per la superficie  $\tau = \tau(\xi, \eta)$ .

*La coppia  $(\eta, \xi)$  può invece presentarsi se  $M_5$  è un punto parabolico, anche nell'ipotesi che  $\tau(\xi, \eta)$  sia funzione analitica in  $U$  (cfr. l'esempio 2)).*

Le condizioni 1) e 2) sono evidenti. Infatti, se vale la 1),  $\tau(P) > 0$  in tutto un intorno  $U$  di  $M_5$ , contro la definizione di linea di influenza. Se poi

vale la 2) si ha necessariamente  $\zeta(\xi, \eta_0) > 0$  in un intorno completo  $U_\delta$  del punto  $\xi_0$  (sulla retta  $\eta = \eta_0$ ): essendo  $\zeta(\xi_0, \eta_0) = 0$  è allora  $\zeta_\xi(\xi_0, \eta_0) = 0$ . Allo stesso modo, si ha  $\zeta_\eta(\xi_0, \eta_0) = 0$ .

Consideriamo ora la condizione 3). Se  $M_4$  è un punto ellittico, e  $U$  abbastanza piccolo, la superficie  $\tilde{\gamma} = \tilde{\gamma}(\tilde{s}, \eta)$  si trova, in tutto  $U - \{M_4\}$ , strettamente al di sopra del piano  $(\tilde{s}, \eta)$ : perciò la spezzata  $Q_3 M_4 Q_4$  (che è  $\in M_4 M_5 M_6$ ) non può far parte della linea di influenza.



月 62

Supponiamo ora che  $M$  sia un punto eterodimico, sia cioè

$$(6.1) \quad \bar{v}_{+}(M_2)\bar{v}_{-}(M_2)-\bar{v}_{-}^2(M_2)=\bar{v}_{-}(M_2)\bar{v}_{-}(M_2)-f^2(M_2)\leq 0.$$

In tal caso,  $M_5$  è un punto doppio nodale per la linea di equazione  $\zeta(\xi, \eta) = 0$ ; per  $M_5$  passano due rami,  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ , i quali suddividono  $U$  in 4 parti:  $U = U_1 \cup U_2 \cup U_3 \cup U_4$ .

All'interno di  $U_1$ ,  $\zeta(\xi, \eta)$  ha segno costante, ed opposto a quello assunto all'interno delle parti continue.

Detto  $R_4$  il dominio rettangolare  $M_{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3}$  e posto  $S = U - R_4$ , è  $\varphi(\xi, \eta)|_S > 0$ . Perciò né  $\lambda_1$  né  $\lambda_2$  possono penetrare all'interno di  $S$ . È allora  $\tilde{L} \cup L \subset R_4$ , risultato manifestamente assurdo.

E dunque necessario, affinché  $M_0 M_1 M_2 \subset A_1$ , che sia almeno delle derivate prime  $\tau_1, \tau_2$  sia discontinua in  $M_2$ , o che sia discontinua una delle derivate seconde  $\tau_{11}, \tau_{22}$ . Poiché  $\tau_{11} = -f_1, \tau_{22} = -f_2$ , questa circostanza si desume dalla collezionazione, sulla frontiera  $\partial Z$ , delle discontinuità nelle derivate dei dati iniziali e ai limiti.

*Esemp.* — 1) Consideriamo, per l'equazione  $\xi_0 = -1$ , il problema di Cauchy, nel semiplano  $t > -1/\sqrt{2}$ , cioè  $\xi + \eta > -1$ . Il dato iniziale  $\xi(t = -1 - \tilde{\epsilon}) = \xi_0(\tilde{\epsilon})$  deve essere  $> 0$ , per la teoria della (1.5).

Si assegnano immediatamente delle condizioni sufficienti perché questo avvenga e la linea di influenza sia costituita dai due semiasse  $\{\xi > 0, \eta = 0\}$ ,  $\{\xi = 0, \eta > 0\}$ .

Definiamo l'integrale  $\zeta(\xi, \eta)$  nell'intero piano  $(\xi, \eta)$  ponendo le condizioni:

$$\zeta(\xi, 0) = A(\xi) \begin{cases} > 0 & \text{per } \xi > 0, \\ = k\xi^2 & \text{per } \xi < 0, \end{cases} \quad \zeta(0, \eta) = B(\eta) \begin{cases} > 0 & \text{per } \eta > 0, \\ = m\eta^2 & \text{per } \eta < 0. \end{cases}$$

$A(\xi)$  e  $B(\eta)$  sono funzioni arbitrarie, di  $C^2(0^+ \cup -\infty)$  e tali che

$$A'(0) = B'(0) = A''(0) = B''(0) = 0;$$

$k$  ed  $m$  sono costanti  $> 0$ .

