Rendiconti
Accademia Nazionale delle Scienze detta dei XL
Memorie di Matematica
101° (1983), Vol. VII, fasc. 12, pagg. 193-200

GIORGIO LETTA (*)

Compacité et convergence des lois d'une suite de processus de comptage (**)

Sulla compattezza e la convergenza delle leggi di una successione di processi di conteggio

SUNTO. Dai criteri generali riguardanti la compattezza e la convergenza delle leggi di una successione di processi (considerate come misure sullo spazio di Skorokhod delle traiettorie), si deducono alcuni semplici criteri riguardanti il caso speciale dei processi di conteggio.

1. - NOTATIONS ET RAPPELS

Comme d'habitude, D désigne l'espace des fonctions réelles réglées et continues à droite sur $\mathbb{R}_+$, muni de la topologie de Skorokhod (voir, par ex. [1]).

Etant donné, sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, un processus réel X, admettant $\mathbb{R}_+$ comme ensemble des temps, nous noterons $[X_t]_{t\in S}$, pour toute partie finie S de $\mathbb{R}_+$, la variable aléatoire

$$\omega \mapsto (X_t(\omega))_{t\in S}$$

(à valeurs dans $\mathbb{R}^S$): sa loi sera appelée la *loi S-marginale* de X.

Par contre, si les trajectoires de X appartiennent à l'espace D, nous appellerons *loi* de X la mesure (sur la tribu borélienne de D) image de P par l'application

$$\omega \mapsto X(\cdot, \omega)$$

de Ω dans D.

Considérons maintenant, pour tout entier n, un processus $X^{(n)}$, à trajec-

(*) Istituto Matematico dell'Università di Pisa.
(**) Memoria presentata il 2 luglio 1983 da Giuseppe Scorza Dragoni, socio dei XL.

ISSN-0392-4106

toires dans D, défini sur un espace probabilisé $(\Omega_n, \mathcal{F}_n, P_n)$. Il est bien connu le résultat suivant (cf. [1], Th. 15.1, p. 124) :

(1.1) THÉORÈME : *Pour que la loi de $X^{(n)}$ converge étroitement vers la loi de X, il suffit que les deux conditions suivantes soient remplies :*

(*a*) *pour toute partie finie S de $\mathbb{R}_+$, la loi S-marginale de $X^{(n)}$ converge étroitement vers la loi S-marginale de X,*

(*b*) *les lois des processus $X^{(n)}$ soient uniformément tendues.*

La condition (*b*) équivaut au fait que les lois des $X^{(n)}$ forment un ensemble relativement compact dans l'espace de toutes les lois de probabilités sur D (muni de la topologie étroite). Elle peut se mettre sous une forme plus explicite. Considérons, à cet effet, pour un intervalle $[0, t[$ fixé (avec $0 < t < \infty$) et pour un nombre réel $\delta > 0$, toutes les partitions finies de $[0, t[$ formées d'intervalles semi-ouverts à droite, tous de longueur supérieure à δ, sauf peut-être celui qui admet t comme borne supérieure. Nous désignerons par $\Pi(t, \delta)$ l'ensemble de toutes ces partitions, et nous poserons, pour tout élément x de D,

$$w'(x, \delta) = \inf_{P \in \Pi(t,\delta)} \sup_{J \in P} \omega_x(J) , \tag{1.2}$$

où $\omega_x(J)$ désigne l'oscillation de x sur J :

$$\omega_x(J) = \sup \{|x(s) - x(r)| : (r, s) \in J \times J\} .$$

Avec ses notations, on a le résultat suivant (cf. [2], p. 4 ; [3], p. 3-4) :

(1.3) THÉORÈME : *Pour que les lois des processus $X^{(n)}$ soient uniformément tendues, il faut et il suffit que les deux conditions suivantes soient remplies :*

(*a*) $\lim_{a \uparrow \infty} \limsup_n P_n \left\{ \sup_{0 \leq s \leq t} |X_s^{(n)}| > a \right\} = 0$ *pour tout* $t > 0$,

(*b*) $\lim_{\delta \downarrow 0} \limsup_n P_n \{\omega : w'(X^{(n)}(\cdot, \omega), \delta) > \eta\} = 0$ *pour tout* $t > 0$ *et tout* $\eta > 0$.

