Rendiconti
Accademia Nazionale delle Scienze detta dei XL
Memorie di Matematica
101° (1983), Vol. VII, fasc. 9, pagg. 145-154

GABRIELE DARBO (*)

Semigruppi continui ed omogenei su R_+ (**).

Continuous and homogeneous semigroups over R_+.

SUMMARY. — All the possible structures of continuous homogeneous semigroup over R_+ are determined. The result is used to generate all the canonical associative norms on the (algebraic) direct sum of two Banach spaces.

1. Un semigruppo su $R_+ = \{x | x \in R \,\&\, x > 0\}$ è individuato da una operazione $b: R_+ \times R_+ \to R_+$ associativa. Se b è continua e positivamente omogenea di grado uno, si trova che essa è necessariamente della forma:

$$a) \quad b(x, y) = (x^p + y^p)^{1/p}$$

con p reale non nullo; oppure

$$b) \quad b(x, y) = \max(x, y); \; b(x, y) = \min(x, y)$$

o, nel caso non commutativo,

$$c) \quad b(x, y) = x; \; b(x, y) = y.$$

Le operazioni di tipo $a)$ con $p > 1$ e la prima delle $b)$ permettono di caratterizzare tutti i bifuntori associativi nella categoria degli spazi di Banach (e morfismi non espansivi) il cui funtore soggiacente è la somma diretta di spazi vettoriali.

2. Ci proponiamo di risolvere il seguente problema: trovare tutte le funzioni continue $b: R_+ \times R_+ \to R_+$ soddisfacenti il sistema di equazioni funzionali

$$(1) \qquad tb(x, y) = b(tx, ty),$$

$$(2) \qquad b(b(x, y), z) = b(x, b(y, z)),$$

(*) Istituto Matematico dell'Università, via L. B. Alberti, 4 - 16132 Genova.
(**) Memoria presentata il 14 aprile 1983 da Giuseppe Scorza Dragoni, uno dei XL.

ISSN-0392-4106

per $x, y, z, t \in \mathbb{R}_+$. La condizione (1) è semplicemente la distribuitività del prodotto.

Poniamo

$$f(t) = b(1, t);$$

così che si avrà

$$b(x, y) = xf\left(\frac{y}{x}\right).$$

La (2) si traduce nella

$$f(u)f\left(\frac{v}{f(u)}\right) = f\left(uf\left(\frac{v}{u}\right)\right) \tag{3}$$

che deve valere per u, v positivi arbitrari.

Il problema si riduce a quello di risolvere l'equazione (3) nell'ambito delle funzioni continue in $\mathbb{R}_+$ a valori in $\mathbb{R}_+$.

Definiamo ricorsivamente la funzione $K(n)$, per ora sugli interi positivi, ponendo

$$K(1) = 1, \qquad K(n+1) = f(K(n)).$$

Dimostriamo che $K(n)$ è funzione distributiva rispetto al prodotto; vale cioè la relazione

$$K(pq) = K(p)K(q) \qquad (p, q \text{ interi positivi}). \tag{4}$$

Osserviamo intanto che si ha

$$K(q)f\left(\frac{v}{K(q)}\right) = f^q(v) \tag{5}$$

avendo denotato con f^n la potenza iterativa di f.

Infatti la (5) vale per $q = 1$; posto che essa valga per un certo q, applicando f ad ambo i membri, si ha in virtù della (3)

$$K(q+1)f\left(\frac{v}{K(q+1)}\right) = f\left(K(q)f\left(\frac{v}{K(q)}\right)\right) = f^{q+1}(v)$$

quindi, per induzione, la validità della (5).

Facendo $v = K(pq)$ nella (5) ne viene

$$K(q)f\left(\frac{K(pq)}{K(q)}\right) = f^q(K(pq)) = K(pq+q). \tag{6}$$

Poichè la (4) è valida per $p = 1$, supponendo che essa valga per un certo p, la (6) porge

$$K(q)K(p+1) = K(q(p+1))$$

e quindi per induzione su p, la validità della (4).

Poniamoci ora nell'ipotesi

$$K(2) = f(1) > 1 \tag{7}$$

e dimostriamo che la successione $(K(n))$ è crescente.

Intanto osserviamo che

$$K(2^n) = (K(2))^n \to +\infty \tag{8}$$

quindi la f è superiormente illimitata.