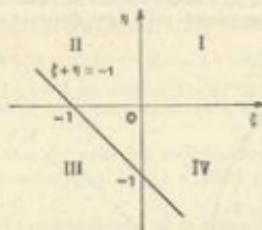


Fig. 6.3

Si ha,  $\nabla(\xi, \eta)$ ,

$$\zeta(\xi, \eta) = A(\xi) + B(\eta) - \xi\eta.$$

Nei quadranti II, IV e III si ha rispettivamente:

$$\zeta(\xi, \eta) = k\xi^2 + B(\eta) - \xi\eta, \quad > 0 \text{ per } \xi < 0, \eta > 0,$$

$$\zeta(\xi, \eta) = A(\xi) + m\eta^2 - \xi\eta, \quad > 0 \text{ per } \eta < 0, \xi > 0,$$

$$\zeta(\xi, \eta) = k\xi^2 + m\eta^2 - \xi\eta = (\sqrt{k}\xi - \sqrt{m}\eta)^2 + (2\sqrt{km} - 1)\xi\eta, \quad > 0 \text{ se } km > \frac{1}{4}.$$

Basta pertanto supporre  $km > \frac{1}{4}$  perché sia soddisfatta la condizione  $\zeta_0(\xi) > 0, \forall \xi$ .

Nel primo quadrante si ha:

$$\zeta(\xi, \eta) = A(\xi) + B(\eta) - \xi\eta$$

e se vi fosse continuità delle derivate seconde ( $A''(0) = 2k, B''(0) = 2m$ ) si avrebbe  $\zeta_{xx}(0, 0)\zeta_{yy}(0, 0) - \zeta_{xy}^2(0, 0) = 4km - 1 > 0$ ; pertanto l'origine sarebbe un punto ellittico per la superficie  $\zeta = \zeta(\xi, \eta)$ . Se invece si ha  $A''(0)B''(0) < 1$  (e quindi, necessariamente, discontinuità in una derivata seconda, almeno), l'origine è un punto di appoggio.

2) Sia  $f(\xi, \eta) = 1 + \xi + \eta$ . L'equazione  $\zeta_{xx} = -(1 + \xi + \eta)$  ammette, come integrale particolare, la funzione

$$\tilde{\zeta}(\xi, \eta) = \frac{(\xi + \eta)^2}{2} - \frac{(\xi + \eta)^3}{6} = \xi^2 - \frac{\sqrt{2}}{3}\rho^3,$$

analitica (e reale) in tutto il piano  $(\xi, \eta)$ . Consideriamo il semiplano  $\xi + \eta > -1$ . La traccia  $\tilde{\zeta}(\xi, -\xi - 1)$

sulla frontiera ( $t = -1/\sqrt{2}$ ) è la funzione

$$\tilde{\varepsilon}(\xi, -\xi - 1) = \frac{(2\xi + 1)^2}{2} + \frac{1}{6} = \xi^2 + \frac{1}{6} \quad > 0 \text{ e analitica.}$$

Si ha  $\tilde{\varepsilon}(\xi, \eta) > 0$  nei punti esterni alla parabola semicubica  $\Gamma_1$ ,  $x^2 = \sqrt{2}\rho/3$ ; si ha  $\tilde{\varepsilon}(\xi, \eta) < 0$  nei punti interni. L'origine è un punto singolare parabolico ed è punto di appoggio per il problema vincolato. La linea di appoggio,  $\Gamma_1$ , è (per le (3.20) e (3.21)) un arco della parabola di equazione

$$\tilde{\varepsilon}_t(\xi, \eta) = (\xi - \eta) - \frac{(\xi + \eta)^2}{2} = 0, \quad \text{cioè } \sqrt{2}x = t^2,$$

La (prima) linea di influenza,  $A_{1+}$ , è dunque costituita dal segmento  $(0 < \xi < 3, \eta = 0)$ , dal successivo arco di  $\Gamma_1$  con  $\xi > 3$ , e aggiungendo poi la figura simmetrica rispetto all'asse  $t$ .

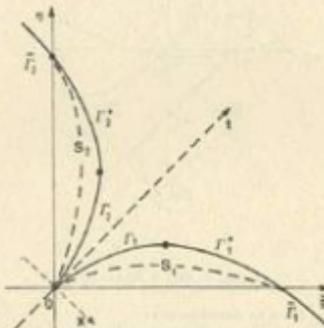


Fig. 6.4

Osserviamo che  $\Gamma_1$  ha equazione esplicita

$$\eta = \varphi_1(\xi) = -(1 + \xi) + \sqrt{1 + 4\xi}, \quad \text{cioè } \xi = \varphi_1(\eta) = 1 - \eta - \sqrt{1 - 4\eta}$$

ove  $0 < \xi < \frac{1}{2}$  (massimo intervallo in cui  $\varphi_1(\xi) \neq \uparrow$ : il valore massimo di  $\eta = \varphi_1(\xi)$  è perciò  $\eta = \frac{1}{2}$ ).