Etant donné, sur un espace $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, une suite $(U_k)_{k \geq 1}$ de variables aléatoires indépendantes, à valeurs dans $]0, \infty[$ et admettant une même loi μ, nous appellerons *processus de comptage* associé à $(U_k)_{k \geq 1}$ le processus X défini par

$$X_t = \sum_{k \geq 1} I_{\{U_1 + \cdots + U_k \leq t\}} . \tag{1.4}$$

Il ne s'agit pas, à proprement parler, d'un processus réel, car il peut prendre aussi la valeur $+\infty$. Toutefois, puisque l'ensemble $\left\{ \sum_{k \geq 1} U_k < +\infty \right\}$ est négligeable (d'après la loi des grands nombres), le processus X est indistinguable d'un processus réel, à valeurs entières et à trajectoires dans D.

(1.5) Remarque: Désignons par $[U_k]_{k\geq 1}$ la variable aléatoire

$$\omega \mapsto (U_k(\omega))_{k\geq 1},$$

à valeurs dans l'espace $]0, \infty[^{\mathbb{N}^*}$ de toutes les suites $u = (u_k)_{k\geq 1}$ de nombres réels strictement positifs. Sur cet espace considérons, pour tout t, la fonction

$$x_t = \sum_{k\geq 1} I_{\{u: u_1 + \ldots + u_k < t\}}. \tag{1.6}$$

On voit alors que la loi S-marginale du processus de comptage X défini par (1.4) est l'image de la loi de $[U_k]_{k\geq 1}$ par l'application

$$u \mapsto (x^t(u))_{t\in S}. \tag{1.7}$$

2. - Convergence des lois marginales d'une suite de processus de comptage

Pour tout n considérons, sur un espace probabilisé $(\Omega_n, \mathcal{F}_n, P_n)$, une suite $(U_k^{(n)})_{k\geq 1}$ de variables aléatoires indépendantes, à valeurs dans $]0, \infty[$ et admettant une même loi μ_n, et désignons par $X^{(n)}$ le processus de comptage associé à $(U_k^{(n)})_{k\geq 1}$. En supposant que la suite (μ_n) converge étroitement sur $]0, \infty[$ vers une loi μ, considérons, sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, une suite $(U_k)_{k\geq 1}$ de variables aléatoires indépendantes de loi μ, et le processus de comptage X associé.

Peut on affirmer que les lois marginales des processus $X^{(n)}$ convergent vers les lois marginales correspondantes du processus X?

Une réponse simple est fournie par le théorème suivant:

(2.1) Théorème: *Supposons que la loi limite μ soit diffuse. Pour toute partie finie S de $\mathbb{R}_+$, la loi S-marginale du processus $X^{(n)}$ converge alors étroitement vers la loi S-marginale du processus X.*

Démonstration: Pour tout entier n, la loi de $[U_k^{(n)}]_{k\geq 1}$ est égale au produit d'une suite de mesures identiques à μ_n.

Elle converge donc étroitement vers la loi ν de $[U_k]_{k\geq 1}$ (qui est égale au produit d'une suite de copies de μ).

Grâce à la remarque (1.5), il suffit donc de vérifier que l'application (1.7), ou — ce qui revient au même — chacune de ses composantes (1.6) — admet un ensemble de points de discontinuité négligeable pour la loi ν (cf. [1], p. 31, Cor. 1).

Remarquons à cet effet que, puisque la loi μ est diffuse, chacune des parties de $]0, \infty[^{\mathbb{N}^*}$ de la forme

$$\{u: u_1 + \ldots + u_k = t\}$$

est négligeable pour la loi ν. Il en résulte que, pour tout t fixé, l'espace $]0, \infty]^{N^*}$ coïncide, à un ensemble ν-négligeable près, avec la réunion des ensembles ouverts de la forme

$$\{n: n_1 + \dots + n_k < t < n_1 + \dots + n_{k+1}\}$$

avec $k > 0$. Il suffit alors de remarquer que la fonction N_t est constante sur chacun de ces ensembles.

3. - Compacité et convergence des lois d'une suite de processus de comptage

Nous nous proposons maintenant de déduire, du critère général de compacité (1.3), un critère très simple concernant le cas particulier où les processus $X^{(n)}$ sont des processus de comptage.