Per assurdo, se per qualche n risultasse $K(n+1) < K(n)$, detto n_0 il più piccolo di tali n, si avrebbe

$$f(K(n_0)) < K(n_0) .$$

Quest'ultima assieme alla (7), per la supposta continuità di f, condurrebbe all'esistenza di un punto fisso $x_0 \in 1^{\frown} K(n_0)$.

Detto c_0 l'estremo inferiore della f, ogni punto $x > x_0 c_0$ risulterebbe punto fisso. Dalla (3) si ricava infatti

$$x_0 f\left(\frac{p}{x_0}\right) = f\left(x_0 f\left(\frac{p}{x_0}\right)\right)$$

ma $f(p/x_0)$ può assumere, per la continuità e non limitazione superiore di f, qualsiasi valore maggiore di c_0. La successione $(K(n))$ dovrebbe quindi essere definitivamente costante e ciò sarebbe in contrasto con la (8).

Rimanendo sempre nell'ipotesi (7) prolunghiamo la definizione di K al gruppo $\mathbf{Q}_+$ (moltiplicativo) dei razionali positivi. Sia dunque $x = p/q$ e poniamo

$$K(x) = \frac{K(p)}{K(q)} .$$

La definizione è lecita in quanto si ha per la (4)

$$\frac{K(p)}{K(q)} = \frac{K(rp)}{K(rq)}$$

per p, q, r interi positivi.

La K così definita è un morfismo di gruppi (moltiplicativi)

$$K\colon \mathbf{Q}_+ \to \mathbf{R}_+ .$$

Anzi K è crescente in $\mathbf{Q}_+$, poichè la relazione

$$x_1 < x_2$$

se $x_1 = p_1/q_1$ e $x_2 = p_2/q_2$ è esprimibile con

$$p_1 q_2 < p_2 q_1 \qquad (p_1, q_1, p_2, q_2 \text{ interi positivi})$$

che, per la crescenza di K sugli interi, porta a

$$K(p_1 q_2) < K(p_2 q_1)\,,$$

da cui, vista la (4)

$$K(x_1) < K(x_2)\,.$$

Anche la proprietà

$$f(K(x)) = K(x+1)$$

è ancora valida per $x \in \mathrm{Q}_+$. Ciò si vede ponendo $x = K(p)$ nella (5), con p intero positivo; si trova:

$$K(q) f\left(K\left(\frac{p}{q}\right)\right) = f^q(K(p)) = K(p+q)$$

da cui

$$f\left(K\left(\frac{p}{q}\right)\right) = K\left(\frac{p}{q}+1\right).$$

Abbiamo quindi il morfismo crescente K; per ragioni di comodità poniamo

$$\varphi = \log \circ K \circ \exp$$

così la distributività di K viene espressa da

$$\varphi(\xi+\eta) = \varphi(\xi) + \varphi(\eta)\,, \qquad \xi, \eta \in \log \mathrm{Q}_+\,,$$

quindi φ è un morfismo crescente di gruppi (additivi).

Perciò si avrà:

$$\varphi(0) = 0\,, \qquad \varphi(-\xi) = -\varphi(\xi)$$

nonchè

$$\inf_{\xi>0} \varphi(\xi) = \lambda > 0\,.$$

Sia $\varepsilon > 0$ arbitrario; esiste un $\delta \in \log \mathrm{Q}_+$, positivo e tale che

$$\lambda < \varphi(\delta) < \lambda + \varepsilon$$

quindi se $\xi_1, \xi_2 \in \log \mathrm{Q}_+$ e $|\xi_1 - \xi_2| < \delta$, posto $\bar{\xi} = \max(\xi_1, \xi_2) - \delta$, si avrà $\bar{\xi} \in \log \mathrm{Q}_+$ nonchè

$$\lambda < \varphi(\xi_i - \bar{\xi}) < \lambda + \varepsilon \qquad (i = 1, 2)$$

da cui

$$|\varphi(\xi_1)-\varphi(\xi_2)| = |\varphi(\xi_1-\bar{\xi})-\varphi(\xi_2-\bar{\xi})| < \varepsilon$$

e pertanto l'uniforme continuità di φ.