La soluzione  $y(\xi, \eta)$  del problema vincolato si ottiene ponendo anzitutto  $y(\xi, \eta) = \tilde{\varepsilon}(\xi, \eta)$  al di sotto della linea  $A_{1+}$ , e su questa.

Calcoliamo ora il prolungamento di  $y(\xi, \eta)$  al di sopra del segmento  $0 < \xi < 3$ . Si considera per questo, nel dominio  $\{\varphi_1(\eta) < \xi < 3, 0 < \eta < \frac{1}{2}\}$  la seguente funzione (soluzione del problema  $II^*$  finché  $\varphi_1(\eta) < \xi < \frac{3}{2}$ ):

$$\begin{aligned} \tau(\xi, \eta) &= A(\xi) - A(\varphi_1(\eta)) - \int_{\varphi_1(\eta)}^{\xi} dx \int_0^{\eta} f(x, \beta) d\beta = \tilde{\varepsilon}(\xi, \eta) - \tilde{\varepsilon}(\varphi_1(\eta), \eta) - \int_{\varphi_1(\eta)}^{\xi} (x - \eta) \tau_M(x, \eta) dx = \\ &= \int_{\varphi_1(\eta)}^{\xi} (\xi - x) \tilde{\varepsilon}_M(x, \eta) dx - \int_{\varphi_1(\eta)}^{\xi} (\xi - x)(1 - x - \eta) dx - \int_{\varphi_1(\eta)}^{\xi} (\xi - x)((\xi - x) + (1 - \xi - \eta)) dx = \\ &= \frac{(\xi - \varphi_1(\eta))^3}{3} + \frac{(\xi - \varphi_1(\eta))^2}{2} (1 - \xi - \eta) = \frac{(\xi - \varphi_1(\eta))^2(\varphi_1^*(\eta) - \xi)}{6}. \end{aligned}$$

ove

$$\varphi_1^*(\eta) = 1 - \eta + 2\sqrt{1 - 4\eta}.$$

Poiché

$$\tau(\xi, \eta) > 0 \quad \text{nel dominio } S_1 = \{\varphi_1(\eta) < \xi < \varphi_1^*(\eta), 0 < \eta < \frac{1}{2}\},$$

si ottiene il prolungamento cercato ponendo

$$y(\xi, \eta) = \tau(\xi, \eta) \quad \text{in tutto } S_1.$$

La linea  $P_1^*$ ,  $\xi = \varphi_1^*(\eta)$ , è una *linea di arco*. Si tratta di un arco di parabola che, nelle coordinate  $(x, t)$ , ha equazione  $4\sqrt{2}x = (\xi + 3/\sqrt{2})^2 - 6$ .

In modo del tutto analogo si prolunga  $y(\xi, \eta)$  nel dominio  $S_2 = \{\varphi_1(\xi) < \eta < \varphi_2^*(\xi)\}$ , simmetrico di  $S_1$  rispetto all'asse  $t$ .

Si pone infine (per la legge di estinzione  $\epsilon_0$ )  $y(\xi, \eta) = 0$  nel *dominio di appoggio*

$$\mathcal{A} = \{\eta < \xi < \varphi_1(\eta), 0 < \eta < \frac{1}{2}\} \cup \{\xi < \eta < \varphi_2(\xi), 0 < \xi < \frac{1}{2}\}.$$

Poiché  $f(\xi, \eta) = 1 + \xi + \eta > 0$  nel quadrato  $A' = (\frac{1}{2}, 1) \times (\frac{1}{2}, 1)$  e poiché  $y(\xi, \eta) = 0$  sui due lati concorrenti nel vertice  $(\frac{1}{2}, 1)$ , risulterà così (per la legge  $\epsilon_0$ )  $y(\xi, \eta) = 0$  in tutto  $A'$ .

b) Ricordiamo che, per calcolare la soluzione  $y(\xi, \eta)$  del problema vincolato, si è posto anzitutto  $y(\xi, \eta) = \tau(\xi, \eta)$  nella parte di  $Z$  delimitata superiormente dalla linea  $A_1$ .

Si effettuerà ora il prolungamento al di sopra di  $A_1$ , considerando le sue parti  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$ ,  $M_6M_5M_6$ ,  $M_1M_2$ , ...,  $M_7M_8$  e infine i segmenti  $M_2N_1$  e  $M_8N_{10}$ . Supponiamo, per maggior generialità, che sia  $\tau_{\xi}|_{\sigma_1} < 0$ ,  $\tau_{\eta}|_{\sigma_1} < 0$  (sicché  $\sigma_1$  risulterà una *linea di arco*), e che sia  $\tau_{\xi}|_{\sigma_2} = 0$ ,  $\tau_{\eta}|_{\sigma_2} = 0$  (sicché  $\sigma_2$  risulterà una *linea di appoggio*, tutta formata da punti di stazionarietà per la superficie  $\zeta = \tau(\xi, \eta) = -y = y(\xi, \eta)$ ).