A cet effet nous commencerons par démontrer la proposition suivante:

(3.1) Proposition: *Sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ soit $(U_k)_{k \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, à valeurs dans $]0, \infty[$ et admettant une même loi μ, et désignons par X le processus de comptage correspondant (défini par (1.4)).*

On a alors, pour tout couple t, δ de nombres réels strictement positifs:

$$P\{\omega: w^t(X(\cdot, \omega), \delta) > 0\} < \mu(]0, \delta]) \left(1 + \int X_t \, dP\right).$$

Démonstration: Posons, pour tout entier $k \geq 0$, $S_k = \sum_{1 \leq i \leq k} U_i$. (On a donc $S_0 = 0$). Etant donné un élément ω de Ω tel que l'on ait

$$w^t(X(\cdot, \omega), \delta) > 0, \tag{3.2}$$

désignons par k l'entier déterminé par la relation

$$S_k(\omega) < t < S_{k+1}(\omega).$$

Considérons la partition $\mathcal{T}$ de $[0, t[$ constituée par les intervalles de la forme

$$[S_{i-1}(\omega), S_i(\omega)[, \qquad \text{avec } 1 \leq i \leq k, \tag{3.3}$$

et par l'intervalle $[S_k(\omega), t[$. La trajectoire $X(\cdot, \omega)$ est constante sur chacun des intervalles de $\mathcal{T}$. Par conséquent, si les intervalles (3.3) avaient tous une longueur supérieure à δ, la partition $\mathcal{T}$ serait un élément de $\Pi(t, \delta)$, de sorte que la définition (1.2) donnerait

$$w^t(X(\cdot, \omega), \delta) = 0,$$

en contradiction avec l'hypothèse (3.2). L'un au moins des intervalles (3.3) doit donc avoir une longueur $< \delta$. En d'autres termes, il existe un entier i tel que l'on ait

$$U_i(\omega) < \delta, \qquad 1 \leq i \leq k.$$

On a ainsi démontré l'inclusion suivante [1]:

$$\{\omega : w'(X(\cdot, \omega), \delta) > 0\} \subset \bigcup_{i \geq 1} \{U_i < \delta, S_i < t\}.$$

Il en résulte:

$$P\{\omega : w'(X(\cdot, \omega), \delta) > 0\} \leq \sum_{i \geq 1} P\{U_i < \delta, S_{i-1} < t\} =$$

$$= \mu(]0, \delta[) \sum_{i \geq 1} P\{S_{i-1} < t\} = \mu(]0, \delta[) \sum_{i \geq 1} P\{X_t > i - 1\} = \mu(]0, \delta[)\left(1 + \int X_t \, dP\right).$$

En utilisant la proposition précédente, il est maintenant très facile de déduire, du théorème générale (1.3), le critère particulier suivant:

(3.4) Théorème: *Pour tout n considérons, sur un espace probabilisé $(\Omega_n, \mathcal{F}_n, P_n)$, une suite $(U_k^{(n)})_{k \geq 1}$ de variables aléatoires indépendantes, de même loi μ_n, et désignons par $X^{(n)}$ le processus de comptage correspondant.*

Pour que les lois de ces processus de comptage soient uniformément tendues, il suffit que les trois conditions suivantes soient remplies:

(*a*) *pour tout $t > 0$, les lois des variables aléatoires $X_t^{(n)}$ soient uniformément tendues,*

(*b*) *pour tout $t > 0$, on ait $\limsup_n \int X_t^{(n)} \, dP_n < \infty$,*

(*c*) $\lim_{\delta \downarrow 0} \limsup_n \mu_n(]0, \delta[) = 0$ [2].

Démonstration: De façon explicite, la condition (*a*) signifie que l'on a, pour tout t,

$$\lim_{a \uparrow \infty} \limsup_n P\{X_t^{(n)} > a\} = 0.$$

Elle équivaut donc, grâce à la croissance des trajectories des processus $X^{(n)}$, à la condition (*a*) du théorème (1.3).

Les conditions (*b*), (*c*) impliquent d'autre part, grâce à la proposition précédente, la relation

$$\lim_{\delta \downarrow 0} \limsup_n P_n\{\omega : w'(X^{(n)}(\cdot, \omega), \delta) > 0\} = 0.$$

[1] Il ne serait pas difficile de prouver que l'inclusion opposée est également vraie.

[2] On remarquera que cette dernière condition est automatiquement remplie lorsque les μ_n sont uniformément tendues.