Il prolungamento per continuità di φ a tutto R soddisfa ancora la proprietà distributiva e per il classico risultato di Darboux risulta

$$\varphi(\xi) = k\xi$$

con k costante reale positiva.

Risalendo alla K si ha

$$K(x) = x^k \qquad \text{per } x \in \mathbf{Q}_+ .$$

Dunque per $x \in \mathbf{Q}_+$ vale la relazione

$$f(x^k) = (x+1)^k$$

ed essendo f continua e $\mathbf{Q}_+$ denso in $\mathbf{R}_+$, quest'ultima dovrà valere in tutto $\mathbf{R}_+$. Ne segue che, posto $p = 1/k$, $x = t^p$, si ha

$$f(t) = (1+t^p)^{1/p}$$

identicamente in $\mathbf{R}_+$.

Abbiamo dunque che, nell'ipotesi (7), la soluzione risulta del tipo *a*) con $p > 0$. Ancora rientra nel tipo *a*) se $f(1) < 1$. Infatti ponendo

$$\bar{f}(t) = 1/f(1/t)$$

si vede che $\bar{f}$ è soluzione del nostro problema se tale è f ed è

$$\bar{f}(1) > 1 .$$

In questo caso la f è del tipo *a*) con $p < 0$.

3. Rimane ancora da trattare il caso

$$f(1) = 1 .$$

Dalla (3), per $u = 1$ si trova, nell'ipotesi attuale,

$$f(v) = f(f(v)) ;$$

la f in questo caso è idempotente.

Sia $a = \inf(f)$ e $b = \sup(f)$; allora si avrà

$$0 \leq a \leq 1 \leq b \leq +\infty .$$

I punti dell'intervallo $f(\mathbf{R}_+)$ sono punti fissi per la f. Dimostriamo che non può essere $0 < a < 1$ nè $1 < b < +\infty$. Nel primo caso a è punto fisso e dalla (3) per $u = a$ e $v = a^2$ si trova

$$a^2 = f(a^2)$$

ed essendo $a^2 < a = \inf(f)$, ciò è escluso. Analogamente si esclude che sia $1 < b < +\infty$. Rimangono solo le possibilità seguenti

i) $a = 1$ e $b = +\infty$,

ii) $a = 0$ e $b = 1$,

iii) $a = 0$ e $b = +\infty$,

iv) $a = 1$ e $b = 1$.

Se ci troviamo nella situazione i), i punti $t \in 1^{+} + \infty$ sono fissi e vale per tali t la relazione

$$f(t) = t \ ;$$

ponendo $v = u$ nella (3) si trova

$$f(u) f\left(\frac{u}{f(u)}\right) = f(u)$$

cioè

$$f\left(\frac{u}{f(u)}\right) = 1 \, .$$

Ma $u/f(u)$ è continua, vale 1 se $u = 1$ ed è infinitesima con u: spazza quindi tutto l'intervallo $0^{+}1$, per cui è

$$f(t) = 1$$

per $t \in 0^{+}1$. La soluzione in tal caso è

$$f(t) = \max(1, t) \qquad (t \in \mathbf{R}_+)$$

e porge per $h(x, y)$ la prima soluzione del tipo b).

Nella situazione ii) si perviene alla seconda soluzione del tipo b), con ragionamento analogo al precedente, ma volendo anche con la trasformazione

$$\bar{f}(t) = 1/f(1/t)$$

che riconduce il problema a quello testè risolto. Le situazioni iii) e iv) porgono in modo ovvio le solutioni $f(t) = t$ e $f(t) = 1$ cui corrispondono quelle del tipo c).

Osservazione 1: Tutte le strutture di semigruppo di tipo a) sono isomorfe, l'isomorfismo tra due di queste essendo dato da

$$t \mapsto t^{\lambda}$$

con $\lambda \neq 0$ conveniente. Per $\lambda < 0$ si hanno isomorfismi tra le strutture del tipo b).