Per effettuare il prolungamento oltre  $\sigma_1$ , si procede come nel § 4, facendo l'ipotesi che l'estremo  $M_6$  (e analogamente per  $M_8$ ) sia punto *non singolare* di  $\sigma_1$  ( $\tau_{\xi}^2 + \tau_{\eta}^2 > 0$ ) o, al più, essendo  $\tau_{\xi} = \tau_{\eta} = 0$ , punto *iperbolico* della superficie  $\zeta = \tau(\xi, \eta)$ .

Sia  $\zeta^*(\xi, \eta)$  la soluzione, nel triangolo mistilineo  $A_1^*$ , del problema di Cauchy per l'equazione  $\zeta_{t_0} = -f$ , con le condizioni

$$(6.2) \quad \zeta^*|_{\sigma_1} = \zeta|_{\sigma_1} = 0, \quad \zeta^*|_{\sigma_2} = -\zeta_{\xi}|_{\sigma_2} > 0 \quad (\Rightarrow \zeta^*|_{\sigma_2} = -\zeta_{\eta}|_{\sigma_2} > 0).$$

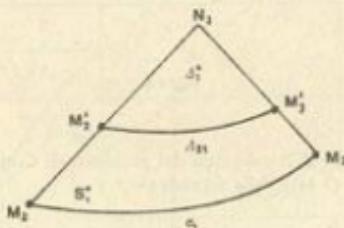


Fig. 6.5

Consideriamo la linea di influenza,  $A_{21} \subset A_1^+$ , relativa a tali dati. È ovviamente  $A_{21} \cap \delta_1 = \emptyset$  (cioè  $A_{21}$  e  $\sigma_1$  non hanno punti interni comuni).

Ma, in più, a causa del comportamento ammesso per  $\tau(\xi, \eta)$ , la linea  $A_{21}$  termina (come visto al § 4, b)) con due segmenti caratteristici,  $M_4M_5$  e  $M_4M_6$ , *non nulli*. Si ha dunque  $\tau^+(\xi, \eta) > 0$  in tutto il dominio  $S_1^+ \subset A_1^+$  della figura 6.5. In virtù della legge (I) di esistenza (ovviamente adattata al caso presente), si prolunga la definizione di  $\gamma(\xi, \eta)$  a  $S_1^+$  ponendo

$$(6.3) \quad \gamma(\xi, \eta)|_{S_1^+} = \tau^+(\xi, \eta)|_{S_1^+}.$$

In particolare, si ha

$$(6.4) \quad \gamma(\xi, \eta)|_{M_4M_5} > 0, \quad \gamma(\xi, \eta)|_{M_4M_6} > 0.$$

c) Effettuato questo primo prolungamento, si consideri l'arco  $\sigma_2$ , sul quale è

$$(6.5) \quad \tau|_{\sigma_2} = 0, \quad \tau_\xi|_{\sigma_2} = 0 \quad (\Rightarrow \tau_\eta|_{\sigma_2} = 0).$$

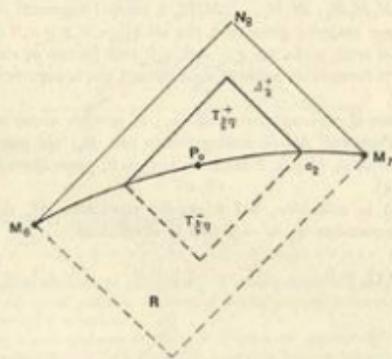


Fig. 6.5

Nel dominio  $R \cap Z$  la soluzione del problema di Cauchy relativo ai dati (6.5) è data (cf. la (3.44)) dalla formula:

$$(6.6) \quad \tau(\xi, \eta) = - \int_{T_{21}}^f f(x, \beta) dx d\beta.$$

Per ipotesi (cfr. il § 1, a), fig. 1.2), l'insieme

$$\Omega^+ = \{P : f(P) > 0\}$$

soddisfa alla proprietà  $\mathcal{T}$ .