Puisque celle-ci entraine évidemment la condition (*b*) du théorème (1.3), ce théorème permet de conclure.

Si maintenant on applique le théorème précédent et le théorème (2.1), on obtient, grâce à (1.1), le corollaire suivant:

(3.5) Corollaire: *Pour tout n considérons, sur un espace probabilisé $(\Omega_n, \mathcal{F}_n, P_n)$ une suite $(U_k^{(n)})_{k\geq 1}$ de variables aléatoires indépendantes, à valeurs dans $]0, \infty[$ et admettant une même loi μ_n, et désignons par $X^{(n)}$ le processus de comptage correspondant. En supposant que la suite (μ_n) converge étroitement sur $]0, \infty[$ vers une loi μ, considérons, sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, une suite $(U_k)_{k\geq 1}$ de variables aléatoires indépendantes de loi μ, et le processus de comptage X associé.*

Pour que les lois des processus $X^{(n)}$ convergent étroitement vers la loi de X, il suffit que les deux conditions suivantes soient remplies:

(*a*) *la loi limite μ soit diffuse,*

(*b*) *on ait, pour tout $t > 0$, $\limsup_n \int X_t^{(n)} dP_n < \infty$.*

(3.6) Exemple: Supposons en particulier que, pour tout n, la loi μ_n coïncide avec la loi de la variable aléatoire obtenue en multipliant une variable aléatoire géométrique, de paramètre p_n, par un nombre réel $\delta_n > 0$. Supposons en outre que les deux suites (p_n), (δ_n) convergent vers 0 et que leur rapport (p_n/δ_n) converge vers un nombre réel $\lambda > 0$. La suite (μ_n) converge alors vers la loi exponentielle de paramètre λ, de sorte que la condition (*a*) du corollaire précédent est remplie.

La loi de la variable aléatoire $X_t^{(n)}$ coïncide en outre avec la loi binomiale de paramètres p_n, $[t/\delta_n]$ (où $[t/\delta_n]$ désigne la partie entière de t/δ_n). On a donc

$$\int X_t^{(n)} dP_n = p_n \left[\frac{t}{\delta_n}\right] \sim p_n \frac{t}{\delta_n} \sim \lambda t\,,$$

de sorte que la condition (*b*) du corollaire précédent est également remplie. On retrouve ainsi l'approximation classique du processus de Poisson par une suite de processus discrets de type binomial (cf. [4]).

Note ajoutée lors de la correction des épreuves (14 Septembre 1983).

Le théorème (1.3) (tel qu'il a été énoncé par M. Métivier dans [2] et [3]) est faux. Il deviendrait correct si on ajoute aux conditions (*a*), (*b*) la condition suivante:

$$\lim_{\delta\downarrow 0} \limsup_n P_n\{\sup_{t-\delta\leq r<s<t} |X_r^{(n)} - X_s^{(n)}| > \eta\} = 0 \qquad \text{pour tout } t > 0 \text{ et tout } \eta > 0\,.$$

Cette condition doit être également ajoutée dans l'énoncé de (3.4), où elle prend la forme suivante:

$$\lim_{\delta\downarrow 0} \limsup_n P_n\{X_{t+\delta}^{(n)} - X_{t-\delta}^{(n)} > 1\} = 0 \qquad \text{pour tout } t > 0\,.$$

Elle est, par contre, automatiquement remplie dans (3.5), où l'on a

$$P\{X_t \neq X_{t-}\} = P\Big\{\bigcup_{i\geq 1}\{U_1 + \dots + U_i = t\}\Big\} = 0$$

et par suite

$$\limsup_n P_n\{X_t^{(n)} - X_{t-}^{(n)} \geq 1\} \leq P\{X_t - X_{t-} \geq 1\} = P\{X_{t-} - X_{t-} \geq 1\}.$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] P. Billingsley, *Convergence of Probability Measure*, J. Wiley (1968).

[2] M. Métivier, *Sufficient conditions for tightness and weak convergence of a sequence of processes*, University of Minesota, Minneapolis, School of Mathematics, Internal report.

[3] M. Métivier, *Une condition suffisante de compacité faible pour une suite de processus. Cas des semimartingales*, Ecole Polytechnique, Centre de Mathématiques appliquées, Rapport interne n. 61 (1980).

[4] M. Volpato, *Sulla caratterizzazione, discretizzazione e simulazione del processo poissoniano* (à paraître).