Osservazione 2: Se si prolunga la potenza x^p per antisimmetria (come è già di fatto se p è intero dispari), l'operazione

$$b(x, y) = (x^p + y^p)^{1/p}$$

si prolunga ad un'operazione di gruppo. Questa, se p è reale positivo, assieme al prodotto ordinario, presenta su R una struttura di corpo reale in cui b figura come « somma » alternativa. Lo stesso avviene se p è negativo, avendo cura di prendere ∞ come elemento nullo. In questo caso l'ordinamento va cambiato per renderlo compatibile con la nuova « somma ». Per $p \neq 0$ la trasformazione $x \mapsto x^p$ (prolungata come si è detto) è l'isomorfismo tra $(\mathrm{R}, b, \cdot)$ e $(\mathrm{R}, +, \cdot)$.

Il problema delle norme associative

Poniamoci nella categoria Ban_1 (spazi di Banach e morfismi lineari non espansivi) e sia $\mathfrak{X} \underset{\cdot}{\oplus} \mathfrak{Y}$ un generico bifuntore in questa categoria. Supponiamo che lo spazio vettoriale soggiacente a $\mathfrak{X} \underset{\cdot}{\oplus} \mathfrak{Y}$ sia la somma (o prodotto) degli spazi vettoriali $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$.

Consideriamo un elemento generico

$$(u, v) \in \mathfrak{X} \underset{\cdot}{\oplus} \mathfrak{Y}$$

esistono allora, (casi banali a parte), due iniezioni isometriche

$$\alpha : \mathrm{R} \to \mathfrak{X}, \qquad \beta : \mathrm{R} \to \mathfrak{Y}$$

le cui immagini contengono u e v rispettivamente. Per un teorema di Hahn-Banach [1] α e β posseggono inversi a sinistra $\bar{\alpha}$ e $\bar{\beta}$ in Ban_1.

Il diagramma commutativo

$$\begin{tikzcd} \mathrm{R} \underset{\cdot}{\oplus} \mathrm{R} \arrow[r, "\alpha \underset{\cdot}{\oplus} \beta"] \arrow[rr, bend right, "\mathrm{id}"'] & \mathfrak{X} \underset{\cdot}{\oplus} \mathfrak{Y} \arrow[r, "\bar{\alpha} \underset{\cdot}{\oplus} \bar{\beta}"] & \mathrm{R} \underset{\cdot}{\oplus} \mathrm{R} \end{tikzcd}$$

ci permette di affermare che $\alpha \underset{\cdot}{\oplus} \beta$, in quanto coretrazione, è iniettivo isometrico.

Detta $b(x,y)$ la norma di (x,y) in $\mathbf{R} \underset{\cdot}{\oplus} \mathbf{R}$, poichè il moltiplicatore -1: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ è isometrico, si avrà

$$b(x,y) = b(-x,y) = b(x,-y) = b(-x,-y)$$

per cui b è determinata dalla sua restrizione al primo quadrante; pertanto sarà $\|(u,v)\| = b(\|u\|, \|v\|)$. Se il funtore $-\underset{\cdot}{\oplus}-$ è associativo, tale dovrà essere la $b(x,y)$. Per la convessità, b è necessariamente continua e dovrà rientrare nelle soluzioni di tipo *a*) con $p>1$ oppure essere la prima soluzione del tipo *b*). Viceversa se definiamo la norma di un elemento $(x,y) \in \mathfrak{X} \times \mathfrak{Y}$, ponendo

$$\|(x,y)\| = (\|x\|^p + \|y\|^p)^{1/p} \qquad (p>1)$$

oppure

$$\|(x,y)\| = \max(\|x\|, \|y\|)$$

si ottiene uno spazio normato che indichiamo con

$$\mathfrak{X} \underset{p}{\oplus} \mathfrak{Y} \qquad (p\text{-join})$$

o rispettivamente

$$\mathfrak{X} \underset{\infty}{\oplus} \mathfrak{Y} \qquad (\infty\text{-join})$$

si ottengono così tutti i possibili bifuntori associativi in Ban_1, tali che lo spazio vettoriale soggiacente è il prodotto di spazi vettoriali.

Di conseguenza le iniezioni e le proiezioni canoniche sono in Ban_1 e tali funtori sono altresì commutativi.

5. Per ogni coppia crescente p, p', $1 \leq p < p' \leq +\infty$, il morfismo naturale

$$\mathfrak{X} \underset{p}{\oplus} \mathfrak{Y} \to \mathfrak{X} \underset{p'}{\oplus} \mathfrak{Y}$$

identico sugli spazi soggiacenti, è in Ban_1. Ciò è noto se $p = 0$ e $p' = \infty$ [2].