Dimostriamo che  $\sigma_2 \subset \partial\Omega^+$ . Supponiamo infatti che questo non sia per un punto  $P_0 \in \sigma_2$ . Allora  $P_0$  è interno a  $\Omega^+$  oppure esterno a  $\Omega^+$ . Nel primo caso è  $f(P_0) > 0$ , e quindi (in virtù della (6.6) con  $T_{20} = T_{20}'$ )  $\zeta(P) < 0$  in punti al di sotto di  $\sigma_2$ , ciò che è assurdo. Anche la seconda circostanza è assurda: si avrebbe infatti  $f(\xi, \eta) < 0$  in tutto un intorno di  $P_0$ , e quindi (per la (6.6) con  $T_M = T_{20}'$ ) sarebbe  $\zeta(\xi, \eta) > 0$  in tutto un dominio  $T_{20}'$ , al di sopra di  $\sigma_2$ , contro l'ipotesi che  $\sigma_2 \subset A_1$ . E dunque  $\sigma_2 \subset \partial\Omega^+$  (per un certo  $A$ ; fig. 1.2). Precisamente,  $\sigma_2$  fa parte della frontiera, dal basso, di uno degli aperti connessi in cui è  $f(P) > 0$ .

Consideriamo ora l'intersezione  $A_2^+ \cap \bar{\Omega}^+$ . Se  $A_2^+ \subset \bar{\Omega}^+$ , si effettua il  *prolungamento* di  $y(\xi, \eta)$  ponendo (legge  $\epsilon_2$ ):

$$(6.7) \quad y(\xi, \eta) = 0 \quad \text{in tutto } A_2^+.$$

In caso contrario, per la proprietà  $\mathcal{T}$ , la linea  $\sigma_{k+1}'$  interseca  $A_2^+$  secondo un s-arco  $A_{22}$ , ed è  $f > 0$  all'interno del quadrilatero (curvo)  $S_2^+$  delimitato inferiormente da  $\sigma_2$ , superiormente da  $A_{22}$ , lateralmente da due segmenti caratteristici *ma nulli*  $M_4M'_4, M_5M'_5$ . Si effettua allora il *prolungamento* ponendo (come nella (6.7)), per la legge  $\epsilon_2$ :

$$(6.8) \quad y(\xi, \eta) = 0 \quad \text{in tutto } S_2^+$$

(cf. la figura 6.5, in cui si legga  $\sigma_2, A_2^+, A_{22}, S_2^+, M_4, M'_4, M_5, M'_5, N_4, N'_4, N_5, N'_5$ , in luogo di  $\sigma_1, A_1^+, A_{11}, S_1^+, M_1, M'_1, M_2, M'_2, N_1, N'_1$ ).

d) Consideriamo la coppia  $(\eta, \xi)$ ,  $M_4M_5M_6$ , e il corrispondente rettangolo caratteristico  $M_4M_5M_6N_6$ . Sui lati  $M_4M_6$  e  $M_4M_5$  si ha, rispettivamente

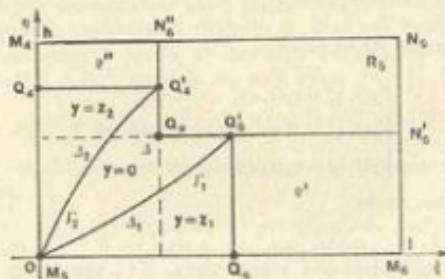


Fig. 6.7

mente

$$(6.9) \quad \begin{cases} \gamma(\xi, \eta_0) = \zeta(\xi, \eta_0) = A(\xi) > 0 & (A(\xi_0) = 0), \\ \gamma(\xi_0, \eta) = \zeta(\xi_0, \eta) = B(\eta) > 0 & (B(\eta_0) = 0). \end{cases}$$

Per semplicità di scrittura poniamo  $\xi_0 = \eta_0 = 0$ ,  $\xi_1 = l$ ,  $\eta_1 = b$ , sicchè  $R_5$  diventa il rettangolo della figura 6.7.

Consideriamo, per l'equazione  $\zeta_{\eta} = -f$  e per i dati  $A(\xi)$  e  $B(\eta)$ , la soluzione del problema di Darboux:

$$(6.10) \quad \zeta(\xi, \eta) = A(\xi) + B(\eta) - \int_0^{\xi} dx \int_0^{\eta} f(x, \beta) d\beta.$$

Procediamo ora come in c), tenendo presenti le circostanze che, a priori, possono presentarsi:

- 1) esiste  $R' \subset R$  tale che  $\zeta(\xi, \eta) > 0$  in tutto  $R'$ ,
- 2) un tale rettangolo non esiste.

Nel nostro caso però la 1) non può aver luogo perchè  $\zeta(\xi, \eta)$  sarebbe prolungabile a tutto  $R'$  mediante la (6.10) e il punto  $M_5$  non apparterebbe a  $A_1$ .

Si verifica perciò, necessariamente, la circostanza 2).

Si è dunque ricondotti nell'ambito del problema  $II^*$ , e delle corrispondenti leggi di prolungamento  $c_1$ ,  $c_2$ ,  $c_3$ : § 3, 4, 5.

In particolare, se  $\zeta < 0$  e  $f > 0$  in  $R_5$ , tutto  $R_5$  è dominio di appoggio e si potrà (per la  $c_3$ ):

$$(6.11) \quad \gamma(\xi, \eta) = 0 \quad \text{in tutto } R_5.$$

Supponiamo ora, ad esempio, di poter applicare la legge  $c_2$ . In tal caso esistono due linee di appoggio:

$$\Gamma_1 = M_5 \mathcal{Q}_1, \quad \Gamma_2 = M_5 \mathcal{Q}_2.$$

Si prosegue allora  $\gamma(\xi, \eta)$  ponendo

$$(6.12) \quad \begin{cases} \gamma(\xi, \eta) = \zeta_1(\xi, \eta) & \text{in } A_1, \\ \gamma(\xi, \eta) = 0 \text{ nel dominio di appoggio } A, \\ \gamma(\xi, \eta) = \zeta_3(\xi, \eta) & \text{in } A_3. \end{cases}$$

In particolare, risulta

$$(6.13) \quad \gamma(\xi, \eta)|_{\partial D_1} > 0, \quad \gamma(\xi, \eta)|_{\partial D_3} > 0.$$

Si deve ora proseguire nel prolungamento di  $\gamma(\xi, \eta)$ , considerando i rettan-

goli  $\varrho'$  e  $\varrho''$  per i quali sono ormai conosciuti i valori sulle spezzate  $\mathcal{Q}_a \mathcal{Q}_b M_4$  e  $M_4 \mathcal{Q}_a \mathcal{Q}_b$ .

Consideriamo, ad esempio,  $\varrho'$ . In questo caso, se si è ancora nella circostanza 2), si deve ripetere quanto già fatto per il rettangolo  $R_4$ . In caso contrario (cioè se vale la 1)) si procede nel modo seguente.

Costruiamo (come nella nota (7) al § 1) la linea di influenza  $\tilde{\lambda}$  relativa alla condizione che sia  $\xi(\tilde{\xi}, \eta) > 0$  al di sotto di  $\tilde{\lambda}$ . Questa linea è formata (nelle ipotesi del § 2) da un numero finito di  $s$ -archi e di segmenti caratteristici.

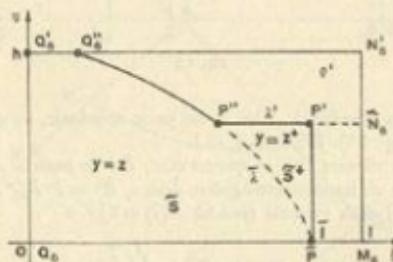


Fig. 6.8

Posto ancora (per comodità di scrittura)  $\mathcal{Q}_a = (0, 0)$ ,  $\mathcal{Q}_b = (0, b)$ ,  $M_4 = (\ell, 0)$ , sia dapprima  $A(\tilde{\xi}) > 0$  in  $0^{-}I$ ,  $B(\eta) > 0$  in  $0^{-}b$ . Allora  $\tilde{\lambda}$  ha necessariamente per estremi i punti  $M_4$  e  $\mathcal{Q}_b$ . Anzi, se anche  $B(b) > 0$ ,  $\tilde{\lambda}$  ha una parte terminale costituita da un segmento caratteristico  $\mathcal{Q}_b \mathcal{Q}_b$  non nullo (e analogamente per  $A(\ell)$ ).

Se poi è  $A(\tilde{\xi}) = 0$  in punti interni a  $0^{-}I$ , la linea  $\tilde{\lambda}$  può terminare in un punto  $\tilde{P}(I, 0)$ , con  $I \in 0^{-}I$  tale che  $A(I) = 0$ .

Possono allora presentarsi due eventualità.

Nella prima, come nella figura 6.8, la parte terminale di  $\tilde{\lambda}$  è un  $s$ -arco. Si procede allora come nel § 4. Nelle ipotesi colà ammesse, la  $\xi(\tilde{\xi}, \eta)$  viene prolungata (con la condizione di rimbalzo su  $\tilde{\lambda}$ ) in una funzione  $\xi'(\tilde{\xi}, \eta)$  la quale è  $> 0$  nel triangolo (curvo)  $\tilde{S}^+$  delimitato dall'arco  $\tilde{P}^+ \tilde{P}^-$  e dai segmenti caratteristici  $\tilde{P}^+ \tilde{P}^-$  e  $\tilde{P}^- \tilde{P}$ , entrambi non nulli. Posto

$$(6.14) \quad \gamma(\tilde{\xi}, \eta) = \xi(\tilde{\xi}, \eta) \text{ in } \tilde{S}^+, \quad \gamma(\tilde{\xi}, \eta) = \xi'(\tilde{\xi}, \eta) \text{ in } \tilde{S}^+.$$

la soluzione  $\gamma(\tilde{\xi}, \eta)$  risulta perciò prolungata a tutto il dominio  $\tilde{S} \cup \tilde{S}^+$  e si ha, in particolare,

$$(6.15) \quad \gamma(\tilde{\xi}, \eta)|_{\tilde{S}^+} > 0, \quad \gamma(\tilde{\xi}, \eta)|_{\tilde{P}^- \tilde{P}} > 0.$$