Siano p, q coniugati; cioè tali che

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 .$$

Dimostriamo che il morfismo che associa alla coppia di funzionali linear. $(f_1, f_2) \in \mathfrak{X}^* \underset{q}{\oplus} \mathfrak{Y}^*$ il funzionale lineare f definito da

$$f(x,y) = f_1(x) + f_2(y) \qquad (x,y) \in \mathfrak{X} \underset{p}{\oplus} \mathfrak{Y}$$

è un isomorfismo (naturale) in Ban_1

$$\mathfrak{X}^* \underset{q}{\oplus} \mathfrak{Y}^* \simeq (\mathfrak{X} \underset{p}{\oplus} \mathfrak{Y})^* . \tag{9}$$

Dimostrazione: Se a, b, s, t sono reali sussiste la nota disuguaglianza di Hölder

$$|as + bt| < (|a|^q + |b|^q)^{1/q} \cdot (|s|^p + |t|^p)^{1/p} . \tag{10}$$

A parte il caso banale in cui uno o entrambi $\mathfrak{X}$ e $\mathfrak{Y}$ siano nulli, sia $w \in \mathfrak{X} \underset{p}{\oplus} \mathfrak{Y}$; poniamo $w = (sx, ty)$ con $s, t \in \mathbf{R}$, $x \in \mathfrak{X}$, $y \in \mathfrak{Y}$ e $\|x\| = 1 = \|y\|$. Per la (10) si ha

$$|f(sx, ty)| = |sf_1(x) + tf_2(y)| < (|f_1(x)|^q + |f_2(y)|^q)^{1/q} \cdot (|s|^p + |t|^p)^{1/p}$$

ossia

$$|f(w)| < (\|f_1\|^q + \|f_2\|^q)^{1/q} \|w\| \tag{11}$$

da cui, per l'arbitrarietà di w,

$$\|f\| < (\|f_1\|^q + \|f_2\|^q)^{1/q} . \tag{12}$$

Il morfismo bijettivo

$$(f_1, f_2) \mapsto f : \mathfrak{X}^* \underset{q}{\oplus} \mathfrak{Y}^* \to (\mathfrak{X} \underset{p}{\oplus} \mathfrak{Y})^* \tag{13}$$

è dunque in Ban_1. Dimostriamo che è isometrico.

Notiamo che fissati comunque a, b si possono trovare s, t non entrambi nulli in modo che valga l'uguaglianza:

$$|as + bt| = (|a|^q + |b|^q)^{1/q} (|s|^p + |t|^p)^{1/p} . \tag{14}$$

Prendiamo allora un arbitrario $k < 1$ e scegliamo $x \in \mathfrak{X}$ e $y \in \mathfrak{Y}$ di norme unitarie in modo che

$$|f_1(x)| > k\|f_1\| , \qquad |f_2(y)| > k\|f_2\| . \tag{15}$$

Posto $a = f_1(x)$, $b = f_2(y)$ scegliamo s, t come detto dianzi e $w = (sx, ty)$; avremo per le (14) e (15)

$$|f(sx, ty)| > k(\|f_1\|^q + \|f_2\|^q)^{1/q} \cdot (|s|^p + |t|^p)^{1/p} .$$

Esiste dunque qualche vettore $w \neq 0$ per cui

$$\|f\| \cdot \|w\| > |f(w)| > k(\|f_1\|^q + \|f_2\|^q)^{1/q} \|w\| ,$$

da cui per l'arbitrarietà di $k < 1$

$$\|f\| > (\|f_1\|^q + \|f_2\|^q)^{1/q} . \tag{16}$$

Quest'ultima, assieme alla (12), porge l'isometricità del morfismo (13) che, essendo bijettivo, è invertibile in Ban_1. Il fatto sussiste come è noto [2] anche se $p = 0$ e $q = \infty$ o viceversa.

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

[1] N. Dunford - J. T. Schwartz, *Linear operators. - I: General theory*, New York, 1958.
[2] Z. Semadeni, *Banach spaces of continuous functions*, Warszawa, 1971.

Direttore responsabile: Prof. A. Ballio - Autorizz. Trib. di Roma n. 7269 dell'8-12-1959
« Monograf » - Via Collamarini, 5 - Bologna