La linea di influenza  $\lambda'$  ora definita consta della parte  $\mathcal{Q}_a \mathcal{Q}_b \tilde{P}^+$  della linea  $\tilde{\lambda}$  e della spezzata  $\tilde{P}^+ \tilde{P} \tilde{P}$  (fig. 6.8).

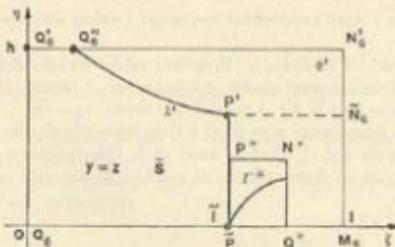


Fig. 6.9

Nella seconda possibilità,  $\lambda$  ha, come parte terminale, un segmento caratteristico  $P\bar{P}$  (fig. 6.9). È allora  $\lambda' = \bar{I}$ .

E' importante rilevare che, in questo caso,  $\bar{P}$  è un punto di appoggio. Infatti, preso ad arbitrio un intorno rettangolare destro,  $R^* = P^*\bar{P}Q^*N^*$ , la funzione  $\xi(\bar{x}, \eta)$  è data ivi dalla formula (poiché  $A(\bar{I}) = 0$ ) :

$$(6.16) \quad \xi(\bar{x}, \eta) = A(\bar{x}) + \xi(\bar{I}, \eta) - \int_{\bar{I}}^{\bar{x}} dx \int_0^\eta f(x, \beta) d\beta$$

ed esistono punti di  $R^*$  nei quali  $\xi$  è < 0: in caso contrario esisterebbe un intorno  $R^* \subset \bar{J}$ , ciò che è assurdo. La tesi è dunque provata.

Si procede ora nel rettangolo  $P\bar{P}M_0\bar{N}_0$  come per il precedente, e così di seguito.

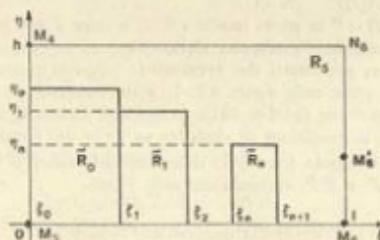


Fig. 6.10

E' chiaro che, così proseguendo nella direzione dell'asse  $\xi$  (e analogamente per l'asse  $\eta$ ), si ottengono dei rettangoli, che designiamo con  $R_0, R_1, \dots, R_n, \dots$  di altezza  $\eta_0 > \eta_1 > \eta_2 > \dots > \eta_n > \dots > 0$  e di basi  $\xi_1 - \xi_0, \xi_2 - \xi_1, \dots, \xi_{n+1} - \xi_n, \dots$

Dimostriamo che i rettangoli  $R_n$  sono in numero finito.

Infatti (per l'ipotesi ammessa nel § 2) gli archi e i segmenti caratteristici della frontiera  $\partial K$  intersecano in numero finito il rettangolo  $R_2$ . Perciò i punti terminali, su  $\partial R_2$ , di archi come  $P\widehat{P}$  della figura 6.8, o  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$  della figura 6.7 (o  $\Gamma^*$  della figura 6.9), sono in numero finito. Esiste dunque un intero  $q$  tale che per  $n > q$  non esistano più, su  $\partial R_n$ , punti siffatti. Allora la linea di influenza  $\lambda'_n$  relativa al rettangolo  $R_n$  termina necessariamente con un segmento *non nullo*, che diremo ancora  $M_5M'_5 \subset M_5N_5$ .

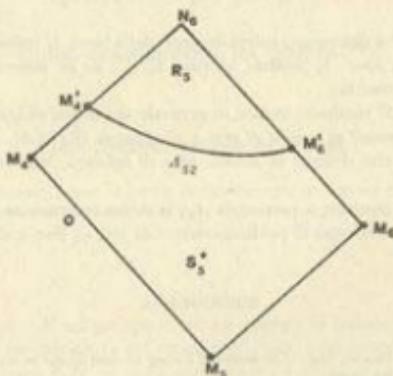


Fig. 6.11

In conclusione: abbiamo *prolungato* la soluzione  $j(\xi, \eta)$  ad una parte  $S_5^*$  del rettangolo  $R_5$  delimitata inferiormente dalla spezzata  $M_4M_5M_6$ , e superiormente da una *linea di influenza*  $A_{32}$  avente in comune con  $M_4M_5M_6$  solo gli estremi  $M_4$  e  $M_6$ . La linea  $A_{32}$  consta di un numero finito di *v-archi* e di *segmenti caratteristici*. Due di questi,  $M_4M'_4$  e  $M_4M'_5$ , entrambi *non nulli*, ne costituiscono le parti terminali. In particolare:

$$(6.17) \quad j(\xi, \eta)|_{M_4M'_4} > 0, \quad j(\xi, \eta)|_{M_4M'_5} > 0.$$

e) Il prolungamento agli altri rettangoli è immediato. Ad esempio, per  $R_3$ , conosciamo la traccia di  $j(\xi, \eta)$  sul segmento  $M_1M_2$  e, per quanto visto in d), su un segmento  $M_2M'_2 \subset M_2N_2$ . Per la spezzata  $M_3M_2M'_2$  si procede come in d), per  $M_4M_5M_6$ .

Si conosce così, in particolare, la traccia di  $j(\xi, \eta)$  su un segmento  $M_1M'_1 \subset M_2N_2$ .

La costruzione della linea di influenza  $A_{21}$  relativa alla spezzata  $N_1M_1M'_1$  (problema di Goursat) è anch'essa immediata; poiché  $j(\xi, \eta)|_{M_2N_2} > 0$ , la linea

$A_{21}$  inizia con un segmento  $\eta$ -caratteristico (spiccatto da un punto  $N_1^* \in M_1 N_1$  e  $\neq M_1$ ) e termina con un segmento  $\xi$ -caratteristico, *sia mille*,  $M_1 M_1^* \subset M_1 M_1' \subset \subset M_1 N_2$ . Inoltre  $A_{21} \cap A_1 = \emptyset$ . In questo modo la soluzione  $y(\xi, \eta)$  risulta *prolungata* a un dominio  $\tilde{T}_1$  contenuto in  $T_1$ , con proprietà del tutto analoghe ai casi precedenti.

Si faccia ora la riunione,  $S^*$ , dei domini nei quali si è effettuato il prolungamento di  $y(\xi, \eta)$ :

$$(6.18) \quad S^* = S_1^* \cup S_2^* \cup S_3^* \cup \dots \cup \tilde{T}_1 \cup \tilde{T}_2.$$

Il dominio  $S^*$  è delimitato inferiormente dalla linea di influenza  $A_1$  e superiormente da una linea  $A_2$  formata, al pari di  $A_1$ , da un numero finito di s-archi e di segmenti caratteristici.

Nel dominio  $S^*$  risultano inclusi, in generale, dei *domini di appoggio*, in numero finito, e parti terminali di s-archi di urto e di appoggio (fig. 6.8).

La linea  $A_2$ , che diremo la *seconda linea di influenza*, non ha punti in comune con  $A_1$ .

Si può allora ripetere, a partire da  $A_2$ , la stessa costruzione operata per  $A_1$ : così di seguito, si effettua il prolungamento di  $y(\xi, \eta)$  fino a che sia possibile.

#### BIBLIOGRAFIA

- [1] L. AMERIO - G. PROUZE, *Study of the motion of a string vibrating against an obstacle*, Rend. di Mat., (6) 8, n. 2, 563-585 (1975).
- [2] C. CITERI, *Sull'urto parzialmente elastico e omelastico di una corda vibrante contro un ostacolo*, Atti Acc. Naz. Lincei, (6) 59, 368-376 e n. 6, 667-675 (1975).
- [3] L. AMERIO, *Continuous solutions of the problem of a string vibrating against an obstacle*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, 59, 67-96 (1978).
- [4] B. D'ACUNTO, *Sull'urto elastico di una corda in un caso non lineare*, Ricerche di Mat., 27, n. 2, 301-317 (1978).
- [5] A. BAMBERGER, *Thèse de Doctorat*, Univ. P. et M. Curie, Paris (1979).
- [6] C. CITERI - B. D'ACUNTO, *Sull'urto tra due corde*, Ricerche di Mat., 28, n. 2, 375-398 (1979).
- [7] M. SCHUTZMAN, *Thèse de Doctorat*, Univ. P. et M. Curie, Paris (1979).
- [8] M. SCHUTZMAN, *A hyperbolic problem of second order with unilateral constraints: the vibrating string with a concave obstacle*, J. Math. Anal. Appl., 73, 138-191 (1980).
- [9] H. CARADES - A. HARAUZ, *Mouvement presque-périodique d'une corde vibrante en présence d'un obstacle fixe, restant au contact*, Int. J. Non-linear Mech., N. 5/6, 449-458 (1981).